Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 62—50

О СТРАТЕГИЯХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Г. В. Томский

(Якутск)

Рассматриваются кусочно-программные, кусочно-синтезирующие и рекурсивные стратегии в дифференциальных играх. Показано, что в определенном смысле эти стратегии можно считать частными случаями верхних Δ-стратегий. Работа примыкает к исследованиям [1–8].

1. Пусть динамика игры описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dx/dt = f(t, x, u, v), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in R^n \tag{1.1}$$
$$u \in P(t) \subset U, \quad v \in Q(t) \subset V$$

где U (V) — компактное множество в евклидовом пространстве R^p (R^q) и существует хотя бы одна пара измеримых на $[t_0, T]$ управлений $u(t)$, $v(t)$, таких, что $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Функция f в правой части уравнений движения (1.1) непрерывна на $[t_0, T] \times R^n \times U \times V$ и удовлетворяет на этом множестве условию Липшица по x с постоянной λ.

Будем рассматривать две управляемые динамические системы [6], определяемые уравнением (1.1).

Динамическая система $\Sigma_1 = ([t_0, T], R^n, D_1, D_2, \varkappa)$. Множество допустимых управлений первого (второго) игрока D_1 (D_2) в системе Σ_1 состоит из всех измеримых на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функций $u(t)(v(t))$, удовлетворяющих условиям $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Траектории $x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, u, v)$ этой системы определяются как решения системы уравнений (1.1) при $u = u(t) \in D_1$, $v = v(t) \in D_2$ и начальном условии $x(t_*) = x_*$.

Динамическая система $\Sigma_2 = ([t_0, T], R^n, D_1(k_1), D_2(k_2), \varkappa)$. Множество допустимых управлений первого (второго) игрока $D_1(k_1)$ $(D_2(k_2))$ состоит из всех вектор-функций $u(t, x)(v(t, x))$, определенных на $[t_0, T] \times R^n$, принимающих значения U (V), $u(t, x) \in P(t) \subset U$ $(v(t, x) \in Q(t) \subset V)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in R^n$, измеримых по t на $[t_0, T]$ при каждом фиксированном x и удовлетворяющих условию Липшица по x с постоянной k_1 (k_2) на множестве $[t_0, T] \times R^n$. Множество $D_1(k_1)$ $(D_2(k_2))$ можно рассматривать как множество, состоящее из отображений отрезка $[t_0, T]$ в множество функций

$$U_1 = \{u(x) \in C[R^n, \quad U] \mid \| u(x_1) - u(x_2) \| \leqslant k_1 \| x_1 - x_2 \| \text{ для всех } x_1, x_2 \in R^n\}$$

$$(V_1 = \{v(x) \in C[R^n, V] \mid \|v(x_1) - v(x_2)\| \leqslant k_2 \|x_1 - x_2\| \text{ для всех } x_1, x_2 \in R^n\})$$

Траектории $x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, u, v)$ системы Σ_2 определяются как решения системы уравнений (1.1) при $u = u(t, x) \in D_1(k_1)$, $v = v(t, x) \in D_2(k_2)$ и начальных условиях $x(t_*) = x_*$. При этом предполагается, что функция f в правой части уравнений движения (1.1) удовлетворяет на множестве $[t_0, T] \times R^n \times U \times V$ условию Липшица по x, u, v с постоянной λ.

2. Кусочно-программные стратегии [6, 7] в системе Σ_2 будем называть кусочно-синтезирующими стратегиями. Обозначим через $D_1^*[k_1, t_*] \times (D_2^*[k_2, t_*])$ множество всех кусочно-синтезирующих стратегий первого (второго) игрока в квазидинамической системе $\Sigma_2(t_*, x_*)$ [6]. Пусть $\Delta = \{t_* = t_0^\Delta < t_1^\Delta < \ldots < t^\Delta_{n(\Delta)} = T\}$ — любое конечное разбиение отрезка $[t_*, T]$. Обозначим через $D_1^\Delta[t_*]$ $(D_2^\Delta[t_*])$ множество всех верхних Δ-стратегий, через $D_{1\Delta}[t_*]$ $(D_{2\Delta}[t_*])$ множество всех Δ-стратегий, а через $D_1^*[t_*](D_2^*[t_*])$ множество всех кусочно-программных стратегий первого (второго) игрока в системе $\Sigma_1(t_*, x_*)$ [6]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой кусочно-синтезирующей стратегии $\varphi \in D_1^*[k_1, t_*](\psi \in D_2^*[k_2, t_*])$ существует верхняя Δ-стратегия $\varphi^\Delta \in D_1^\Delta[t_*]$ $(\psi^\Delta \in D_2^\Delta[t_*])$, такая, что

$$\varkappa(t, t_*, x_*, \varphi, \psi_\Delta) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi^\Delta, \psi_\Delta)$$

