ЛИТЕРАТУРА

1. *Суворова Ю. В., Финогенов Г. И., Машинская Г. П., Васильев А. Е.* Методика обработки кривых деформирования и ползучести органоволокнитов. Машиноведение, 1978, № 6.
2. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упругоанизотропной среды. ЖЭТФ, 1947, т. 17, вып. 9.
3. *Synge J. L.* The Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge, 1957.

НЕПРАВОМЕРНЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОНЯТИЯ ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЯХ

В. В. Марков

(Москва)

Гидрометеоиздатом в 1978 г. опубликована книга Г. И. Баренблатта «Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика», 206 стр. с предисловием акад. Я. Б. Зельдовича.

Автор не ставит себе целью дать сколько-нибудь обстоятельное изложение современного состояния каких-либо вопросов из механики, физики или техники. Цель книги — изложение математических иллюстраций для обоснования некоторых, как будет показано ниже, несостоятельных утверждений, поучений методического характера и реализации стремлений внедрить изобретенные мифы о достижениях одних авторов с умалением значения и смысла результатов других авторов. Все это производится на фоне многочисленных фактических ошибок и не адекватных существу дела рассуждений и утверждений.

Основным идейным базисом книги является попытка разделить автомодельные решения уравнений в частных производных на решения, получаемые из «наивных» соображений анализа размерности» (стр. 145) — это решения первого рода — «видимая часть айсберга» (стр. 8, 51), и на представляющиеся автору действительно важными и нетривиальными решения второго рода, которые были «явно выделены в особый класс» акад. Я. Б. Зельдовичем, выразившим восторг по поводу этой книги в предисловии, называя ее источником вдохновения.

В теории автомодельных процессов Л. И. Седовым с помощью теории размерности указаны методы, которые позволяют дать ответы на следующие вопросы:

1°. Дана постановка задачи (т. е. даны все уравнения и все дополнительные определяющие решения условия в теории или по смыслу событий, все существенные и допустимые условия в эксперименте). Будет ли рассматриваемое явление автомодельным?

2°. Какими свойствами должны обладать постановки физических задач, чтобы их решение было автомодельным?

Полезно подчеркнуть также, что в теории эти результаты обосновываются не только изучением свойств соответствующих уравнений, но и анализом явно сформулированных дополнительных условий — начальных, краевых, соотношениями на сильных и слабых разрывах и условиями других типов.

Даются также выводы о целесообразных способах обработки опытов, позволяющих получать универсальные кривые, например в неавтомодельной задаче о точечном взрыве с учетом противодавления и т. п.

На основании этой теории Л. И. Седовым дана постановка и решение большого числа новых задач, имеющих автомодельные решения. После этого им (в 1945—1946 гг.) были выделены все автомодельные решения для одномерных неустановившихся движений совершенного газа с наличием в потоке соответствующей системы сильных разрывов, движущихся, вообще, с переменными скоростями.

До работ Л. И. Седова было уже известно много автомодельных решений в различных частных вопросах. Многие из таких примеров описаны в его книге «Методы подобия и размерности в механике» (первое издание 1944 г.). Были известны также автомодельные решения для одномерных неустановившихся движений газа. Например, для задач о детонации, в частности, автомодельность задачи о сферической детонации была выявлена О. Е. Власовым еще в 1937 г. Давно известны центрированные решения Римана и Прандтля — Майера, решение задачи о диффузии прямолинейного вихря в вязкой жидкости, решение задачи Буссинеска в теории упругости, автомодельные решения в теории изотропной турбулентности и многие другие автомодельные закономерности.

К. Бехертом также изучались частные виды автомодельных решений для движений газа, которые, однако, не позволяли ставить задачи и находить их решения при наличии в потоке сильных разрывов. Для движений со сферической и цилиндрической симметрией Бехерт рассматривал только непрерывные движения при наличии баротропных политропных процессов. Для уравнений движений идеального газа с плоскими волнами он указал частные примеры решения с заданным распределением энтропии в частицах, в этих решениях скорость частиц газа зависит линейно от декартовой координаты. Свои формулы он не приложил к решению каких-либо задач.

Для полноценного применения методов теории групп в отыскании решений некоторых задач необходимо проверять не только инвариантность уравнений относительно соответствующих групп преобразований, как это делал Бехерт, но и инвариантность добавочных условий, выделяющих искомые решения, имеющие автомодельный вид. Такие действия отсутствуют в работах Бехерта.

В связи с этим не может быть и речи о *тождественности* групповых преобразований, приводимых только для уравнений и соответствующего анализа постановок задач с помощью теории размерностей.

