Таким образом, осталось показать, что существует θ^*, удовлетворяющее условию (8). Это доказывается следующим образом. Из каноничности системы (1) следует, что отображение $(\varphi_h^1)^{-1}$ сохраняет ориентированную площадь $\int d\xi_2 \wedge d\eta_2$, поэтому $\det A = 1$, и неравенство (8) разрешимо относительоно θ^*. Теорема доказана.

Автор благодарен М. Л. Лидову за полезные обсуждения.

Поступила 5 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moser J.* On the generalization of a theorem of A. Liapunoff. Communs Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 4.
2. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Московск. матем. о-ва, 1972, т. 26.

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИХ И АБСОЛЮТНО МЯГКИХ КЛИНОВИДНЫХ ЭКРАНОВ

В. Б. Поручиков

(Москва)

В акустике хорошо известны постановки задач дифракции для абсолютно жестких и абсолютно мягких экранов [1–3]. В данной работе получены соотношения, связывающие решения этих задач для случая клиновидных экранов. В частности, дана формула, с помощью которой из решения задачи дифракции на абсолютно жестком клине можно получить решение аналогичной задачи для абсолютно мягкого клина.

Рассмотрим дифракцию нестационарной акустической волны $\varphi = \varphi_0(r, \theta - \theta_0, z, t)$, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \gamma$ на угле раствора β, образованного полуплоскостями $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ $(\alpha = 2\pi - \beta)$, когда акустическая среда занимает область $0 < \theta < \alpha$ и на граничных полуплоскостях $\theta = 0$, α поставлено условие $\varphi = 0$ (первая задача) или $\partial\varphi / \partial\theta = 0$ (вторая задача).

Здесь r, θ, z — цилиндрическая система координат, у которой ось z совпадает с ребром угла, а φ — потенциал скорости. При этом падающая волна $\varphi_0(r, \theta - \theta_0, z, t)$ предполагается такой, что при $\theta_0 = 0$ эта волна набегает из области $0 < \theta < \alpha$. Тогда существует некоторый интервал значений θ_0: $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \gamma$ $(\gamma < \alpha)$, при которых рассматриваемая падающая волна $\varphi_0(r, \theta - \theta_0, z, t)$ также набегает из области $0 < \theta < \alpha$. Именно для этого интервала $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \gamma$ и рассматриваются данные задачи дифракции.

Если искать решения φ_1 и φ_2 первой и второй задач в виде $\varphi_1 = \Phi_1 + \varphi_0$ и $\varphi_2 = \Phi_2 + \varphi_0$, то в изображениях по Лапласу по t получаем следующие системы для определения возмущений $\overline{\Phi}_j(r, \theta, z, p, \theta_0)$ $(j = 1, 2)$:

$$(1)\qquad \Delta\overline{\Phi}_1 = p^2\overline{\Phi}_1 \quad (\Delta \equiv \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\partial / \partial r + r^{-2}\partial^2 / \partial\theta^2 + \partial^2 / \partial z^2)$$

$$\overline{\Phi}_1 = -\overline{\varphi}_0(r, \theta - \theta_0, z, p) \qquad (\theta = 0, \alpha)$$

$$\overline{\Phi}_1 \to 0 \ (r \to \infty), \quad r\partial\overline{\Phi}_1 / \partial r \to 0 \ (r \to 0)$$

$$(2)\qquad \Delta\overline{\Phi}_2 = p^2\overline{\Phi}_2$$

$$\frac{\partial\overline{\Phi}_2}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\varphi}_0(r, \theta - \theta_0, z, p) = \frac{\partial}{\partial\theta_0}\overline{\varphi}_0(r, \theta - \theta_0, z, p) \quad (\theta = 0, \alpha)$$

$$\overline{\Phi}_2 \to 0 \ (r \to \infty), \quad r\partial\overline{\Phi}_2 / \partial r \to 0 \ (r \to 0)$$

В системах (1) и (2)

$$\bar{f} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f e^{-pt} dt \quad (f = \varphi_0, \Phi_1, \Phi_2)$$

где $\operatorname{Re} p > 0$ (поскольку $f \equiv 0$ при $t < t_0 (r, \theta, z)$) и скорость звука без ограничения общности полагается равной единице. Последние условия в (1) и (2), которые предполагаются равномерными по θ, z, обеспечивают единственность решений поставленных задач [3] (условие $\bar{\Phi}_j \to 0$ при $r \to \infty$ ($j = 1,2$) исключает пока из рассмотрения те случаи падения плоских волн, когда возникают волны, отраженные от граней угла, идущие из бесконечности). Учитывая, что $\bar{\Phi}_j$ ($j = 1,2$) — аналитические функции аргументов r, θ, z в области $0 < \theta < \alpha$, продифференцируем уравнение для $\bar{\Phi}_2$ по θ и введем функцию

$$\bar{\Phi}_2' = -\int\limits_0^{\theta_0} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \theta} d\theta_0$$

