УДК 531.55:521.1

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ, БЛИЗКИХ К ДВОЯКОАСИМПТОТИЧЕСКИМ

С. Л. Зиглин

(Москва)

При изучении методом численного интегрирования решений ограниченной круговой задачи трех тел, двоякоасимптотических к прямолинейным точками либрации $L_{1,2,3}$, было обнаружено, что вблизи двоякоасимптотического решения всегда имеется периодическое решение, и была поставлена проблема установления аналитической связи между такими решениями [1].

Ниже доказывается теорема, из которой следует, что в любой окрестности решения ограниченной круговой задачи трех тел, двоякоасимптотического к прямолинейной точке либрации, имеется периодическое решение.

Пусть U — область в четырехмерном пространстве R^4 с координатами x_1, x_2, y_1, y_2. Рассмотрим в U гамильтонову систему

$$x_\nu^{\cdot} = H_{y_\nu},\quad y_\nu^{\cdot} = -H_{x_\nu}\ (\nu = 1,\ 2) \tag{1}$$

с вещественно-аналитической функцией Гамильтона $H(z)$, $z = (x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Предположим, что:

система (1) имеет неподвижную точку z_0 (т. е. $\operatorname{grad} H(z_0) = 0$);

матрица системы, линеаризованной около точки z_0, имеет собственные числа $\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2 i, -\alpha_2 i$, где $\alpha_{1,2} > 0$, $i = \sqrt{-1}$;

система (1) имеет двоякоасимптотическое решение $z^*(t)$: $\lim z^*(t) = z_0$ при $t \to \pm\infty$.

Теорема. В любой окрестности решения $z^*(t)$ в фазовом пространстве U существует периодическое решение системы (1).

Доказательство. По теореме Мозера (см. [1, 2]) в достаточно малой окрестности точки z_0 существует вещественно-аналитическая, каноническая замена переменных

$$z = \Phi(\zeta),\quad \zeta = (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2),\quad \Phi(0) = z_0$$

приводящая (1) к нормальной форме

$$\xi_\nu^{\cdot} = F_{\eta_\nu},\quad \eta_\nu^{\cdot} = -F_{\xi_\nu}\quad (\nu = 1, 2) \tag{2}$$

$$F(\zeta) = H(\Phi(\zeta)) - H(z_0) = F(\omega_1, \omega_2) = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \ldots$$

$$\omega_1 = \xi_1\eta_1,\quad \omega_2 = {}^1/_2(\xi_2^2 + \eta_2^2)$$

Система (2) интегрируется. Имеем

$$\omega_\nu = \omega_\nu^\circ = \mathrm{const}\ \ (\nu = 1, 2) \tag{3}$$

$$\xi_1 = \xi_1^\circ \exp[a_1(\omega^\circ)t],\qquad \xi_2 = \xi_2^\circ \cos a_2(\omega^\circ)t + \eta_2^\circ \sin a_2(\omega^\circ)t$$

$$\eta_1 = \eta_1^\circ \exp[-a_1(\omega^\circ)t],\qquad \eta_2 = -\xi_2^\circ \sin a_2(\omega^\circ)t + \eta_2^\circ \cos a_2(\omega^\circ)t$$

$$a_\nu(\omega^\circ) = F_{\omega_\nu}(\omega^\circ),\quad \omega^\circ = (\omega_1^\circ, \omega_2^\circ)$$

Существование двоякоасимптотического решения $z^*(t)$ означает, что некоторая точка $z_1 = \Phi(\zeta_1)$, $\zeta_1 = (\xi_1^*, 0, 0, 0)$, $\xi_1^* \neq 0$ под действием фазового потока переходит в некоторую точку $z_2 = \Phi(\zeta_2)$, $\zeta_2 = (0, \eta_1^*, 0, 0)$, $\eta_1^* \neq 0$. При этом $|\xi_1^*|$, $|\eta_1^*|$ можно взять сколь угодно малыми.

[1] См. *Лидов М. Л., Вашковьяк М. А.* Двоякоасимптотические симметричные орбиты в плоской ограниченной круговой задаче трех тел. М., 1975. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 115. Решение называется двоякоасимптотическим к неподвижной точке, если оно стремится к ней при $t \to \pm\infty$.

Пусть $|\xi_1^*| \neq 0$ достаточно мало. Тогда $F_{\eta_1}(\zeta_1) = \alpha_1\xi_1^* + O(\xi_1^{*2}) \neq 0$ и по теореме о неявной функции в окрестности точки z_1 можно перейти от координат ζ к координатам $\xi_1, \xi_2, \eta_2, \chi = F(\zeta) = H(z) - H(z_0)$. Аналогично при достаточно малом $|\eta_1^*| \neq 0$ в окрестности точки z_2 можно перейти от координат ζ к координатам $\xi_2, \eta_1, \eta_2, \chi$.