В 1942 г. в Германии была опубликована работа Г. Гудерлея [1], в которой он рассматривал специальный вопрос о приближенном асимптотическом законе для решения поставленной им задачи об адиабатическом движении газа с переменной энтропией в частицах вблизи центра симметрии в сферическом и цилиндрическом случаях в приближении, что соответствующие асимптотические законы представляются рядами, первые члены которых по современной терминологии являются автомодельными решениями, и притом он получает только одно частное решение в каждом виде симметрии. В этой работе Гудерлея отсутствует общая характеристика физических задач, решение которых автомодельно.

К этому следует добавить, что задача, изученная Гудерлеем, не рассматривалась в работах Л. И. Седова, а все задачи, поставленные, изученные и решенные в эффективном виде Л. И. Седовым, не рассматривались в работе Гудерлея. Что касается вывода соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений и условий на скачках, то подобные выводы типичны, элементарны и не имеют принципиального значения. Соответствующие обозначения, уравнения, качественные схемы их исследований даны Л. И. Седовым в общем случае (а не в частном, как у Гудерлея) в особенно простом виде; они удобны и именно они общеприняты в мировой литературе и, в частности, повсеместно в обсуждаемой книге и в других публикациях Г. И. Баренблатта.

Важно более определенно охарактеризовать аналогичные уравнения и способ их получения в работе Гудерлея. Он рассматривает, во-первых, только частное автомодельное решение, которое в обозначениях Л. И. Седова отвечает $k = -3$, $s = 0$ и $n = \delta$, во-вторых, Гудерлей сложным путем преобразовывает одни безразмерные обыкновенные дифференциальные уравнения (7а,) (7в) и (7с) к другим тоже безразмерным дифференциальным уравнениям (13а) и (14). Очевидно, что такое преобразование не связано по своему существу с теорией размерностей, хотя Гудерлей и старается обосновать это пре-

[1] *Guderley G.* Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstösse in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. Luftfahrtforschung, 1942, Bd 19, H. 9, S. 302—313.

образование, опираясь на теорию размерностей, *и только в этом заключается применение им теории размерностей!* В результате он находит приближенно показатель автомодельности n полученного им единственного решения[1] путем математического анализа поля интегральных кривых для уравнения (13а) (для сферического случая $n = \delta = 0.717$).

Необходимо еще подчеркнуть, что автомодельный вид решения в своей задаче Гудерлей предполагает, *а не доказывает* и что он нигде *по существу не пользуется* методами теории размерностей, что его замечание о самоподобии решения представляет собой только констатацию следствия его предположений (не доказательств) о математической природе искомого главного члена приближенной асимптотики в проблеме описания отражения сферической ударной волны от центра.

Авторам важных и интересных работ, Бехерту и Гудерлею, нельзя приписать заслугу создания общей теории автомодельных явлений как в газовой динамике, так и в различных приложениях математики и физики. Многие другие авторы, решавщие частные автомодельные задачи, своим вкладом предопределили общую теорию автомодельных явлений в неменьшей степени, чем Бехерт и Гудерлей. Достаточно вспомнить работы Римана, Прандтля и Майера, Релея, Буземанна, Кармана, Буссинеска и многих других авторов.

Из сказанного выше следует, что попытки Г. И. Баренблатта решать приоритетные вопросы по своему желанию (стр. 70, 82), но вопреки фактам, совсем необоснованны, и этим иллюстрируется один из основных тезисов предлагаемой критики.

В 1945 г. К. П. Станюковичем формально, с помощью соответствующих подстановок в уравнения формул для вида искомых функций без использования методов теории размерностей (так же как и Гудерлеем) рассматривались автомодельные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа, когда энтропия в различных частицах могла иметь различные значения.

Таким образом, в газовой динамике Г. И. Баренблатт использует и обсуждает только те системы обыкновенных уравнений и только те их решения, которые уже были даны и изучены Л. И. Седовым, поэтому все решения, отвечающие подводной части «айсберга», уже содержатся в этом семействе.

Как известно, для выделения некоторого конкретного решения или целого семейства автомодельных решений с данным показателем автомодельности, когда автомодельные решения существуют, достаточно задаться размерностями определяющих параметров. В частности, размерностями существенных постоянных, показатели которых могут представляться произвольными, в том числе и трансцендентными, числами.

