и, таким образом, формула (12) может быть представлена в виде

$$(14)\qquad \varphi_1(r,\ \theta,\ z,\ t) = \int\limits_{\theta}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta_0}\, \varphi_2(r, \theta,\ z, t,\ \theta_0)\Big|_{\theta_0=0} d\theta$$

Заметим также, что в частном случае, когда φ_0 не зависит от θ (это может быть только тогда, когда волна φ_0 возникает на ребре клина), решение φ_2 не зависит от θ_0 и $\partial\varphi_2 / \partial\theta_0 \equiv 0$. В этом случае дополнительное возмущение Φ_1 гасит падающую волну, и имеем $\varphi_1 \equiv 0$. Таким образом, в данном частном случае левые и правые части в формулах (12), (14) тождественно обращаются в нуль.

В заключение отметим, что, как можно проверить, известные решения стационарных и нестационарных задач дифракции плоских, цилиндрических и сферических волн на угле [1,3–5] удовлетворяют полученным соотношениям (11) — (14).

Поступила 7 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Хенл X.*, *Мауэ А.*, *Вестпфаль К.* Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
3. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
4. *Боровиков В. А.* О трехмерной задаче дифракции на призме. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
5. *Филиппов А. Ф.* Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.

УДК 539.383

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА ДЛЯ КОЛЬЦА, ВЛОЖЕННОГО В ЦИЛИНДР

И. Г. Горячева

(Москва)

Дается решение задачи об изгибе кольца, контактирующего с внутренней поверхностью жесткого цилиндра и перемещающегося вдоль его образующей. Принимается во внимание износ поверхностей кольца и цилиндра, интенсивность которого пропорциональна давлению. Получены точные выражения для прогиба кольца и давления на контакте в любой момент времени.

Найденное решение применимо к расчету износа поршневых колец. Одна из главных причин потери контакта кольца с цилиндром — перераспределение с течением времени давления на окружности таким образом, что на некоторых участках контакт может обеспечиваться только при наличии давления газа в полости канавки, прижимающего кольцо к цилиндру [1]. Давление на окружности кольца в произвольный момент времени зависит от средней величины давления газа, первоначальной эпюры давлений нового кольца, его упругих и геометрических характеристик и коэффициента износостойкости.

Будем считать, что скорость износа поверхностей кольца и цилиндра в любой точке $\partial u_*(\theta, t) / \partial t$ пропорциональна давлению $p(\theta, t)$ между кольцом и цилиндром

$$\frac{\partial u_*(\theta, t)}{\partial t} = kp(\theta, t), \quad k > 0$$

(k — коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально). Такая зависимость имеет место, например, при абразивном характере износа [2].

Рассмотрим задачу об изгибе кругового бруса малой кривизны, контактирующего с внутренней поверхностью жесткого цилиндра. Брус имеет форму разомкнутого кругового кольца, причем величина зазора в месте разреза незначительна. Будем считать, что в процессе перемещений кольца вдоль образующей цилиндра (во время работы поршня) происходит износ поверхностей цилиндра и кольца, в результате чего толщина кольца уменьшается. Но при определении радиального прогиба кольца $u(\theta, t)$ этими изменениями будем пренебрегать и считать, что момент инерции J остается примерно постоянным в период его работы.

При прямом изгибе круговых брусьев малой кривизны справедливо следующее уравнение [3]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial\theta^2} + \frac{u(\theta, t)}{r^2} = -\frac{M(\theta, t)}{EJ}$$

Здесь $M(\theta, t)$ — изгибающий момент в брусе, который считается положительным, если он создает сжимающие напряжения во внешних волокнах бруса, r — радиус кривизны бруса. Будем считать, что концы бруса в месте зазора ($\theta = -\pi$, $\theta = \pi$) свободны от усилий, т. е. в этих точках изгибающий момент и растягивающие силы равны нулю. Тогда изгибающий момент в произвольном сечении кольца будет создаваться сплошной нагрузкой $p(\theta, t)$, распределенной по наружной поверхности кольца и представляющей собой давление цилиндра на кольцо. Для момента $M(\theta, t)$ имеем

$$M(\theta, t) = -r^2 \int_{-\pi}^{\theta} p(\alpha, t)\sin(\theta - \alpha)\, d\alpha, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$$