для всех Δ-стратегий $\psi_\Delta \in D_{2\Delta}[t_*]$

$$(\varkappa(t, t_*, x_*, \varphi_\Delta, \psi) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi_\Delta, \psi^\Delta)$$

для всех Δ-стратегий $\varphi_\Delta \in D_{1\Delta}[t_*]$).

3. Пусть

$$S(t_*) = \bigcup_{t_*<t<T} [D_1[t_*, t) \times D_2[t_*, t)], \quad \Pi(t_*) = \bigcup_{\substack{t_*<t<T \\ t<\theta\leqslant T}} D_1[t, \theta)$$

Определение 1. Рекурсивной стратегией первого игрока в системе $\Sigma_1(t_*, x_*)$ называется любой конечный набор отображений $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где для $n = 1$ $a = a_1 \in D_1[t_*, T)$, а для $n \geqslant 2$

$$a_1 \in \bigcup_{t_*<t<T} D_1[t_*, t), \quad a_k : S(t_*) \to \Pi(t_*), \quad k = 2, \ldots, n$$

причем, если $\{u_t, v_t\} \in D_1[t_*, t) \times D_2[t_*, t)$, $t_* < t < T$, то выполняются условия: $a_n(u_t, v_t) \in D_1[t, T)$, $a_k(u_t, v_t) \in D_1[t, \theta)$, $t < \theta \leqslant T$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Аналогично определяются рекурсивные стратегии второго игрока $b = (b_1, \ldots, b_m)$ в системе $\Sigma_1(t_*, x_*)$.

Траектория $x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, a, b)$ системы Σ_1, порожденная парой рекурсивных стратегий $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$, определяется следующим образом. В начальный момент времени t_* игроки выбирают управления

$$u_1 = a_1 \in D_1[t_*, t_{11}), \quad v_1 = b_1 \in D_2[t_*, t_{21})$$

Пусть, для определенности, $t_{11} < t_{21}$. Тогда в момент времени t_{11} первый игрок выбирает управление $u_2 = a_2(u_1, v_{11}) \in D_1[t_{11}, t_{12})$ в зависимости от реализовавшихся на отрезке времени $[t_*, t_{11})$ управлений игроков u_1, и v_{11}, где через v_{11} обозначено сужение управления $v_1 = b_1$ на отрезок $[t_*, t_{11}]$. (Заметим, что в отличие от кусочно-программных стратегий момент времени t_{12}, вообще говоря, также зависит от управлений u_1 и v_{11}, $t_{12} = t_{12}(u_1, v_{11})$.) Сравним величины t_{21} и t_{12}. Если $t_{21} < t_{12}$, то в момент времени t_{21} второй игрок выбирает управление

$$v_2 = b_2(u_1, u_{21}, v_1) \in D_2[t_{21}, t_{22}(u_1, u_{21}, v_1))$$

в зависимости от реализовавшихся на отрезке времени $[t_*, t_{21})$ управлений игроков (u_1, u_{21}), v_1 (через u_{21} обозначено сужение управления u_2 на отрезок $[t_{11}, t_{21})$). Если $t_{21} > t_{12}$, то в момент времени t_{12} первый игрок выбирает управление

$$u_3 = a_3(u_1, u_2, v_{12}) \in D_1[t_{12}, t_{13}(u_1, u_2, v_{12}))$$

где через v_{12} обозначено сужение управления v_1 на $[t_*, t_{12})$.

Продолжая этот процесс, самое большее через $n + m - 1$ шагов получаем однозначным образом пару управлений

$$u = (u_1, \ldots, u_n) = u(a, b), \quad v = (v_1, \ldots, v_m) = v(a, b)$$

порожденных парой стратегий a и b. Таким образом, пара рекурсивных стратегий a и b определяет единственную траекторию $x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, a, b) = \varkappa(t, t_*, x_*, u(a, b), v(a, b))$ системы Σ_1.