Совсем курьезно утверждение, содержащееся и в предисловии Я. Б. Зельдовича, что в задачах «первого рода» тип автомодельности характеризуется заданными показателями размерности, которые представляются «простыми дробями». Для опровержения этого утверждения Г. И. Баренблатту и Я. Б. Зельдовичу достаточно указать на задачу о поршне[2] с законом движения $x = kt^{\pi/4}$, $[k] = LT^{-\pi/4}$ ($\pi = 3.14...$ — известное трансцендентное число); автомодельность обеспечивается начальным условием о равенстве нулю давления в однородном, покоящемся, идеальном, совершенном газе.

Г. И. Баренблатт пытается квалифицировать как решения первого рода автомодельные решения тех задач, в которых размерности определяющих постоянных заранее даны, — это «наивные» решения, а те решения, в которых размерности определяющих

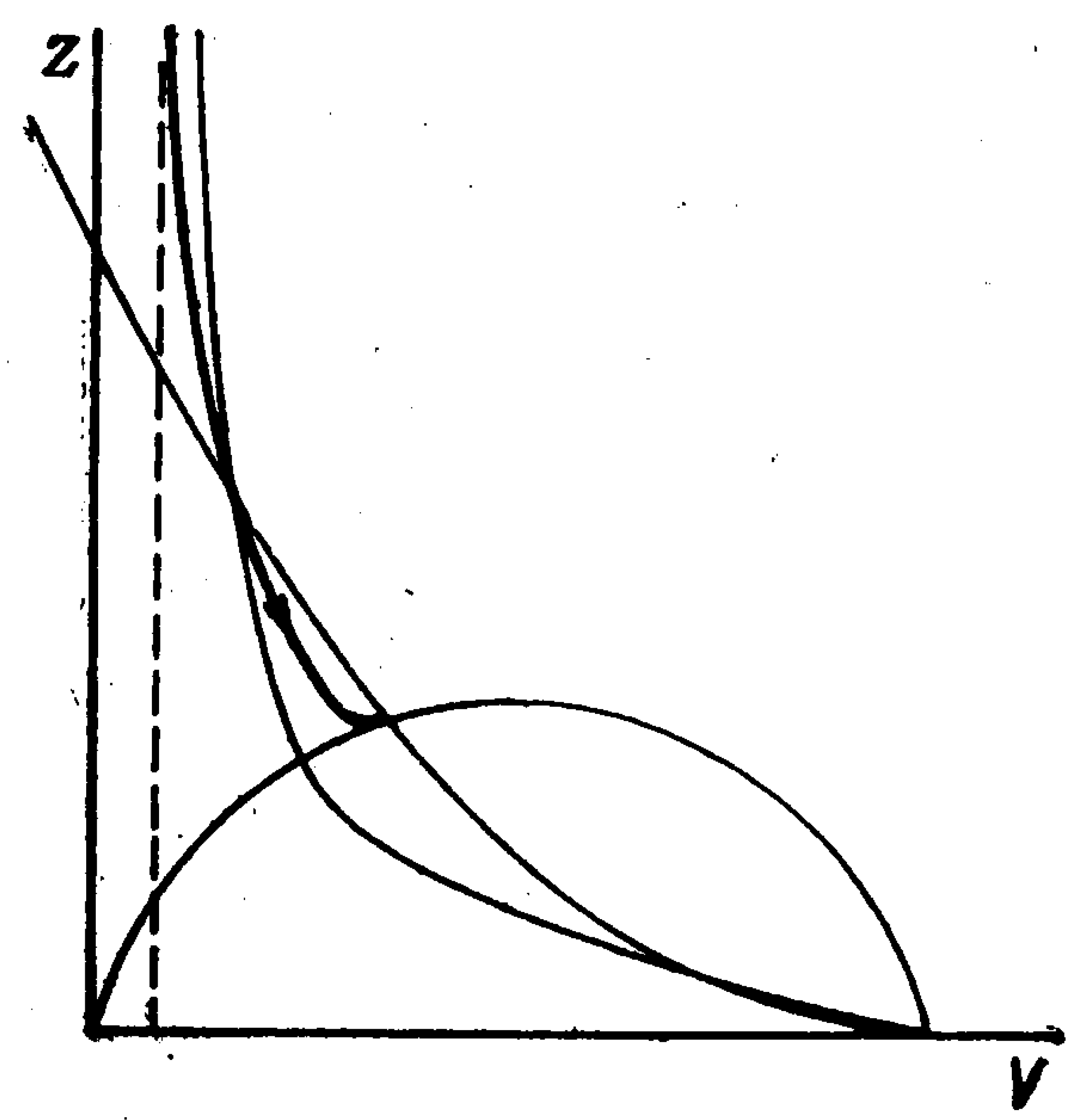
---

[1] В постановке своей частной задачи ($k = -3$, $s = 0$) Гудерлей получает для выбранного им $\varkappa$ единственное решение, но хорошо известны работы, опубликованные впоследствии, в которых изучаются многочисленные асимптотические решения о движении газа сходящегося и расходящегося типов вблизи центра симметрии, для которых предположения Гудерлея не выполняются.