Таким образом, давление $p(\theta, t)$, радиальный прогиб кольца $u(\theta, t)$ и износ его поверхности определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial\theta^2} + u(\theta, t) = \frac{r^4}{EJ}\int_{-\pi}^{\theta} p(\alpha, t)\sin(\theta - \alpha)\, d\alpha \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_*(\theta, t)}{\partial t} = kp(\theta, t), \quad u(\theta, t) = u(\theta, 0) - u_*(\theta, t) \tag{2}$$

Последнее уравнение есть условие контакта кольца с цилиндром.

Из (2) следует

$$\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial t} = -kp(\theta, t) \tag{3}$$

Дважды продифференцируем уравнение (1) по θ и результат сложим с исходным уравнением (1). Тогда получим

$$\frac{\partial^4 u(\theta, t)}{\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial\theta^2} + u(\theta, t) = \frac{r^4}{EJ}p(\theta, t) \tag{4}$$

Из (3) и (4) получим уравнение для определения прогиба кольца

$$\frac{\partial^4 u(\theta, t)}{\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial\theta^2} + u(\theta, t) + \frac{r^4}{EJk}\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial t} = 0$$

Будем решать его методом разделения переменных, представляя искомую функцию $u(\theta, t)$ в виде

$$u(\theta, t) = U(\theta)\, T(t), \quad T(0) = 1 \tag{5}$$

Для определения функций $T(t)$ и $U(\theta)$ получим уравнения

$$\frac{r^4}{EJk}\frac{dT}{dt} + \lambda^2 T = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d^4U}{\partial\theta^4} + 2\frac{d^2U}{d\theta^2} + U(1 - \lambda^2) = 0$$

из которых следует, что

(7) $$T(t) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 kEJ}{r^4} t\right)$$

$$U(\theta) = A \operatorname{sh} \Lambda^- \theta + B \operatorname{ch} \Lambda^- \theta + C \sin \Lambda^+ \theta + D \cos \Lambda^+ \theta$$

$$\Lambda^{\pm} = \sqrt{\lambda \pm 1}, \quad \lambda > 1$$

Так как решением уравнений (1) и (3) должна быть симметричная по θ функция, то

(8) $$A = C = 0$$

Определим значения коэффициентов B и D, удовлетворяя двум условиям задачи.

Первым условием служит одно из уравнений равновесия бруса — равенство нулю проекций всех внешних сил на ось x. Остальные уравнения равновесия кольца удовлетворяются тождественно в силу симметрии. Имеем

(9) $$\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta, t) \cos\theta \, d\theta = 0$$

На основании (3), (5), (7), (8) это условие можно записать в виде

$$B \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} \Lambda^- \theta \cos\theta \, d\theta + D \int_{-\pi}^{\pi} \cos \Lambda^+ \theta \cos\theta \, d\theta = 0$$

После вычисления интегралов имеем

(10) $$B \Lambda^- \operatorname{sh} \Lambda^- \pi + D \Lambda^+ \sin \Lambda^+ \pi = 0$$

Вторым условием служит условие равенства нулю момента на концах кольца в месте разреза

(11) $$M(-\pi, t) = M(\pi, t) = 0$$

Выразив момент $M(\theta, t)$ с помощью перемещений $u(\theta, t)$, получим

$$M(\theta, t) = -\frac{EJ}{r^2}\left[\frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial\theta^2} + u(\theta, t)\right]$$