Рассмотрим отображение $\varphi_h{}^1$ двумерной площадки $S_h{}^1 : \{\xi_1 = \xi_1^*, \chi = h\}$ с координатами ξ_2, η_2 в двумерную площадку $S_h{}^2 : \{\eta_1 = \eta_1^*, \chi = h\}$ с координатами ξ_2, η_2 под действием фазового потока. Обозначим $(\xi_2, \eta_2) = x$. Стандартными рассуждениями доказывается, что отображение $\varphi_h{}^1(x)$ аналитично по h, x при достаточно малых $|h|$, $|x|$; $\varphi_0{}^1(0) = 0$.

С другой стороны, в круге $D_h : \{\omega_2 < c\,|h|\}$, где $c > 0$ достаточно мало, при достаточно малых $|h| \neq 0$, таких, что $\operatorname{sign} h = \varkappa = \operatorname{sign}(\xi_1^*\eta_1^*)$, определено отображение $\varphi_h{}^2 : D_h \to S_h{}^1$ по формулам (3)

$$\varphi_h{}^2 \begin{Vmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi_2 \cos\theta(h, \omega_2) + \eta_2 \sin\theta(h, \omega_2) \\ -\xi_2 \sin\theta(h, \omega_2) + \eta_2 \cos\theta(h, \omega_2) \end{Vmatrix}$$

$$\theta(h, \omega_2) = \frac{a_2(\omega_1(h, \omega_2), \omega_2)}{a_1(\omega_1(h, \omega_2), \omega_2)} \ln \frac{\xi_1^*\eta_1^*}{\omega_1(h, \omega_2)}$$

$\omega_1(h, \omega_2) = h / \alpha_1 + O(h^2 + \omega_2)$ — решение уравнения $F(\omega_1, \omega_2) = h$ относительно ω_1 при малых $|\omega_1|$, $|h|$, $|\omega_2|$, аналитичное в окрестности $h = \omega_2 = 0$.

Таким образом, при достаточно малых $|h| \neq 0$, $\varkappa h > 0$ получаем отображение $\varphi_h = \varphi_h{}^1\varphi_h{}^2 : D_h \to D_h$. Неподвижным точкам

$$\varphi_h(x) = \varphi_h{}^1\varphi_h{}^2(x) = x \tag{4}$$

этого отображения соответствуют периодические решения системы (1). Для доказательства теоремы достаточно построить последовательность $\{h_n\} \to 0$, такую, что соответствующая последовательность решений уравнения (4) $\{x_n = x(h_n)\} \to 0$.

Будем рассматривать вместо уравнения (4) эквивалентное ему уравнение

$$\varphi_h{}^2(x) = (\varphi_h{}^1)^{-1}(x) \tag{5}$$

Замена $x = \varepsilon\bar{x}$, $h = \varkappa\varepsilon^2$ приводит уравнение (5) к виду

$$\Psi(\bar{x}, \varepsilon) = f(\bar{x}, \varepsilon, \theta(\varepsilon), \mu(\varepsilon)) = 0 \tag{6}$$

$$\theta(\varepsilon) = \theta(\varkappa\varepsilon^2, 0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \ln \frac{|\xi_1^*\eta_1^*|\,\alpha_1}{\varepsilon^2} \to \infty, \quad \varepsilon \to 0$$

$$\mu(\varepsilon) = \varepsilon^2\theta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

Здесь функция $f(\bar{x}, \varepsilon, \theta, \mu)$ аналитична по $\bar{x}, \varepsilon, \theta, \mu$ при достаточно малых $|\bar{x}|$, $|\varepsilon|$, $|\mu|$ и 2π-периодична по θ

$$f(0, 0, \theta, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(0, 0, \theta, 0) = \begin{Vmatrix} \cos\theta - a_{11} & \sin\theta - a_{12} \\ -\sin\theta - a_{21} & \cos\theta - a_{22} \end{Vmatrix}$$

где $(a_{ij}) = A$ — матрица линейной части отображения $(\varphi_0{}^1)^{-1}$ в точке $x = 0$.