[2] См. *Крашенинникова Н. Л.* О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 8; *Григорян С. С.* Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.

постоянных не задаются явно, а могут быть определены по существу из математических условий задачи, как решения «второго рода», например решения и соответствующие размерные постоянные, отвечающие «модельной» задаче об учете излучения в сильном взрыве.

Однако Г. И. Баренблатт не замечает или избегает обсуждать то, что в каждой из рассмотренных им задач «второго рода» можно также, следуя типичным примерам постановок задач о решениях первого рода, предварительно задавать самым «наивным» образом размерности определяющих постоянных и тем самым задавать значение некоторого показателя α, а затем определять отвлеченные постоянные, входящие в краевые условия, например γ_1 в задаче о взрыве с потерей энергии за счет излучения на ударной волне [1] или при выделении энергии на фронте волны типа детонации (решение Оппенгейма этой же задачи при $\gamma_1 > \gamma$, которое Г. И. Баренблатт цитирует, относится к 1970 г.), или когда отношение $\varkappa_1/\varkappa \neq 1$ в задаче о фильтрации жидкости в подземных пластах и т. п.



Таким путем легко построить функции $\gamma_1 = f(\alpha, \gamma)$ в задаче об учете излучения при взрывах или $\varkappa_1/\varkappa = F(\alpha)$ в задаче о фильтрации и в задаче о теплопроводности с разрывной теплоемкостью. После этого появляется возможность ответить на все вопросы, связанные с рассматриваемыми задачами. Замечательно, что аналогичным образом он и вынужден поступать при фактическом описании конструкции решений перечисленных выше задач, когда построение автомодельного решения производится путем подбора α, после чего дается желаемая автором переформулировка их постановки.

В связи с этим полезно еще добавить, что Г. И. Баренблатт не цитирует решение задачи о детонации с выделением энергии, пропорциональным координате фронта в некоторой степени ($Q = Q_0 r^{2m}$), что совершенно эквивалентно выделению энергии пропорционально температуре за разрывом (что равносильно $\gamma_1 > \gamma$), решенной как задача «первого рода» в 1967 г. Я. Г. Сапунковым, который благодаря своему «наивному подходу» нашел такие решения, большая часть которых была не замечена Г. И. Баренблаттом. На стр. 74 его книги «портрет» поля интегральных кривых неполон, и им упущен целый континуум значений α: $(3\gamma + 3)/(5\gamma + 3) < \alpha < 1$, $\gamma_1 = 2\gamma + 1$, соответствующих решениям о расходящихся детонационных волнах типа Чепмена — Жуге, которые были описаны Я. Г. Сапунковым [2]. На фигуре жирной линией указана соответствующая интегральная кривая, которая отсутствует на аналогичном рис. 4.3 книги.

Основной смысл этого замечания связан не столько с отсутствием ссылки на Я. Г. Сапункова, сколько с характеристикой принятого способа рассмотрения, который может приводить к потерям целых континуумов решений.

При применении указанного алгоритма с предварительно задаваемыми показателями α по определению получается, что найденное решение является решением «пер-

---

[1] Предлагаемая трактовка модельной задачи о взрыве с потерей энергии на фронте взрывной волны не может претендовать на практически удовлетворительное описание действительных явлений. Методы расчетов взрывов с учетом излучения применительно к действительным явлениям хорошо разработаны и опубликованы; они не имеют ничего общего с обсуждаемой здесь и дальше задачей, рассмотренной Г. И. Баренблаттом и Я. Б. Зельдовичем.

[2] См. *Сапунков Я. Г.* Сходящиеся детонационные волны в режиме Чепмена — Жуге в среде с переменной и постоянной начальными плотностями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.

вого рода» с найденными подходящими функциями $\gamma_1 = f(\alpha, \gamma)$ и $\varkappa_1/\varkappa = F(\alpha)$, но это же решение, при задании γ_1 или $\varkappa_1/\varkappa$ и искомом определяемом α, по предложению автора должно рассматриваться как решение «второго рода». Так какой же смысл в навязываемой классификации, в которой по своему существу одно и то же решение является как решением «первого рода», так и решением «второго рода»?!

