Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 62—50

ОБ l_∞-УБЕГАНИИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

П. Б. Гусятников, Е. З. Мохонько

(Москва)

Для линейной дифференциальной игры многих лиц с интегральными ограничениями приводятся критерии гарантированного уклонения от встречи с оценкой, не стремящейся к нулю при $t \to +\infty$. Доказана возможность l-убегания и l_∞-убегания в широком классе линейных дифференциальных игр. Работа примыкает к исследованиям [1-8].

1. Пусть движение вектора z в n-мерном евклидовом пространстве R описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dz / dt = Cz - u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь C — постоянная квадратная матрица порядка n, $u = u(t)$ — управляющий вектор преследователя U, $v = v(t)$ — управляющий вектор убегающего V, P, и Q — линейные подпространства в R, $\dim Q \geqslant 3$. Управлениями игроков (соответственно убегающего и преследователя) назовем всюду конечные измеримые вектор-функции $v(t)$ и $u(t)$, суммируемые с квадратом модуля на каждом конечном отрезке и удовлетворяющие при каждом $t \geqslant 0$ соотношениям

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leqslant \rho^2, \quad \int_0^t |v(s)|^2 ds \leqslant \sigma^2 \tag{1.2}$$

$$u(t) \in P, \quad v(t) \in Q, \quad \rho = \text{const} > 0, \quad \sigma = \text{const} > 0$$

Пусть в R задано терминальное множество M, являющееся объединением линейных подпространств M_i $(i = 1, \ldots, m)$. Цель преследователя — привести точку $z(t)$ на терминальное множество M, цель убегающего —гарантировать уклонение от множества M.

Будем говорить [1], что всеми перечисленными данными описана дифференциальная игра (1.1) многих лиц с интегральными ограничениями.

Определение. Будем говорить, что в игре (1.1) возможно l_∞-убегание, если для любого начального состояния $z_0 = z(0) \in R \setminus M$ убегающий по любому управлению преследователя $u^* = \{u(t),\ t \geqslant 0\}$ может так построить свое управление $v^* = \{v(t),\ t \geqslant 0\}$, зная все данные, описывающие игру (1.1), и значения $z(s)$, $s \in [0, t]$ и $u(t)$ в каждый момент времени t, чтобы при $t \geqslant 0$ обеспечить оценку

$$\rho(z(t)) \geqslant l(t) \tag{1.3}$$

где $l(t) > 0$ $(t \in (0, +\infty))$ — зависящая только от игры (1.1) и не зависящая от z_0 функция, такая, что $l(t) \to \infty$, $t \to +\infty$; $\rho(z) = \operatorname{dist}(z, M)$ — расстояние от точки z до множества M.

Оценку типа (1.3) называем гарантированной оценкой. Если для игры (1.1) существуют числа $l > 0$ и $\theta > 0$, такие, что при наличии оценки (1.3)

(1.4) $\quad l(t) \geqslant l, \quad t \geqslant \theta$

то говорим, что имеет место l-убегание.

Для проблемы l-убегания, поставленной в [2], получены необходимые и достаточные условия [3, 4] для стационарных дифференциальных игр с геометрическими ограничениями. Для игр многих лиц с интегральными ограничениями первая гарантированная оценка получена в [5] (в [5] в общем случае $l(t) \to 0$, $t \to +\infty$, а проблема l-убегания еще не решена).

В данной работе для достаточно широкого класса линейных дифференциальных игр доказано, что при выполнении условий 1—4 (см. ниже п. 2) возможно l_∞-убегание и, как очевидное следствие, l-убегание (l_∞-убегание соответствует возможности гарантировать убегающему уклонение от терминального множества на любое наперед заданное расстояние l, т. е. такому l-убеганию, в котором число l уже не зависит от игры (1.1)).

Обозначим через L_i ортогональное дополнение к M_i в R. Предположим, что $\dim L_i \geqslant 3$ $(i = 1, \ldots, m)$ и зафиксируем трехмерные подпространства $W_i \subset L_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и трехмерное подпространство $Q^* \subset Q$. Обозначим через π_i $(i = 1, \ldots, m)$, π_* и π^* операторы ортогонального проектирования из R соответственно на W_i, P, Q^*, через $\Phi(r)$ — матрицу e^{rC}, через $\| B \|$ — норму линейного оператора B, через K — единичную сферу в Q^*.

2. Сформулируем условия убегания.

Условие 1. Все собственные числа матрицы C вещественные.