Выбор первым игроком рекурсивной стратегии $a = (a_1, \ldots, a_n)$ означает, что он может в ходе игры n раз менять свое управление — в зависимости от поступающей информации. При этом моменты переключений управлений не фиксируются в начале игры как при применении кусочно-программных стратегий, а определяются игроком в ходе игры.

Замечания. 1°. Позиционной рекурсивной стратегией (см. [8]) первого игрока в системе $\Sigma_1(t_*, x_*)$ называется любой конечный набор отображений $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где

$$a = a_1 \in D_1, \quad n = 1$$

$$a_1 \in \bigcup_{t_* < t < T} D_1[t_*, t), \quad a_k: [t_*, T] \times R^n \to \Pi(t_*)$$

$$n \geqslant 2, \quad k = 2, \ldots, n$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$a_n(t, x) \in D_1[t, T), \quad a_k(t, x) \in D_1[t, \theta), \quad t < \theta < T, \ k = 1, \ldots, n-1$$

Таким же образом определяются позиционные рекурсивные стратегии для второго игрока.

Любая позиционная рекурсивная стратегия $a = (a_1, \ldots, a_n)$ порождает рекурсивную стратегию $a = (a_1, a_2^*, \ldots, a_n^*)$, где

$$a_k^*(u_t, v_t) = a_k(t, \varkappa(t, t_*, x_*, u_t, v_t)), \quad k = 2, \ldots, n$$

— таким образом, позиционные рекурсивные стратегии являются частными случаями рекурсивных стратегий.

2°. Кусочно-программной стратегией (см. [3,6,7]) первого игрока в системе $\Sigma_1(t_*, x_*)$ называется пара $\varphi = (\Delta, \varphi_\Delta)$, где Δ — любое конечное разбиение отрезка $[t_*, T]$, а φ_Δ — рекурсивная стратегия первого игрока $\varphi_\Delta = (\varphi_{\Delta,1}, \ldots, \varphi_{\Delta,n(\Delta)})$, такая, что $\varphi_{\Delta,k}(u_{k-1}, v_{k-1}) \in D_1[t_{k-1}^\Delta, t_k^\Delta)$, если

$$(u_{k-1}, v_{k-1}) \in D_1[t_*, t_{k-1}^\Delta) \times D_2[t_*, t_{k-1}^\Delta), \quad k = 2, \ldots, n(\Delta)$$

Аналогичным образом можно перефразировать определение кусочно-программных стратегий для второго игрока. Следовательно,

$$D_k^*[t_*] \subset D_k^r[t_*], \quad k = 1,2$$

где $D_k^r[t_*]$ — множество всех рекурсивных стратегий k-го игрока в системе $\Sigma_1(t_*, x_*)$.

Сравнивая определения рекурсивных и верхних Δ-стратегий, можно получить следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого конечного разбиения Δ отрезка $[t_*, T]$ и любой рекурсивной стратегии $a \in D_1^r[t_*]$ $(b \in D_2^r[t_*])$ существует верхняя Δ-стратегия $\varphi^\Delta \in D_1^\Delta[t_*]$ $(\psi^\Delta \in D_2^\Delta(t_*))$, такая, что

$$u(a, \psi_\Delta) = u(\varphi^\Delta, \psi_\Delta), \quad v(a, \psi_\Delta) = v(\varphi^\Delta, \psi_\Delta) \tag{3.1}$$

$$(u(\varphi_\Delta, b) = u(\varphi_\Delta, \psi^\Delta), \quad v(\varphi_\Delta, b) = v(\varphi_\Delta, \psi^\Delta))$$

для всех $\psi_\Delta \in D_{2\Delta}[t_*]$, $(\varphi_\Delta \in D_{1\Delta}[t_*])$.

Доказательство. Возьмем произвольную рекурсивную стратегию $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D_1{}^r[t_*]$ и любое конечное разбиение Δ отрезка $[t_*, T]$. Надо показать, что при помощи стратегии a можно построить верхнюю Δ-стратегию $\varphi^\Delta = (\varphi^{\Delta,1}, \ldots, \varphi^{\Delta,n(\Delta)})$ в системе $\Sigma_1(t_*, x_*)$, удовлетворяющую соотношениям (3.1).