Ведь таким же путем можно было бы при сильном желании ввести еще решения и «третьего рода» — это те решения, в которых размерность определяющей постоянной для асимптотического закона находится из эксперимента; например, так обстоит дело в исследованиях асимптотических законов вырождения турбулентных движений жидкости, изученных уже в 1944 г.

Очевидно, что в общем случае при построении моделей действительных явлений, происходящих в природе или в технике, всякие как «наивные», так и, наоборот, «наукообразные» предположения должны апробироваться на опыте, и в этом смысле любые постановки могут быть удовлетворительными только как приближенные при известных предположениях и для ограниченных, апробированных опытами диапазонов определяющих величин.

С такой точки зрения все автомодельные движения, имеющие отношение к действительности, должны рассматриваться как решения «третьего рода»!

Кроме сказанного, заметим явно и подчеркнем, что отыскание «собственного значения» показателя α требует опереться на дополнительное условие, которое должно формулироваться отдельно при постановке задачи и которое может быть различным. Например, в задаче о фильтрации или теплопроводности выставляется дополнительное условие о непрерывности искомой функции и ее первой производной в точке разрыва коэффициента $\varkappa$. Это условие имеет физическую природу. Его можно принять формально или заменить другим, физически обоснованным условием на разрыве.

Автор ссылается на С. Л. Каменомостскую, которая доказала, что рассматриваемое уравнение при условии непрерывности решения в точке разрыва коэффициента $\varkappa$ имеет единственное решение задачи Коши, но это не исключает вопроса о получении физически правильных решений, разрывных в этой точке.

Условие на разрыве может служить источником для определения α, которое может (и должно) получиться другим, чем в случае непрерывного решения. Таким образом, можно рассматривать решения с различными заданными α при наличии разрывов, характер которых определяется выбранными значениями α.

Небезынтересна история с решением задачи о «коротком ударе», уже долгое время настойчиво приписываемым Я. Б. Зельдовичу. Первая публикация, содержащая решение задачи о «коротком ударе», по-видимому, принадлежит Вейцзекеру и относится к 1954 г. Затем в 1954 и 1955 гг. были опубликованы другие немецкие работы, относящиеся к этой же автомодельной задаче.

В. Б. Адамский и Я. Б. Зельдович опубликовали в одном и том же номере, с одной и той же датой поступления в Акустический журнал, решение о «коротком ударе» в 1956 г. Такого рода совпадения результатов, полученных несколькими авторами и сразу в разных странах, часто происходят в научной жизни, но здесь парадоксально то, что это решение носит экзотический характер, соответствующее движение газа одномерное с плоскими волнами имеет бесконечную энергию и равный нулю импульс. Последние два свойства следуют тривиальным образом из теории размерности, если обратить внимание на полученную размерность определяющей постоянной. Из численного значения показателя размерности этой постоянной следует, что полная энергия и полный импульс могут равняться либо нулю, либо бесконечности. Так как энергия отлична от нуля, то она бесконечна, а так как соответствующий интеграл сходится, то импульс не равен бесконечности, поэтому он равен нулю. Вот и все доказательство, показывающее ненужность длинных рассуждений по этому поводу в работе Я. Б. Зельдовича и в книге Г. И. Баренблатта.

На стр. 46 при обсуждении метода решения задачи о сильном взрыве Г. И. Баренблатт пишет, может быть наивно, что определение главной постоянной «в принципе вполне аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче». Но сущность дела заключается в том, что предыдущая задача о сильной тепловой волне решалась Г. И. Баренблаттом и Я. Б. Зельдовичем намного позже, причем задача о тепловой волне намного проще и элементарнее.

В связи с задачей о взрыве с излучением сделаем еще следующее важное замечание. Автор доказывает, что при изменении граничного условия на ударной волне путем введения оттока энергии за счет «излучения» предельная автомодельная задача с определяющими постоянными ρ_0, E, γ и γ_1 не имеет решения, когда область, в которой выделяется энергия E, стягивается в точку [1].