Условие 2. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ существуют невырожденные постоянные линейные операторы A_i, действующие из Q^* на W_i, и непрерывные неотрицательные на $[0, +\infty)$ функции $\delta_i(t) \geqslant 0$, такие, что

(2.1) $\quad \pi_i \Phi(t) \pi^* \equiv \delta_i(t) A_i \pi^*$

Известно [6], что в этом случае каждая из функций $\delta_i(t)$ — квазимногочлен

(2.2) $$\delta_i(t) = e^{\lambda_1^i t} P_1^i(t) + \ldots + e^{\lambda_{r_i}^i t} P_{r_i}^i(t) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

в котором $\lambda_1^i > \lambda_2^i > \ldots > \lambda_{r_i}^i$ — собственные числа матрицы C, а степень каждого из многочленов $P_j^i(t)$ на единицу (или более) меньше кратности собственного значения λ_j^i.

Условие 3. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ у квазимногочлена $\delta_i(t)$, даваемого условием 2, $\lambda_1^i \geqslant 0$.

Положим

$$\gamma_i(r) = \| A_i^{-1} \pi_i \Phi(r) \pi_* \|, \quad r \geqslant 0, \qquad H_i(t, z) = A_i^{-1} \pi_i \Phi(t) z,$$
$$t \geqslant 0, \quad z \in R$$

Лемма 1 [7]. Если у квазимногочлена $h(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \ldots + e^{\lambda_k t} P_k(t)$ все λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ вещественны, а степени каждого из многочленов $P_i(t)$ равны соответственно s_i $(i = 1, \ldots, k)$, то $h(t)$ имеет на вещественной оси не более $k - 1 + s_1 + \ldots + s_k$ нулей.

В силу этой леммы и условия 1 для каждого $i = 1, \ldots, m$ существует число $N_i \leqslant n$, такое, что количество нулей скалярной функции $(e \cdot H_i(t, z))$ при фиксированных $z \in R$ и $e \in K$ на полуоси $t \in [0, +\infty)$ не превосходит N_i (для доказательства достаточно заметить, что $(e \cdot H_i(t, z))$ — квазимногочлен типа (2.2)).

Лемма 2 (ср. лемму 1 в [1]). Для любого фиксированного $z \in R$ существует вектор $e(z) \in K$, такой, что для всех вещественных λ

$$|H_i(t, z) - \lambda e(z)| \geqslant |\lambda| / \Gamma(N_1, \ldots, N_m), \quad i = 1, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty) \tag{2.3}$$

$$\sqrt{3}\, \Gamma(N_1, \ldots, N_m) = 18 \sum_{i=1}^{m} N_i + 22$$

Условие 4.

$$\max_{i=1,\ldots,m} \sup_{r \in [0, +\infty)} \gamma_i(r) \Gamma(N_1, \ldots, N_m) / \delta_i(r) = \mu \in \left(0, \frac{\sigma}{\rho}\right) \tag{2.4}$$

Пусть

$$\omega(t) = (1 + t)^{-1}, \quad t \geqslant 0, \quad L_i(t) = \int_0^t \delta_i(t - s)\, \omega(s)\, ds,$$

$$L(t) = \min\{L_1(t), \ldots, L_m(t)\}$$

Лемма 3. Если выполнено условие 3, то $L(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что $L_1(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Пусть q — степень многочлена $P_1^1(t)$, т. е. $P_1^1(t) = A_0^* t^q + \ldots + A_q^*$. Поскольку $\lambda_1^1 > \lambda_2^1 > \ldots > \lambda_{r_1}^1$, то $\delta_1(t)\, [A_0^* t^q e^{\lambda_1^1 t}]^{-1} \to 1$ при $t \to +\infty$. Следовательно, $A_0^* > 0$ и существует такое $t_1 \geqslant 1$, что при всех $t \geqslant t_1$ выполнено неравенство

$$\delta_1(t) \geqslant {}^1/_2 A_0^* t^q e^{\lambda_1^1 t} \geqslant {}^1/_2 A_0^*$$

(в последнем неравенстве мы использовали тот факт, что $\lambda_1^1 \geqslant 0$).

При $t \geqslant t_1$ имеем

$$L_1(t) \geqslant \int_0^{t - t_1} \frac{\delta_1(t - s)}{1 + s}\, ds \geqslant \frac{A_0^*}{2} \int_0^{t - t_1} \frac{ds}{1 + s} \to +\infty, \quad t \to +\infty$$

3. *Теорема.* Пусть для игры (1.1) выполнены условия 1—4. Тогда в игре (1.1) возможно l_∞-убегание.