При фиксированном $\theta(\varepsilon) \pmod{2\pi} = \theta^*$ уравнение (6) можно записать в виде системы

$$f(\bar{x}, \varepsilon, \theta^*, \mu) = 0, \quad \theta(\varepsilon) = \theta^* \pmod{2\pi}, \ \mu = \mu(\varepsilon) \tag{7}$$

Предположим, что

$$\det \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(0, 0, \theta^*, 0) = 1 + \det A - \cos\theta^*(a_{11} + a_{22}) - \sin\theta^*(a_{12} - a_{21}) \neq 0 \tag{8}$$

Тогда первое уравнение системы (7) при достаточно малых $|\bar{x}|$, $|\varepsilon|$, $|\mu|$ однозначно и аналитически разрешимо относительно $\bar{x}$: $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon, \mu) = O(|\varepsilon| + |\mu|)$. Выбирая последовательность $\{\varepsilon_n\} \to 0$, удовлетворяющую второму уравнению системы (7), $\mu = \mu(\varepsilon_n)$, получаем последовательность решений системы (7): $\{\bar{x}_n = \bar{x}(\varepsilon_n, \mu(\varepsilon_n))\} \to 0$. Отсюда получаем, что последовательности $\{h_n = \varkappa\varepsilon_n{}^2\} \to 0$ соответствует последовательность решений уравнения (5) $\{x_n = x(h_n) = \varepsilon_n\bar{x}_n\} \to 0$, что и требовалось.

Таким образом, осталось показать, что существует θ^*, удовлетворяющее условию (8). Это доказывается следующим образом. Из каноничности системы (1) следует, что отображение $(\varphi_h{}^1)^{-1}$ сохраняет ориентированную площадь $\int d\xi_2 \wedge d\eta_2$, поэтому $\det A = 1$, и неравенство (8) разрешимо относительоно θ^*. Теорема доказана.

Автор благодарен М. Л. Лидову за полезные обсуждения.

Поступила 5 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moser J.* On the generalization of a theorem of A. Liapunoff. Communs Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 4.
2. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Московск. матем. о-ва, 1972, т. 26.

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИХ И АБСОЛЮТНО МЯГКИХ КЛИНОВИДНЫХ ЭКРАНОВ

В. Б. Поручиков

(Москва)

В акустике хорошо известны постановки задач дифракции для абсолютно жестких и абсолютно мягких экранов [1–3]. В данной работе получены соотношения, связывающие решения этих задач для случая клиновидных экранов. В частности, дана формула, с помощью которой из решения задачи дифракции на абсолютно жестком клине можно получить решение аналогичной задачи для абсолютно мягкого клина.

Рассмотрим дифракцию нестационарной акустической волны $\varphi = \varphi_0(r, \theta - \theta_0, z, t)$, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \gamma$ на угле раствора β, образованного полуплоскостями $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ $(\alpha = 2\pi - \beta)$, когда акустическая среда занимает область $0 < \theta < \alpha$ и на граничных полуплоскостях $\theta = 0$, α поставлено условие $\varphi = 0$ (первая задача) или $\partial\varphi / \partial\theta = 0$ (вторая задача).

Здесь r, θ, z — цилиндрическая система координат, у которой ось z совпадает с ребром угла, а φ — потенциал скорости. При этом падающая волна $\varphi_0(r, \theta - \theta_0, z, t)$ предполагается такой, что при $\theta_0 = 0$ эта волна набегает из области $0 < \theta < \alpha$. Тогда существует некоторый интервал значений θ_0: $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \gamma$ $(\gamma < \alpha)$, при которых рассматриваемая падающая волна $\varphi_0(r, \theta - \theta_0, z, t)$ также набегает из области $0 < \theta < \alpha$. Именно для этого интервала $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \gamma$ и рассматриваются данные задачи дифракции.

Если искать решения φ_1 и φ_2 первой и второй задач в виде $\varphi_1 = \Phi_1 + \varphi_0$ и $\varphi_2 = \Phi_2 + \varphi_0$, то в изображениях по Лапласу по t получаем следующие системы для определения возмущений $\overline{\Phi}_j(r, \theta, z, p, \theta_0)$ $(j = 1, 2)$:

$$\Delta\overline{\Phi}_1 = p^2\overline{\Phi}_1 \quad (\Delta \equiv \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\partial / \partial r + r^{-2}\partial^2 / \partial\theta^2 + \partial^2 / \partial z^2) \tag{1}$$

$$\overline{\Phi}_1 = -\overline{\varphi}_0(r, \theta - \theta_0, z, p) \qquad (\theta = 0, \alpha)$$

$$\overline{\Phi}_1 \to 0 \ (r \to \infty), \quad r\partial\overline{\Phi}_1 / \partial r \to 0 \ (r \to 0)$$

$$\Delta\overline{\Phi}_2 = p^2\overline{\Phi}_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\overline{\Phi}_2}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\varphi}_0(r, \theta - \theta_0, z, p) = \frac{\partial}{\partial\theta_0}\overline{\varphi}_0(r, \theta - \theta_0, z, p) \quad (\theta = 0, \alpha)$$

$$\overline{\Phi}_2 \to 0 \ (r \to \infty), \quad r\partial\overline{\Phi}_2 / \partial r \to 0 \ (r \to 0)$$