В действительности из постановки предельной задачи следует, что энергия, «излучаемая» на фронте за время dt, должна представляться формулой (4.27) (см. стр. 75 или стр. 69)

$$d\varepsilon = -4\pi r_f^2 D \frac{(\gamma-\gamma_1)}{(\gamma-1)(\gamma_1-1)} \rho_0 \frac{p_f}{\rho_f} dt \tag{1}$$

Если определяющие параметры r, t, E, ρ_0 и $\xi_0 \neq 0$ (см. (4.6), стр. 67), то имеем

$$r_f = \xi_0 \left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{1/5}, \quad D = \frac{dr_f}{dt} = \frac{2}{5}\,\xi_0 \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{-3/5}$$

$$p_f = \frac{2}{\gamma_1+1}\rho_0 D^2, \quad \rho_f = \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}\rho_0$$

После подстановки этих формул в (1) получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{64\pi}{125}\frac{(\gamma-\gamma_1)}{(\gamma-1)(\gamma_1+1)^2}\xi_0^5 E \frac{1}{t}$$

Отсюда следует, что для $t \to 0$ при $\xi_0 \neq 0$ полная излучаемая энергия получается бесконечной. Если же по условию задачи выделенная энергия конечна, то это значит, что $\xi_0 = 0$, и поэтому в пределе из постановки задачи следует, что $r_f = 0$ и вся конечная энергия мгновенно излучается, а газ остается невозмущенным.

В действительности при фиксировании величины выделяемой общей энергии при взрыве и уменьшении размеров области, где выделяется энергия, доля энергии, уходящая на различного рода излучение, повышается, а возмущенное движение газа ослабляется. Этот эффект усугубляется, если принять допущение (принятое Г. И. Баренблаттом и Я. Б. Зельдовичем и неприемлемое в действительности), что излучаемая энергия не поглощается впереди фронта ударной волны.

Таким образом, предельное автомодельное движение сводится к покою, а вся энергия мгновенно излучается. Это «движение» есть решение, удовлетворяющее всем условиям поставленной задачи и, очевидно, что это решение в пределе качественно отвечает действительности.

Доказательство Г. И. Баренблатта (в книге на стр. 68, 69 и в предыдущих работах) о несуществовании решения автомодельной задачи ошибочно, так как в действительном условии на ударной волне он сократил стоящий справа и слева множитель, обращающийся в нуль.

Любопытно отметить, что на эту ошибку Г. И. Баренблатту и Я. Б. Зельдовичу было уже указано в печати в 1970 г. (см. РЖМех, 1971, 10Б, 157); эта ошибка содержалась в работах, опубликованных до реферата в реферативном журнале [2] и после этого реферата [3]).

[1] На стр. 69 четко формулируется, что «... получившееся противоречие доказывает несуществование решения нашей задачи при $\gamma_1 \neq \gamma$, имеющего форму (4.6)», и ничего не говорится о тривиальном решении, которое не только вполне разумно, но и отражает суть дела.

[2] *Г. И. Баренблатт, Г. И. Сивашинский.* Автомодельные решения второго рода в задаче о распространении сильных ударных волн. ПММ, 1970, т. 34, № 4; *Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович.* Промежуточные асимптотики в математической физике. Успехи матем. наук, 1971, т. 26, № 2.

[3] *Barenblatt G. I., Zel'dovich Ya. B.* Self-similar solutions as intermediate asymptotics. Ann. Rev. Fluid Mech., 1972, vol. 4, p. 285—312.

Несмотря на это и на известные опубликованные в печати используемые эффекты повышенного излучения с снижением механических возмущений при атомных взрывах, оба упомянутых автора не вникли в существо дела и продолжают настаивать в печати на своих ошибочных выводах. Асимптотика решений неавтомодельных задач, рассмотренных в книге, об неустановившемся движении газа с излучением на ударной волне при $\gamma_1 \neq \gamma$ и $p_0 = 0$ имеет смысл только для $x \to \infty$ и $t \to \infty$. Для неавтомодельной задачи без излучения о точечном взрыве ($p_0 \neq 0$) при $t \to \infty$ и $x \to \infty$ соответствует асимптотически решение Римана. Здесь же при наличии излучения условие $p_0 = 0$ перед ударной волной сохраняется и в асимптотическом решении при $t \to \infty$.

В книге не даются термодинамически правильные постановки физических задач: так обстоит дело с рассмотренной выше задачей о взрыве с учетом излучения и в задаче о теплопроводности с разрывным коэффициентом теплоемкости; в последнем случае внутренняя энергия среды оказывается неоднозначной функцией от аргументов: температуры T и знака $\partial T/\partial t$, введенных в постановке задачи.