Доказательство. По формуле Коши имеем

$$\pi_i z(t) = \pi_i \Phi(t) z_0 + \int_0^t \pi_i \Phi(t - s)\, [v(s) - u(s)]\, ds =$$

$$= A_i H_i(t, z_0) + \int_0^t \delta_i(t - s) A_i v(s)\, ds - \int_0^t \pi_i \Phi(t - s)\, u(s)\, ds$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор A_i^{-1}, получим

(3.1) $$|A_i^{-1}\pi_i z(t)| \geqslant |H_i(t, z_0) + \int_0^t \delta_i(t-s)v(s)\,ds| - \int_0^t \gamma_i(t-s)|u(s)|\,ds$$

Пусть постоянная $\Delta > 0$ такова, что

(3.2) $$\mu = \sigma / (\rho + \Delta)$$

По лемме 2 существует вектор $e_0 = e(z_0)$, такой, что для всех $i=1, \ldots, m$ справедлива оценка (2.3) (при $z = z_0$).

Положим

$$v(s) = -\mu e_0 (|u(s)| + \Delta\omega(s)), \quad s \geqslant 0$$

Тогда для любого управления u^* игрока U

(3.3) $$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leqslant \mu^2 \left[\left(\int_0^t |u(s)|^2 ds\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \Delta\left(\int_0^t \frac{ds}{(1+s)^2}\right)^{1/2}\right]^2 \leqslant \mu^2(\rho+\Delta)^2 = \sigma^2$$

так что интегральное ограничение выполнено.

Кроме того, в силу (2.3), (2.4)

$$\left|H_i(t, z_0) + \int_0^t \delta_i(t-s)v(s)\,ds\right| \geqslant \frac{\mu}{\Gamma(N_1, \ldots, N_m)}\left\{\int_0^t \delta_i(t-s)|u(s)|\,ds + \right.$$

$$\left. + \Delta L_i(t)\right\} \geqslant \int_0^t \gamma_i(t-s)|u(s)|\,ds + \frac{\mu\Delta}{\Gamma(N_1, \ldots, N_m)} L_i(t)$$

Поэтому неравенство (3.1) дает оценку

$$|\pi_i z(t)| \geqslant |A_i^{-1}\pi_i z(t)|\,\|A_i^{-1}\|^{-1} \geqslant l(t), \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$l(t) = \frac{\mu\Delta L(t)}{\Gamma(N_1, \ldots, N_m) \max\limits_{i=1,\ldots,m} \|A_i^{-1}\|} \to +\infty, \quad t \to +\infty$$

в силу леммы 3. Теорема доказана.

4. Рассмотрим в качестве примера задачу убегания одного преследуемого объекта y, закон движения которого задан линейным векторным дифференциальным уравнением

(4.1) $$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = v$$

от m преследующих объектов x_i $(i = 1, \ldots, m)$, закон движения каждого из которых задается уравнением

(4.2) $$x_i^{(k_i)} + b_1^i x_i^{(k_i-1)} + \ldots + b_{k_i}^i x_i = u_i$$

В формулах (4.1), (4.2) a_j $(j = 1, \ldots, k)$, b_j^i $(j = 1, \ldots, k_i,\ i = 1, \ldots, m)$ — действительные числа, v, u_i, y, x_i — ν-мерные векторы евклидова пространства E $(\dim E = \nu \geqslant 3)$, u_i и v — управляющие параметры, подчиненные ограничению (для каждого $t \geqslant 0$)

(4.3) $$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leqslant \sigma^2; \quad \int_0^t |u_i(s)|^2 ds \leqslant \rho_i^2$$

$$(\sigma = \text{const} > 0, \quad \rho_i = \text{const} > 0 \quad (i = 1, \ldots, m))$$

Преследование считается законченным, когда

$$\rho(t) = \min_{i=1,\ldots,m} |x_i(t) - y(t)| = 0$$

Проверим условия 1—4 для задачи (4.1) — (4.3).