Покажем способ построения отображения

$$\varphi^{\Delta,1}: D_2[t_*, t_1{}^\Delta) \to D_1[t_*, t_1{}^\Delta) \tag{3.2}$$

Пусть $a_1 \in D_1[t_*, t_1)$. Если $t_1 \geqslant t_1{}^\Delta$, то $\varphi^{\Delta,1}$ — сужение управления a_1 на отрезок $[t_*, t_1{}^\Delta)$. В этом случае $\varphi^{\Delta,1}$ не зависит от того, какое управление выбрано вторым игроком на $[t_*, t_1{}^\Delta]$. Пусть $t_1 < t_1{}^\Delta$, $a_2(a_1, v_1) \in D_1[t_1, t_2)$. Если $t_2 = t_2(a_1, v_1) \geqslant t_1{}^\Delta$, то $\varphi^{\Delta,1} = a_1$ на отрезке $[t_*, t_1)$, а на отрезке $[t_1, t_1{}^\Delta)$ $\varphi^{\Delta,1}$ совпадает с сужением на этот отрезок управления $a_2(a_1, v_1)$. Если второй игрок выбрал на отрезке $[t_*, t_1)$ такое управление v_1, что $t_2 = t_2(a_1, v_1) < t_1{}^\Delta$, но для управления второго игрока v_2 на отрезке $[t_*, t_2)$ справедливо условие

$$t_3 = t_3(a_1, a_2(a_1, v_1); v_2) \geqslant t_1{}^\Delta$$

то $\varphi^{\Delta,1} = a_1$ на отрезке $[t_*, t_1]$, $\varphi^{\Delta,1} = a_2(a_1, v_1)$ на отрезке $[t_1, t_2)$, а на $[t_2, t_1{}^\Delta)$ отображение $\varphi^{\Delta,1}$ совпадает с сужением отображения $a_3(a_1, a_2(a_1, v_1); v_2)$. Продолжая эти рассуждения, построим отображение (3.2). Аналогичным образом можно построить отображения $\varphi^{\Delta,k}$, $k = 2, \ldots, n(\Delta)$. Теорема доказана.

4. Рассмотрим рекурсивные стратегии в системе $\Sigma_2(t_*, x_*)$. Пусть

$$S_1(t_*) = \bigcup_{t_* < t < T} [D_1[k_1, t_*, t) \times D_2(k_2, t_*, t)],$$

$$\Pi_1(t_*) = \bigcup_{\substack{t_* < t < T \\ t < \theta \leqslant T}} D_1[k_1, t, \theta)$$

Определение 2. Рекурсивной стратегией первого игрока в системе $\Sigma_2(t_*, x_*)$ называется любой конечный набор отображений $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где

$$a = a_1 \in D_1[k_1, t_*, T), \quad n = 1$$

$$a_1 \in \bigcup_{t_*<t<T} D_1[k_1, t_*, t), \; a_k : S_1(t_*) \to \Pi_1(t_*) \; n \geqslant 2, \; k = 2, \ldots, n$$

причем, если $\{u_t, v_t\} \in D_1[k_1, t_*, t) \times D_2[k_2, t_*, t)$, $t_* < t < T$, то выполняются условия

$$a_n(u_t, v_t) \in D_1[k_1, t, T)$$

$$a_k(u_t, v_t) \in D_1[k_1, t, \theta), \quad t < \theta \leqslant T, \quad k = 1,2, \ldots, n-1$$

Аналогично определяются рекурсивные стратегии для второго игрока в системе $\Sigma_2(t_*, x_*)$. Обозначим через $D_1^r[k_1, t_*]$ ($D_2^r[k_2, t_*]$) множество всех рекурсивных стратегий первого (второго) игрока в системе $\Sigma_2(t_*, x_*)$. Справедливы включения

$$D_i^*[k_i, t_*] \subset D_i^r[k_i, t_*], \quad i = 1,2$$

Следующее утверждение можно получить, комбинируя методы доказательства теорем 1,2.

Теорема 3. Для любого конечного разбиения Δ отрезка $[t_*, T]$ и любой рекурсивной стратегии $a \in D_1^r[k_1, t_*]$ ($b \in D_2^r[k_2, t_*]$) существует верхняя Δ-стратегия $\varphi^\Delta \in D_1^\Delta[t_*]$ ($\psi^\Delta \in D_2^\Delta(t_*)$], такая, что

$$\varkappa(t, t_*, x_*, a, \psi_\Delta) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi^\Delta, \psi_\Delta)$$

$$(\varkappa(t, t_*, x_*, \varphi_\Delta, b) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi_\Delta, \psi^\Delta))$$

для всех $\psi_\Delta \in D_{2\Delta}[t_*]$ ($\varphi_\Delta \in D_{1\Delta}[t_*]$).