В задаче о подземной фильтрации жидкости в пористой среде с плоскими волнами, хотя и учитывается сминание пористой структуры грунта, но не обращается внимание на зависимость коэффициентов фильтрации от пористости и на возможность полного сминания, при котором пористость обращается в нуль (или даже может становиться в строящихся решениях отрицательной (!)), что сильно влияет на движение фильтрующейся жидкости, которое может быть совсем непохожим на то движение, которое получено автором в рассмотренной конкретной задаче после быстрого начального отбора жидкости. Из практики известны важнейшие эффекты, обусловленные осадкой грунта и закупоркой пористых каналов, вызванные откачкой жидкости.

Тем не менее, отбрасывая сомнения о физической правомерности рассмотренных претенциозных с точки зрения практических приложений задач о теплопроводности и о фильтрации жидкости, а также и об учете излучения при сильных взрывах, можно заняться обсуждением чисто математических вопросов об отыскании и свойствах решений задач, сформулированных математически формально.

С математической точки зрения в принятой автором линейной постановке (линеаризированное уравнение, см. стр. 53 книги) его утверждение, что автомодельная задача при отборе конечной массы жидкости в точке при фильтрации не имеет решения, неверно. При сформулированной постановке получается тривиальное решение об отсутствии возмущений. Здесь дело обстоит так же, как и в рассмотренной выше задаче об учете излучения, где решение также есть, но тоже тривиальное. Тривиальные решения — это действительные и единственные решения, которые получаются как следствия принятой постановки задач, и о них нельзя говорить, что они не существуют. Больше того, можно говорить, что такие тривиальные решения отвечают действительности, если считать, что постановка предлагаемых задач в каком-то смысле приемлема.

Совсем другое дело — математический вопрос об асимптотике неавтомодельных решений и о приближении их при больших t с помощью автомодельных решений с теми же самыми математически сформулированными граничными условиями на ударной волне в задаче о взрыве с излучением или в точке разрыва коэффициента в уравнении, описывающем фильтрацию жидкости.

В этих двух математических примерах даны численные расчеты неавтомодельных задач и их сравнение с соответствующими расчетами автомодельных решений. Результаты этих расчетов показывают хорошую аппроксимацию автомодельных решений неавтомодельными с возрастанием времени. Эти результаты — лишняя демонстрация уже давно понятой с самого начала развития теорий автомодельных процессов явно сформулированной и использованной в многочисленных приложениях роли автомодельных решений как приближений для неавтомодельных решений.

В рассчитанных конкретных примерах в книге было существенно, что условия на ударной волне или условие непрерывности производных в точке разрыва $\varkappa$ (коэффициент в уравнении $\partial u/\partial t = \varkappa(\partial^2 u/\partial x^2)$) являлись определяющими для асимптотического поведения решения. Очевидно, что условия в точке разрыва $\varkappa = \lambda/c_v$ зависят от того, что терпит разрыв — λ или c_v, или то и другое.

Таким образом, в свете сделанных выше замечаний математическая трактовка рассмотренных задач не может служить поводом для обоснования каких-либо новых точек зрения на смысл автомодельных решений.

Добавим еще, что в рассмотренных задачах главный вопрос — дают ли построенные решения какую-то «промежуточную асимптотику» для действительных явлений — никак не обоснован. Численные расчеты по фильтрации жидкости в грунтах и по учету излучения при взрыве остаются без сравнения с опытом или с другими уже имеющимися более детальными и физически обоснованными теориями.

Обратимся теперь к некоторым отдельным замечаниям.

В свете бытовавших теорий весьма существенны выводы о свойствах интеграла Л. Г. Лойцянского в теории изотропной турбулентности при пренебрежении или при учете моментов третьего порядка, которые были установлены Л. И. Седовым в 1944 г. Однако это обстоятельство не цитируется и создается впечатление, что указанные результаты принадлежат самому автору книги.

Также не излагаются и не цитируются весьма обстоятельные и результативные работы А. И. Корнеева, в которых он провел подробный анализ опубликованных экспериментальных данных и установил существенное положение о согласии существующей теории с экспериментами, долгое время подвергавшееся необоснованным сомнениям.

Принимая во внимание замечания, сделанные самим автором книги по данным опытов Стюарта, и известный ему анализ опытов Стюарта, его вывод об отсутствии автомодельности для моментов третьего порядка поспешен и необоснован.

При изложении гипотез о локальной *или* полной изотропности турбулентных движений нельзя обходить имеющиеся экспериментальные данные, которые прямо противоречат таким гипотезам. В частности, получено [1], что за решетками нет *полной* изотропии, так как среднее значение продольных и поперечных пульсаций различно.

При изложении теории изотропной турбулентности с учетом моментов третьего порядка отсутствуют существующие теоретические данные о законах для коэффициентов корреляции.