Обозначим через $\delta(t)$ решение однородного скалярного дифференциального уравнения

(4.4) $$\delta^{(k)} + a_1 b^{(k-1)} + \ldots + a_k\delta = 0$$

с начальным условием

(4.5) $$\delta(0) = \delta'(0) = \ldots = \delta^{(k-2)}(0) = 0, \quad \delta^{(k-1)}(0) = 1$$

Через $\gamma_i(t)$ обозначим решение уравнения

(4.6) $$\gamma^{(k_i)} + b_1^i \gamma^{(k_i-1)} + \ldots + b_{k_i}^i\gamma = 0$$

(4.7) $$\gamma_i(0) = \gamma_i'(0) = \ldots = \gamma_i^{(k_i-2)}(0) = 0, \quad \gamma_i^{(k_i-1)}(0) = 1$$

Сводя задачу (4.1) — (4.3) стандартным способом (см. [8]) к линейной игре (1.1), получаем, что условие 1 принимает вид

Условие 1*. Все собственные числа уравнений (4.4), (4.6) действительны.

Известно [6], что в этом случае функция $\delta(t)$ не обращается в нуль на $(0, +\infty)$, условие 2 автоматически выполнено, причем $\delta_i(t) \equiv |\delta(t)|$ $(i = 1, \ldots, m)$, а преобразование A_i с точностью до знака совпадает с тождественным. Наконец, функция $\gamma_i(t)$, введенная в п. 2, совпадает с модулем только что введенной функции $\gamma_i(t)$. Скалярная функция $(e \cdot H_i(t, z_0))$ является разностью решений соответственно дифференциального уравнения (4.4) и одного из уравнений (4.6), в связи с чем по лемме 1 она имеет не более $k + k_i - 1 = N_i$ нулей. Условия 3 и 4 превращаются в следующие.

Условие 2*. Одно из собственных чисел уравнения (4.4) неотрицательно.

Условие 3*.

$$\max_{i=1,\ldots,m} \sup_{r \in (0,+\infty)} \left|\frac{\gamma_i(r)}{\delta(r)}\right| \Gamma(N_1, \ldots, N_m) = \mu \in \left(0, \frac{\sigma}{\rho}\right);$$

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^m \rho_i^2\right)^{1/2}$$

Приведем простой критерий, обеспечивающий конечность числа μ (и, следовательно, гарантирующий, при выполнении условий 1*, 2*, возможность l_∞-убегания при достаточно большом отношении δ/ρ).

Лемма 4. Пусть $k \leqslant k_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и пусть для каждого i наибольшее собственное значение уравнения (4.6) не превосходит наибольшего собственного значения уравнения (4.4) (а в случае их совпадения — кратность первого не превосходит кратности второго). Тогда $\mu < +\infty$.

Вычисление постоянной μ для аналога контрольного примера Л. С. Понтрягина

$x_i^{\cdot\cdot} + \alpha_i x_i^{\cdot} = u_i$ $(i = 1,\ldots, m)$, $y^{\cdot\cdot} + \beta y^{\cdot} = v$, $x_i, y, u_i, v \in E$, $\dim E \geqslant 3$, $\alpha_i > 0$, $\beta > 0$

с ограничениями (4.3) дает

$$\mu = \frac{36m + 22}{\sqrt{3}} \max_{i=1,\ldots,m} \max\{1, \beta/\alpha_i\}$$

Условия 1* и 2* проверяются тривиально.

5. Приведем пример, показывающий, что в игре с интегральными ограничениями l-убегание может и отсутствовать.

Рассмотрим задачу «мальчик и крокодил»:

$$x^{\cdot\cdot} = u, \quad \int_0^{+\infty} |u(s)|^2 ds \leqslant \rho^2, \quad y^{\cdot} = v, \quad \int_0^{+\infty} |v(s)|^2 ds \leqslant \sigma^2 \tag{5.1}$$

$$(x, y, u, v \in E, \dim E \geqslant 2)$$

с терминальным множеством, определяемым условием $x = y$. В задаче (5.1) возможно убегание [5], с оценкой типа (1.3), причем $l(t) \to 0$, $t \to +\infty$. Покажем, что в игре (5.1) невозможно l-убегание. Доказательство проведем от противного. Пусть существуют $l_0 > 0$ и такие начальные данные $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $x_0^{\cdot} = x^{\cdot}(0)$, для которых убегающий может, используя свою информацию, обеспечить неравенство

$$|x(t) - y(t)| \geqslant l_0 > 0 \tag{5.2}$$

для всех достаточно больших t (для определенности для $t \geqslant 0$). Положим

$$\chi = \rho^2\sigma^{-2}, \quad \varkappa = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - 2^{-2i-1}), \quad \varepsilon_0 = (\chi\varkappa)^{-1/2}$$