Аналогичные утверждения справедливы и для глобальных стратегий [9].

5. Можно доказать, что множества всех траекторий $\Phi(\Sigma_1, t_*, x_*)$ и $\Phi(\Sigma_2, t_*, x_*)$ систем $\Sigma_1(t_*, x_*)$ и $\Sigma_2(t_*, x_*)$ совпадают, т. е.

$$\Phi(t_*, x_*) = \Phi(\Sigma_1, t_*, x_*) = \Phi(\Sigma_2, t_*, x_*)$$

(если функция f удовлетворяет условию Липшица по (x, u, v)).

Пусть задан некоторый функционал (выигрыш второго игрока) H на множестве $\Phi(t_*, x_*)$. Тогда определена функция выигрыша второго игрока

$$K(\varphi^\Delta, \psi_\Delta) = H(\varkappa(\cdot, t_*, x_*, \varphi^\Delta, \psi_\Delta))$$

на множестве $D_1^\Delta[t_*] \times D_{2\Delta}[t_*]$

$$K(\varphi_\Delta, \psi^\Delta) = H(\varkappa(\cdot, t_*, x_*, \varphi_\Delta, \psi^\Delta))$$

на множестве $D_{1\Delta}[t_*] \times D_2^\Delta[t_*]$

$$K(\varphi, \psi) = H(\varkappa \cdot, t_*, x_*, \varphi, \psi))$$

на множестве $D_1^*[k_1, t_*] \times D_2^*[k_2, t_*]$ ($D_i^*[t_*] \subset D_i^*[k_i, t_*]$, $i = 1,2$),

$$K(a, b) = H(\varkappa(\cdot, t_*, x_*, a, b))$$

на множестве $D_1^r[k_1, t_*] \times D_2^r[k_2, t_*] \subset (D_i^r[t_*] D_i^r[k_i, t_*], \; i=1, 2)$.

Рассмотрим антагонистические дифференциальные игры:

$$\Gamma_1(t_*, x_*) = \langle D_1{}^*[t_*], D_2{}^*[t_*], K\rangle$$

в классе кусочно-программных стратегий,

$$\Gamma_2(t_*, x_*) = \langle D_1{}^*[k_1, t_*], D_2{}^*[k_2, t_*], K\rangle$$

в классе кусочно-синтезирующих стратегий,

$$\Gamma_3(t_*, x_*) = \langle D_1{}^r[t_*], D_2{}^r[t_*], K\rangle$$

$$\Gamma_4(t_*, x_*) = \langle D_1{}^r[k_1, t_*], D_2{}^r[k_2, t_*], K\rangle$$

в классе рекурсивных стратегий.

По теореме 1 имеем

$$V^\Delta(t_*, x_*) = \inf_{\varphi_\Delta\in D_{1\Delta}[t_*]} \sup_{\psi^\Delta\in D_2{}^\Delta[t_*]} K(\varphi_\Delta, \psi^\Delta) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\varphi_\Delta\in D_{1\Delta}[t_*]} \sup_{\psi\in D_2{}^*[k_2, t_*]} K(\varphi^\Delta, \psi) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\varphi\in D_1{}^*[k_1, t_*]} \sup_{\psi\in D_2{}^*[k_2, t_*]} K(\varphi, \psi) \geqslant \sup_{\psi\in D_2{}^*[k_2, t_*]} \inf_{\varphi\in D_1{}^*[k_1, t_*]} K(\varphi, \psi) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\psi_\Delta\in D_{2\Delta}[t_*]} \inf_{\varphi^\Delta\in D_1{}^\Delta[t_*]} K(\varphi^\Delta, \psi_\Delta) = V_\Delta(t_*, x_*)$$

Из теорем 2, 3 вытекают неравенства

$$V^\Delta(t_*, x_*) \geqslant \inf_{a\in D_1{}^r[t_*]} \sup_{b\in D_2{}^r[t_*]} K(a, b) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{a\in D_2{}^r[t_*]} \inf_{a\in D_1{}^r[t_*]} K(a, b) \geqslant V_\Delta(t_*, x_*)$$

$$V^\Delta(t_*, x_*) \geqslant \inf_{a\in D_1{}^r[k_1, t_*]} \sup_{b\in D_1{}^r[k_2, t_*]} K(a, b) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{b\in D_2{}^r[k_2, t_*]} \inf_{a\in D_1{}^r[k_1, t_*]} K(a, b) \geqslant V_\Delta(t_*, x_*)$$

