ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинцбург Б. Я.* Авиационные поршневые кольца. М., Оборонгиз, 1946.
2. *Хрущов М. М., Бабичев М. А.* Исследование изнашивания металлов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. Т. 1. М., «Наука», 1965.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.

УДК 539.376

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

А. Е. Осокин, Ю. В. Суворова

(Москва)

Для приведения статических задач деформирования твердых тел к интегральным уравнениям необходимо построить функцию Грина, описывающую реакцию рассматриваемой среды на сосредоточенное единичное воздействие.

Рассмотрим анизотропную наследственно-упругую среду с определяющим уравнением

$$\sigma_{ij}(t) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t) + b^*_{ijkl}\int_0^t \frac{\varepsilon_{kl}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \tag{1}$$

Здесь σ_{ij} — напряжения, ε_{ij} — деформации, тензоры c_{ijkl} и $b^*{}_{ijkl}$ описывают упругие и наследственные свойства деформируемого материала, t — время. Скалярный параметр α изменяется в интервале $0<\alpha<1$. Возможность учета анизотропии наследственных свойств только лишь тензором $b^*{}_{ijkl}$ обоснована, например, экспериментальными результатами [1].

При $b^*{}_{ijkl}=0$ уравнение (1) переходит в определяющее уравнение анизотропной среды без наследственности, в этом случае функция Грина построена в работах [2, 3].

Перейдем от $\sigma_{ij}(t)$ и $\varepsilon_{ij}(t)$ к их изображениям по Лапласу $\bar\sigma_{ij}(p)$ и $\bar\varepsilon_{ij}(p)$. Тогда (1) примет вид ($\Gamma(\beta)$ — гамма-функция)

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$a_{ijkl} = c_{ijkl} + b_{ijkl}p^{-\beta}, \quad b_{ijkl} = \Gamma(\beta)\, b^*_{ijkl}, \quad \beta = 1-\alpha$$

Очевидно, что для изображения функции Грина справедливо выражение, аналогичное выражению для анизотропной среды без наследственности [2, 3]

$$\bar u_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},p) = \frac{1}{8\pi^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\oint\limits_{|\zeta|=1} K_{ij}^{-1}(\zeta)\,ds, \quad K_{ij} = a_{ikjl}\zeta_k\zeta_l \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ — радиусы-векторы точек, в которых приложено воздействие и ищется реакция среды. Контур интегрирования лежит в плоскости, нормальной вектору $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Соотношение (2), хотя и решает задачу построения функции Грина наследственно-упругой среды в принципе, однако мало пригодно для практических вычислений, поскольку его обращение в такой форме возможно разве что численными методами.

Вычислим образ $\bar u_{ij}(p)$, т. е. осуществим обращение выражения (2). Обозначим

$$c_{ij} = c_{ikjl}\zeta_k\zeta_l, \quad b_{ij} = b_{ikjl}\zeta_k\zeta_l$$

$$\lambda = p^{-\beta}, \quad a_{ij} = c_{ij} + b_{ij}p^{-\beta}, \quad d_{ij} = a_{ij}^{-1}$$

Матрица d_{ij} обратна к a_{ij}, следовательно (δ_{ij} — символ Кронекера),

(3) $$d_{il}a_{lj} = \delta_{ij}$$

Ищем d_{ij} в виде ряда

(4) $$d_{ij} = d_{ij}^{(0)} + \lambda d_{ij}^{(1)} + \lambda^2 d_{ij}^{(2)} + \lambda^3 d_{ij}^{(3)} + \ldots$$

Подставляя (4) в (3) и приравнивая последовательно нулю сомножители при равных степенях λ, получим рекуррентные соотношения для вычисления матриц $d_{ij}{}^{(n)}$. В результате имеем

$$\bar{u}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \oint_{|\zeta|=1} \{d_{ij}^{(0)} + p^{-\beta} d_{ij}^{(1)} + p^{-2\beta} d_{ij}^{(2)} + \ldots\}\, ds$$

Ряд под символом контурного интегрирования сходится равномерно, если ($\|\cdot\|$ — норма матрицы)

$$|p| > \{\| d_{ij}^{(0)} \| \, \| b_{ij} \|\}^{1/\beta}$$

Полагая, что прямая, параллельная мнимой оси, вдоль которой вычисляется интеграл Меллина, проходит в области равномерной сходимости ряда, получаем искомое выражение для функции Грина

(5) $$u_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{8\pi^2 |x - y|} \left\{ D_{ij}^{(0)} + D_{ij}^{(1)} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)} + D_{ij}^{(2)} \frac{t^{1-2\alpha}}{\Gamma(2\beta)} + \right.$$
$$\left. + D_{ij}^{(3)} \frac{t^{2-3\alpha}}{\Gamma(3\beta)} + \ldots \right\}, \quad D_{ij}^{(n)} = \oint_{|\zeta|=1} d_{ij}^{(n)}(\zeta)\, ds$$