Тогда для определения Φ_2' получаем из (2) (предполагая последние оценки в (2) равномерными относительно θ_0 при $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \gamma$) следующую систему:

$$\begin{aligned} &\Delta \bar{\Phi}_2' = p^2 \bar{\Phi}_2' \\ (3) \qquad &\bar{\Phi}_2' = -\bar{\varphi}_0 (r, \theta - \theta_0, z, p) + \bar{\varphi}_0 (r, \theta, z, p) \quad (\theta = 0, \alpha) \\ &\bar{\Phi}_2' \to 0 \ (r \to \infty), \ r\partial \bar{\Phi}_2' / \partial r \to 0 \ (r \to 0) \end{aligned}$$

Обращаясь к системе (1), видим, что если ввести функцию $\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_1 |_{\theta_0=0}$, то эта функция также удовлетворяет системе (3) и, следовательно, на основании единственности решения получаем

$$\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_1 |_{\theta_0=0} = \bar{\Phi}_2'$$

или

$$(4) \qquad \bar{\Phi}_1 = -\int\limits_0^{\theta_0} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \theta} d\theta_0 + \bar{\Phi}_1 |_{\theta_0=0}$$

Дифференцируя (4) по θ_0 и интегрируя по θ, получаем

$$(5) \qquad \bar{\Phi}_2 = -\int\limits_0^{\theta} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \theta_0} d\theta + \bar{\Phi}_2 \Big|_{\theta=0}$$

Аналогичным образом, пользуясь тем, что условие $\bar{\Phi}_1 = -\bar{\varphi}_0$ при $\theta = 0$, α можно заменить (с помощью уравнения $\Delta \bar{\Phi}_1 = p^2 \bar{\Phi}_1$) условием

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial \theta_0^2} \quad (\theta = 0, \alpha)$$

вводя новую функцию

$$(6) \qquad \bar{\Phi}_1' = -\int\limits_0^{\theta_0} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \theta} d\theta_0$$

получаем из (1) следующую систему для определения функции $\bar{\Phi}_1'$:

$$\begin{aligned} (7) \qquad &\Delta \bar{\Phi}_1' = p^2 \bar{\Phi}_1' \\ &\frac{\partial \bar{\Phi}_1'}{\partial \theta} = \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \theta_0} - \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \theta_0} \Big|_{\theta_0=0} \quad (\theta = 0, \alpha) \\ &\bar{\Phi}_1' \to 0 \ (r \to \infty), \ r\partial \bar{\Phi}_1' / \partial r \to 0 \ (r \to 0) \end{aligned}$$

Обращаясь к системе (2), видим, что функция $\overline{\Phi}_2 - \overline{\Phi}_2|_{\theta_0=0}$ также удовлетворяет системе (7) и, следовательно, на основании единственности решения этой системы получаем

$$\overline{\Phi}_1' = \overline{\Phi}_2 - \overline{\Phi}_2|_{\theta_0=0}$$

или

$$\overline{\Phi}_2 = -\int_0^{\theta_0} \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial \theta} d\theta_0 + \overline{\Phi}_2 \Big|_{\theta_0=0} \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по θ_0 и интегрируя по θ, получаем с учетом граничного условия

$$\overline{\Phi}_1 = -\int_0^{\theta} \frac{\partial \overline{\Phi}_2}{\partial \theta_0} d\theta - \overline{\varphi}_0 (r, -\theta_0, z, p) \tag{9}$$

Отметим, что хотя при выводе формул (4) — (9) исключались из рассмотрения случаи дифракции нестационарных плоских волн, когда из бесконечности набегали волны, отраженные от граней угла, эти случаи также описываются формулами (4) — (9), поскольку указанные случаи получаются как предельные из задач дифракции соответствующих сферических волн при удалении источников в бесконечность.

При $\theta_0 = 0$ формулы (5) и (9) дают

$$\overline{\Phi}_2 (r, \theta, z, p) = -\int_0^{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \overline{\Phi}_1 (r, \theta, z, p, \theta_0) \Big|_{\theta_0=0} d\theta + \overline{\Phi}_2 (r, 0, z, p) \tag{10}$$

$$\overline{\Phi}_1 (r, \theta, z, p) = -\int_0^{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \overline{\Phi}_2 (r, \theta, z, \theta_0) \Big|_{\theta_0=0} d\theta - \overline{\varphi}_0 (r, 0, z, p) \tag{11}$$

Здесь

$$f (r, \theta, z, p) \equiv f (r, \theta, z, p, \theta_0 |_{\theta_0=0} \quad (f = \overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \overline{\varphi}_0)$$

Из формул (10) и (11) наиболее удобна для применения формула (11), которая позволяет из решения задачи дифракции для абсолютно жесткого клиновидного экрана получить решение для абсолютно мягкого экрана той же формы.