Условие (11) должно выполняться для любого момента времени. При $t = 0$ с учетом последнего соотношения будем иметь

$$\left.\frac{d^2 U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} + U(\pi) = 0$$

или, принимая во внимание второе соотношение (7) и равенство (8), получим

(12) $$B \operatorname{ch} \Lambda^- \pi - D \cos \Lambda^+ \pi = 0$$

Уравнения (10) и (12) представляют собой систему двух однородных уравнений для определения коэффициентов B и D. Из условия ее нетривиальной разрешимости следует характеристическое уравнение для нахождения собственных значений

(13) $$\Lambda^+ \sin \Lambda^+ \pi \operatorname{ch} \Lambda^- \pi + \Lambda^- \cos \Lambda^+ \pi \operatorname{sh} \Lambda^- \pi = 0$$

Обозначим последовательность решений этого уравнения через $\{\lambda_n\}$, $1 < \lambda_2 < \ldots$ $\ldots < \lambda_n \ldots$. Из решения системы уравнений (10) и (12) получаем соотношение между коэффициентами B и D. Частные решения при $\lambda_n > 1$ принимают вид

(14) $$U_n(\theta) = \frac{\cos \Lambda_n^+ \pi}{\operatorname{ch} \Lambda_n^- \pi} \operatorname{ch} \Lambda_n^- \theta + \cos \Lambda_n^+ \theta$$

$$(\Lambda_n^{\pm} = \sqrt{\lambda_n \pm 1}), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Можно убедиться непосредственно, что $\lambda = 1$ не является собственным значением второго уравнения (6). В случае $\lambda < 1$ решение второго уравнения (6) с учетом четности функции $U(\theta)$ можно представить в виде

$$U(\theta) = A \cos L^+ \theta + B \cos L^- \theta \quad (L^{\pm} = \sqrt{1 \pm \lambda}) \tag{15}$$

Определим значения коэффициентов A и B. Удовлетворяя условиям (9) и (11), получим однородную систему, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$-L^+ \sin L^+\pi \cos L^-\pi + L^- \sin L^-\pi \cos L^+ \pi = 0$$

Очевидно, что $\lambda_0 = 0$ — решение этого уравнения. Второй корень этого уравнения $\lambda_1 = 0.80$ с точностью до 0.005. Частные решения, соответствующие собственным значениям λ_0, λ_1, имеют вид

$$\begin{gathered} U_0(\theta) = \cos\theta \\ U_1(\theta) = \cos L_1^+\theta + \frac{\cos L_1^+\pi}{\cos L_1^-\pi} \cos L_1^-\theta \quad (L_1^{\pm} = \sqrt{1 \pm \lambda_1}) \end{gathered} \tag{16}$$

Докажем ортогональность частных решений (14). После необходимых преобразований получим для любых $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} U_m(\theta)\, U_n(\theta)\, d\theta = \cos \Lambda_n^+ \cos \Lambda_m^+ \frac{4}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} [F(\lambda_m) - F(\lambda_n)]$$

$$(F(\lambda) = \lambda\, [\Lambda^- \operatorname{th} \Lambda^-\pi + \Lambda^+ \operatorname{tg} \Lambda^+\pi])$$

Правая часть этого равенства равна нулю в силу характеристического уравнения (13).

Аналогичным образом можно показать, что частные решения (14) ортогональны также двум оставшимся ортогональным между собой частным решениям (16) второго уравнения (6).

Таким образом, все частные решения второго уравнения (6) ортогональны между собой. Раскладывая известную функцию для начального прогиба $u(\theta, 0)$ в ряд по ортогональной системе функций (14) и (16), найдем коэффициенты A_n

$$u(\theta, 0) = A_0 \cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(\theta)$$

Тогда, принимая во внимание (5) и (7), получим выражение для радиального прогиба кольца $u(\theta, t)$ в произвольный момент времени

$$u(\theta, t) = A_0 \cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(\theta) \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 kEJ}{r^4} t\right) \tag{17}$$

Из (3) и (17) можно определить давление на окружности кольца в произвольный момент времени

$$p(\theta, t) = \frac{EJ}{r^4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n^2 U_n(\theta) \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 kEJ}{r^4} t\right) \tag{18}$$

где выражения для $U_n(\theta)$ $(n = 1, 2\ldots)$ даны формулами (14) и (16). Если представляет интерес асимптотика для давления при больших значениях времени, то достаточно ограничиться одним или несколькими членами ряда в (18).