Таким образом, если

$$\inf_\Delta V^\Delta(t_*, x_*) = \sup_\Delta V_\Delta(t_*, x_*) \tag{5.1}$$

то все игры $\Gamma_k(t_*, x_*)$, $k = 1,2,3,4$, имеют значение

$$\operatorname{val}\Gamma_1(t_*, x_*) = \operatorname{val}\Gamma_k(t_*, x_*), \quad k = 2,3,4$$

Известно, что если H — равномерно непрерывный функционал на множестве $\Phi(t_*, x_*)$ (см. [10]), то для выполнения условия (5.1) достаточно потребовать, чтобы функция f в правой части уравнений движения (1.1) удовлетворяла условию: для всех $l, x \in R^n$, $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < T$

$$\inf_{v\in D_2} \sup_{u\in D_1} \int_{t_1}^{t_2} \langle l, f(t_1, x, u(s), v(s))\rangle\, ds - \tag{5.2}$$

$$- \sup_{u\in D_1} \inf_{v\in D_2} \int_{t_1}^{t_2} \langle l, f(t_1, x, u(s), v(s))\rangle\, ds \leqslant \gamma(t_2 - t_1)$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\gamma(\delta)}{\delta} = 0$$

Это условие выполняется, например, если

$$f(t, x, u, v) = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v)$$

где f_1, f_2 — непрерывные вектор-функции. Если $P(t) = U$, $Q(t) = V$ для всех $t_* \leqslant t \leqslant T$, то оно следует из условия седловой точки для маленькой игры [1].

6. Пусть имеются некоторые множества M и N в $[t_0, T] \times R^n$ и задана начальная позиция игры $\{t_*, x_*\}$. Рассмотрим следующие две задачи [6].

Задача о сближении. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найти позиционную кусочно-программную стратегию первого игрока φ_ε, такую, что для траекторий $(\varphi_\varepsilon = (\Delta(\varepsilon), \varphi_{\Delta(\varepsilon)}))$

$$x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi_\varepsilon, \psi^{\Delta(\varepsilon)}), \ \psi^{\Delta(\varepsilon)} \in D_2{}^{\Delta(\varepsilon)}[t_*]$$

выполняются соотношения

$$(6.1) \qquad \{\tau, x(\tau)\} \in M^\varepsilon, \quad \{t, x(t)\} \in N^\varepsilon, \quad t_* \leqslant t < \tau = \tau[x(\cdot)] = T$$

Задача об уклонении. Найти число $\varepsilon > 0$ и позиционную кусочно-программную стратегию второго игрока ψ_ε, такую, что исключается встреча (6.1) для всех траекторий $(\psi_\varepsilon = (\Delta(\varepsilon), \psi_{\Delta(\varepsilon)}))$

$$x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi^{\Delta(\varepsilon)}, \psi_\varepsilon), \quad \varphi^{\Delta(\varepsilon)} \in D_1{}^{\Delta(\varepsilon)}[t_*]$$

Справедлива следующая теорема об альтернативе [1,2,6,10].

Теорема 4. Если выполняется условие (5.2), то для любой позиции $\{t_*, x_*\}$ разрешима либо задача о сближении, либо задача об уклонении.

В задаче сближения первый игрок, а в задаче уклонения второй игрок применяют верхние Δ-стратегии. Они могут использовать даже прошлые реализации управлений обоих игроков. Это вызвано тем, что игрок-союзник не может накладывать какие-либо ограничения на информированность противника [1]. Теоремы 1—3 показывают, что теорема 4 об альтернативе останется справедливой, если разрешить противнику использовать рекурсивные [8], кусочно-синтезирующие или глобальные стратегии [9].

Поступила 13 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
3. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Изд-во ЛГУ, 1977.
4. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
5. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
6. *Томский Г. В.* Задачи о сближении-уклонении в квазидинамических системах. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
7. *Томский Г. В.* Существование значения в полудинамических играх. Матем. заметки, 1977, т. 22, вып. 3.
8. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
9. *Кун Л. А., Пронозин Ю. Ф.* О дифференциальных играх. I. Автоматика и телемеханика, 1971, № 5.
10. *Томский Г. В.* Антагонистические игры в динамических системах по Калману. В сб.: Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения, вып. 2. Изд. Якутск. ун-та, 1977.