Используя в (11) соотношения $\overline{\Phi}_j = \overline{\varphi}_j - \overline{\varphi}_0$ ($j = 1, 2$) и затем применяя к обеим частям (11) обратное преобразование Лапласа, получаем следующую формулу (в которой производная $\partial \varphi_2 / \partial \theta_0$ понимается как обобщенная):

$$\varphi_1 (r, \theta, z, t) = -\int_0^{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \varphi_2 (r, \theta, z, t, \theta_0) \Big|_{\theta_0=0} d\theta \tag{12}$$

Необходимо отметить, что формулы (11) и (12) остаются верными и в случае стационарных задач дифракции, когда зависимость от времени в (12) дается множителем $\exp (ikt)$, $\operatorname{Im} k = 0$ (при этом в формуле (11) следует положить $p = ik$).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Пусть прозвольная акустическая волна $\varphi_0 (r, \theta, z, t)$ набегает из области $0 < \theta < \alpha$ на клин раствора β, образованный полуплоскостями $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ ($\alpha = 2\pi - \beta$). Тогда решение $\varphi_1 (r, \theta, z, t)$ задачи дифракции данной волны на абсолютно мягком клине выражается через решение $\varphi_2 (r, \theta, z, t, \theta_0)$ задачи дифракции на абсолютно жестком клине падающей волны со сдвигом $\varphi_0 (r, \theta - \theta_0, z, t)$ по формуле (12) (или для изображений возмущений $\overline{\Phi}_j = \overline{\varphi}_j - \overline{\varphi}_0$ по формуле (11), в которой в стационарном случае следует полагать $p = ik$).

Как следствие данной теоремы из формулы (12) получаем

$$\int_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \varphi_2 (r, \theta, z, t, \theta_0) \Big|_{\theta_0=0} d\theta = 0 \tag{13}$$

и, таким образом, формула (12) может быть представлена в виде

$$(14)\qquad \varphi_1(r,\theta,z,t)=\int\limits_{\theta}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\varphi_2(r,\theta,z,t,\theta_0)\Big|_{\theta_0=0}d\theta$$

Заметим также, что в частном случае, когда φ_0 не зависит от θ (это может быть только тогда, когда волна φ_0 возникает на ребре клина), решение φ_2 не зависит от θ_0 и $\partial\varphi_2/\partial\theta_0\equiv 0$. В этом случае дополнительное возмущение Φ_1 гасит падающую волну, и имеем $\varphi_1\equiv 0$. Таким образом, в данном частном случае левые и правые части в формулах (12), (14) тождественно обращаются в нуль.

В заключение отметим, что, как можно проверить, известные решения стационарных и нестационарных задач дифракции плоских, цилиндрических и сферических волн на угле [1,3–5] удовлетворяют полученным соотношениям (11) — (14).

Поступила 7 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Хенл Х.*, *Мауэ А.*, *Вестпфаль К.* Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
3. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
4. *Боровиков В. А.* О трехмерной задаче дифракции на призме. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
5. *Филиппов А. Ф.* Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.

УДК 539.383

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА ДЛЯ КОЛЬЦА, ВЛОЖЕННОГО В ЦИЛИНДР

И. Г. Горячева

(Москва)

Дается решение задачи об изгибе кольца, контактирующего с внутренней поверхностью жесткого цилиндра и перемещающегося вдоль его образующей. Принимается во внимание износ поверхностей кольца и цилиндра, интенсивность которого пропорциональна давлению. Получены точные выражения для прогиба кольца и давления на контакте в любой момент времени.

Найденное решение применимо к расчету износа поршневых колец. Одна из главных причин потери контакта кольца с цилиндром — перераспределение с течением времени давления на окружности таким образом, что на некоторых участках контакт может обеспечиваться только при наличии давления газа в полости канавки, прижимающего кольцо к цилиндру [1]. Давление на окружности кольца в произвольный момент времени зависит от средней величины давления газа, первоначальной эпюры давлений нового кольца, его упругих и геометрических характеристик и коэффициента износостойкости.

Будем считать, что скорость износа поверхностей кольца и цилиндра в любой точке $\partial u_*(\theta,t)/\partial t$ пропорциональна давлению $p(\theta,t)$ между кольцом и цилиндром

$$\frac{\partial u_*(\theta,t)}{\partial t}=kp(\theta,t),\qquad k>0$$

(k — коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально). Такая зависимость имеет место, например, при абразивном характере износа [2].