Предлагаем преследователю вести игру циклами (i-й цикл начинается в момент T_i и заканчивается в момент $T_{i+1} = T_i + \theta_i$, который является моментом начала следующего цикла; $T_1 = 0$). В начале i-го цикла преследователь определяет величины

$$\rho_i^2 = \rho^2 - \int_0^{T_i} |u(s)|^2 ds > 0, \quad \sigma_i^2 = \sigma^2 - \int_0^{T_i} |v(s)|^2 ds \geqslant 0 \tag{5.3}$$

задает длительность $\theta_i \geqslant 2\varepsilon_0$ цикла так, чтобы обеспечить неравенство

$$|r_i| \leqslant \rho_i 2^{-i-1}\varphi(\theta_i), \; r_i = y(T_i) - x(T_i) - \theta_i x^{\cdot}(T_i), \; \varphi(s) = (s+1)\log(s+1) - s \tag{5.4}$$

(при достаточно большом θ_i это, очевидно, возможно), и полагает свое управление на всем цикле равным

$$u(s) = \begin{cases} (1 + s - T_i)^{-1} r_i/\varphi(\theta_i) + \dfrac{v(s - \varepsilon_0)}{T_{i+1} - s}, & s \in [T_i + \varepsilon_0, \; T_{i+1} - \varepsilon_0] \\ (1 + s - T_i)^{-1} r_i/\varphi(\theta_i), & s \in [T_i, T_{i+1}] \setminus [T_i + \varepsilon_0, T_{i+1} - \varepsilon_0] \end{cases} \tag{5.5}$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что

$$\int_{T_{i+1} - 2\varepsilon_0}^{T_{i+1}} v(s)\, ds = q_{i+1} = y(T_{i+1}) - x(T_{i+1})$$

так, что в силу (5.2)

$$\sigma_i^2-\sigma_{i+1}^2 \geqslant \int\limits_{\tau_{i+1}-2\varepsilon_0}^{\tau_{i+1}} |v(s)|^2\, ds \geqslant |q_{i+1}|^2/(2\varepsilon_0) \geqslant \frac{l_0^2}{2\varepsilon_0} \tag{5.6}$$

Проверим, что при таком способе преследования (при условии, что убегающий соблюдает свое интегральное ограничение, что обязательно) выполнены неравенства

$$\rho_i^2 \geqslant \sigma_i^2 \omega_i \frac{2}{\varepsilon_0^2}, \quad i=1,2,\ldots, \quad \omega_i=\frac{1}{\varkappa}\prod_{j=0}^{i-1}(1-2^{-2j-1}) \tag{5.7}$$

что приведет в противоречие (5.3) и (5.6) (будем иметь $\sigma^2 \geqslant i l_0^2 (2\varepsilon_0)^{-1}$ для всех i, что абсурдно) и завершит доказательство. Действительно, при $i=1$ неравенство (5.7) очевидно. Далее рассуждаем по индукции. Если (5.7) выполнено для номера i, то по определению (5.5) и неравенству (5.4)

$$\rho_i^2-\rho_{i+1}^2 \leqslant (\rho_i 2^{-i-1}+\varepsilon_0^{-1}(\sigma_i^2-\sigma_{i+1}^2)^{1/2})^2 \leqslant \rho_i^2 2^{-2i-1}+2\varepsilon_0^{-2}(\sigma_i^2-\sigma_{i+1}^2)$$

в связи с чем

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\rho_{i+1}^2 \geqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\rho_i^2(1-2^{-2i-1})-(\sigma_i^2-\sigma_{i+1}^2) \geqslant \sigma_i^2[\omega_{i+1}-1]+\sigma_{i+1}^2 \geqslant \sigma_{i+1}^2\omega_{i+1}$$

что и требовалось (здесь использована неотрицательность выражения в квадратных скобках и неравенство $\sigma_i^2 \geqslant \sigma_{i+1}^2$).

Поступила 19 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусятников П. Б., Мезенцев А. В.* Об одной задаче убегания с интегральными ограничениями. Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 6.
2. *Гусятников П. Б.* Об l-уклонении от встречи в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
3. *Гусятников П. Б.* Об одной проблеме l-убегания, ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
4. *Гусятников П. Б.* О двух проблемах теории дифференциальных игр. Кибернетика, 1978, № 3.
5. *Гусятников П. Б., Мезенцев А. В.* Задача убегания от многих преследователей при наличии интегральных ограничений. Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 1.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
8. *Мезенцев А. В.* Об одной дифференциальной игре. Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 10.