Аналогичные результаты получены при решении одномерной задачи о контактировании изогнутой балки с полуплоскостью, которая изнашивается при перемещениях балки [4].

Поступила 27.III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинцбург Б. Я.* Авиационные поршневые кольца. М., Оборонгиз, 1946.
2. *Хрущов М. М., Бабичев М. А.* Исследование изнашивания металлов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. Т. 1. М., «Наука», 1965.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.

УДК 539.376

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

А. Е. Осокин, Ю. В. Суворова

(Москва)

Для приведения статических задач деформирования твердых тел к интегральным уравнениям необходимо построить функцию Грина, описывающую реакцию рассматриваемой среды на сосредоточенное единичное воздействие.

Рассмотрим анизотропную наследственно-упругую среду с определяющим уравнением

(1) $$\sigma_{ij}(t) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t) + b^*_{ijkl}\int_0^t \frac{\varepsilon_{kl}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

Здесь σ_{ij} — напряжения, ε_{ij} — деформации, тензоры c_{ijkl} и $b^*{}_{ijkl}$ описывают упругие и наследственные свойства деформируемого материала, t — время. Скалярный параметр α изменяется в интервале $0 < \alpha < 1$. Возможность учета анизотропии наследственных свойств только лишь тензором $b^*{}_{ijkl}$ обоснована, например, экспериментальными результатами [1].

При $b^*{}_{ijkl} = 0$ уравнение (1) переходит в определяющее уравнение анизотропной среды без наследственности, в этом случае функция Грина построена в работах [2, 3].

Перейдем от $\sigma_{ij}(t)$ и $\varepsilon_{ij}(t)$ к их изображениям по Лапласу $\bar\sigma_{ij}(p)$ и $\bar\varepsilon_{ij}(p)$. Тогда (1) примет вид ($\Gamma(\beta)$ — гамма-функция)

$$\bar\sigma_{ij} = a_{ijkl}\bar\varepsilon_{kl}$$
$$a_{ijkl} = c_{ijkl} + b_{ijkl}p^{-\beta}, \quad b_{ijkl} = \Gamma(\beta)\, b^*_{ijkl}, \quad \beta = 1-\alpha$$

Очевидно, что для изображения функции Грина справедливо выражение, аналогичное выражению для анизотропной среды без наследственности [2, 3]

(2) $$\bar u_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \frac{1}{8\pi^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\oint\limits_{|\zeta|=1} K_{ij}^{-1}(\zeta)\,ds, \quad K_{ij} = a_{ikjl}\zeta_k\zeta_l$$

Здесь $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ — радиусы-векторы точек, в которых приложено воздействие и ищется реакция среды. Контур интегрирования лежит в плоскости, нормальной вектору $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Соотношение (2), хотя и решает задачу построения функции Грина наследственно-упругой среды в принципе, однако мало пригодно для практических вычислений, поскольку его обращение в такой форме возможно разве что численными методами.

Вычислим образ $\bar u_{ij}(p)$, т. е. осуществим обращение выражения (2). Обозначим

$$c_{ij} = c_{ikjl}\zeta_k\zeta_l, \quad b_{ij} = b_{ikjl}\zeta_k\zeta_l$$
$$\lambda = p^{-\beta}, \quad a_{ij} = c_{ij} + b_{ij}p^{-\beta}, \quad d_{ij} = a_{ij}^{-1}$$