Можно убедиться в том, что ряд (5), определяющий функцию Грина, сходится равномерно по t в любом интервале $0 \leqslant t < T$, где T сколь угодно велико. Очевидно,

(6) $$\left\| D_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{ij}^{(k)} \frac{t^{k\beta-1}}{\Gamma(k\beta)} \right\| \leqslant D \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{t^{k\beta-1}}{\Gamma(k\beta)} \right\}$$
$$D = \| D_{ij}^{(0)} \|, \quad q = D \| b_{ij} \|$$

Отбросим в (6) слагаемые с отрицательными степенями t, которым соответствуют значения индекса k, удовлетворяющие неравенству $k \leqslant k_0 = [1 / \beta]$ (квадратные скобки обозначают целую часть действительного числа $1 / \beta$, полученную округлением в большую сторону; число таких слагаемых конечно). Тогда

(7) $$\sum_{k_0+1}^{\infty} \frac{q^k t^{(k\beta-1)}}{\Gamma(k\beta)} \leqslant \sum_{k_0+1}^{\infty} A_k, \quad A_k = q^k \frac{T^{(k\beta-1)}}{\Gamma(k\beta)}$$

Чтобы убедиться в сходимости ряда (7), воспользуемся асимптотическим выражением $\Gamma(k\beta)$ при больших k по формуле Стирлинга и применим признак Даламбера. Имеем

$$\frac{A_{k+2}}{A_{k+1}} \leqslant qT^\beta \frac{[k\beta / e]^{k\beta} \sqrt{k}}{[(k+1)\beta / e]^{(k+1)\beta} \sqrt{k+1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда и следует сходимость рассматриваемого ряда. Таким образом, если в точке $\mathbf{y}$ среды с определяющим уравнением (1) приложена сосредоточенная сила $F_j(t)$, то, исходя из (5), для смещения в точке $\mathbf{x}$, вызванного этой силой, получим

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ D_{ij}^{(0)} F_j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{ij}^{(k)}}{\Gamma(k\beta)} \int_0^t \tau^{k\beta-1} F_j(t-\tau)\, d\tau \right\}$$

Поступила 17 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суворова Ю. В., Финогенов Г. И., Машинская Г. П., Васильев А. Е.* Методика обработки кривых деформирования и ползучести органоволокнитов. Машиноведение, 1978, № 6.
2. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упругоанизотропной среды. ЖЭТФ, 1947, т. 17, вып. 9.
3. *Synge J. L.* The Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge, 1957.

НЕПРАВОМЕРНЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОНЯТИЯ ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЯХ

В. В. Марков

(Москва)

Гидрометеоиздатом в 1978 г. опубликована книга Г. И. Баренблатта «Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика», 206 стр. с предисловием акад. Я. Б. Зельдовича.

Автор не ставит себе целью дать сколько-нибудь обстоятельное изложение современного состояния каких-либо вопросов из механики, физики или техники. Цель книги — изложение математических иллюстраций для обоснования некоторых, как будет показано ниже, несостоятельных утверждений, поучений методического характера и реализации стремлений внедрить изобретенные мифы о достижениях одних авторов с умалением значения и смысла результатов других авторов. Все это производится на фоне многочисленных фактических ошибок и не адекватных существу дела рассуждений и утверждений.

Основным идейным базисом книги является попытка разделить автомодельные решения уравнений в частных производных на решения, получаемые из «наивных» соображений анализа размерности» (стр. 145) — это решения первого рода — «видимая часть айсберга» (стр. 8, 51), и на представляющиеся автору действительно важными и нетривиальными решения второго рода, которые были «явно выделены в особый класс» акад. Я. Б. Зельдовичем, выразившим восторг по поводу этой книги в предисловии, называя ее источником вдохновения.

В теории автомодельных процессов Л. И. Седовым с помощью теории размерности указаны методы, которые позволяют дать ответы на следующие вопросы:

1°. Дана постановка задачи (т. е. даны все уравнения и все дополнительные определяющие решения условия в теории или по смыслу событий, все существенные и допустимые условия в эксперименте). Будет ли рассматриваемое явление автомодельным?

2°. Какими свойствами должны обладать постановки физических задач, чтобы их решение было автомодельным?

Полезно подчеркнуть также, что в теории эти результаты обосновываются не только изучением свойств соответствующих уравнений, но и анализом явно сформулированных дополнительных условий — начальных, краевых, соотношениями на сильных и слабых разрывах и условиями других типов.

Даются также выводы о целесообразных способах обработки опытов, позволяющих получать универсальные кривые, например в неавтомодельной задаче о точечном взрыве с учетом противодавления и т. п.

На основании этой теории Л. И. Седовым дана постановка и решение большого числа новых задач, имеющих автомодельные решения. После этого им (в 1945—1946 гг.) были выделены все автомодельные решения для одномерных неустановившихся движений совершенного газа с наличием в потоке соответствующей системы сильных разрывов, движущихся, вообще, с переменными скоростями.