Для иллюстрации стиля, принятого в книге, отметим еще некоторые характерные конкретные ошибки.

Рассматривается плоская задача о потенциальном обтекании бесконечного клина с раствором угла 2α несжимаемой идеальной жидкостью, занимающей все пространство вне клина, «потоком со скоростью U на бесконечности», направленной по оси клина. При введении полярных координат r, θ с центром в вершине клина выписана система определяющих параметров U, r, θ, α.

Дальше автор пытается строить кинематическое решение таким образом поставленной задачи и берется разрешать возникшее по его мнению «противоречие», однако он не отмечает и не замечает важное обстоятельство, заключающееся в том, что соответствующее движение жидкости вообще не существует при $U \neq 0$ и $U \neq \infty$. Поэтому нет никаких «противоречий».

Если же допустить, что $U = 0$, то получим покой всей массы жидкости, а получаемая асимптотика становится беспредметной. Если $U = \infty$, то асимптотическое автомодельное движение вблизи вершины не определяется однозначно без существенных дополнительных гипотез.

На стр. 34 содержится фраза «вклад вязкого сопротивления для корабля хорошо обтекаемой формы в грубом первом приближении можно считать малым». Это утверждение ошибочно, так как для кораблей с хорошо обтекаемыми формами главная часть гидродинамического сопротивления (более 80%) представляет собой сопротивление вязкого трения. В этом вопросе дело не только в ошибочности такого утверждения, но

---

[1] См. *Compte-Bellot G.*, *Corrsin S.* The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, № 4, p. 657—682. *Batchelor G. K.*, *Stewart R. W.* Anisotropy of the spectrum of turbulence at small wave-numbers. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1950, vol. 3, № 1.

ошибочна также и вся мотивировка необходимости моделирования испытания моделей кораблей по Фруду. Как известно, такое моделирование не связано с малостью сопротивления вязкого трения.

В рассуждениях на стр. 101 и 102 содержатся частные результаты, которые не позволяют утверждать вообще, что волны разрежения невозможны, хотя автор по существу такое утверждение делает.

Некоторая часть книги представляет собой компилятивное изложение материала, опубликованного в других книгах или в отдельных работах, которые Г. И. Баренблатт был заинтересован процитировать.

Сказанное выше далеко не полностью отражает все ошибки и недостатки, но полностью характеризует качество книги. Нужно отметить также, что изучение этой книги молодыми или научно незрелыми людьми может внушить им неправильное понимание проблем, существа дела, связанного с теорией автомодельных явлений, и смысла уже полученных другими авторами асимптотических закономерностей.

Настоящая статья необходима для парирования искажений в уже широко распространенных теориях, которые имеют много важных практических приложений.

Поступила 29 I 1979

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ: АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА[1]

Г. И. Баренблатт

(Москва)

В работе рассматриваются и разъясняются отдельные вопросы теории автомодельных решений.

Основными объектами критических замечаний в статье-рецензии являются: 1) разделение автомодельных решений на решения первого и второго рода,— то, что в статье-рецензии считается «основным идейным базисом книги», и 2) приоритетные вопросы: «реализации стремлений внедрить изобретенные мифы о достижениях одних авторов с умалением значения и смысла результатов других авторов». Подчеркивается (стр. 371), что именно приоритетные вопросы определяют «основной тезис предлагаемой критики». Кроме того, делаются отдельные конкретные замечания. Остановлюсь на всех этих моментах.

1. Автомодельные решения первого и второго рода. Примеры. Пусть, для определенности, система уравнений в частных производных при некоторых дополнительных (начальных, краевых и т. п.) условиях имеет единственное решение u. Его можно представить в безразмерной форме:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_m)$$

$$\Pi = \frac{u}{a_1^{p} \ldots a_k^{r}}, \quad \Pi_1 = \frac{b_1}{a_1^{p_1} \ldots a_k^{r_1}}, \ldots, \Pi_m = \frac{b_m}{a_1^{p_m} \ldots a_k^{r_m}} \tag{1}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$ — независимые переменные и постоянные параметры, входящие в уравнения и в дополнительные условия. Будем считать, что размерности величин $a_1 \ldots a_k$ независимы, а размерности величин $u, b_1, \ldots, b_m$ выражаются степенными комбинациями размерностей $a_1, \ldots, a_k$.

---

[1] По поводу статьи В. В. Маркова «Неправомерные тенденции в использовании понятия об автомодельных явлениях», являющейся рецензией на книгу [1]. В дальнейшем эта статья называется «статьей-рецензией».