УДК 531.01+531.55:521.1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА — МЕЩЕРСКОГО К СТАЦИОНАРНОМУ ВИДУ И ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ МАССЫ

Л. М. Беркович

(Куйбышев)

Для одной из возможных постановок задачи двух тел — точек переменной массы а именно задачи Гильдена — Мещерского) — методом автономизации найдены все возможные математические законы изменения массы, при выполнении которых уравнение движения приводится к стационарному виду. Оказывается, что вещественная масса не может быть ни периодической, ни колеблющейся. Установленные законы включают в качестве частных случаев классические законы Мещерского и Эддингтона — Джинса. Найдены также все прямолинейные решения задачи Гильдена — Мещерского.

1. Одной из наиболее известных в небесной механике является классическая нестационарная задача Гильдена — Мещерского, которая используется для описания эволюции двойных звезд при вековой потере массы за счет фотонной и корпускулярной активности. Задача Гильдена — Мещерского служит математической моделью для описания различных случаев движения тел переменной массы, например движения материальной точки в гравитационном поле тела переменной массы; относительного движения двух тел переменной массы, когда их ньютоновское взаимодействие значительно превосходит реактивные силы или когда имеется возмущающая сила типа «трения», компенсирующая реактивные силы и др. (см., например, [1–3]).

Рассматривается уравнение движения вида

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = -\mu(t)\,\mathbf{r}\,/\,r^3 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x,\ y)$ — радиус-вектор относительного движения одной материальной точки относительно другой в плоскости орбиты, $\mu(t)$ — некоторая функция времени t, $r = |\,\mathbf{r}\,|$. Отметим, что к этому же уравнению приводит в задаче двух тел космологическая гипотеза Дирака [4] об изменении с течением времени гравитационной постоянной.

Известны следующие законы изменения массы $\mu(t)$, при выполнении которых уравнение (1.1) интегрируется в квадратурах, называемые соответственно первым, вторым и объединенным законами Мещерского

$$\mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1},\quad \mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1/2} \tag{1.2}$$
$$\mu(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{-1/2}$$

Законы (1.2) физически обосновываются при помощи закона Эддингтона — Джинса [5] теории внутреннего строения и эволюции звезд

$$\mu^{\cdot} = -k\mu^{\nu} \tag{1.3}$$

где k — коэффициент пропорциональности, а показатель ν удовлетворяет неравенству $1 < \nu \leqslant 3$ (при $\nu = 2$ имеем первый, а при $\nu = 3$ — второй законы Мещерского). Естественное обобщение соотношения (1.3) можно получить при снятии ограничений на показатель ν (в частности, при $\nu = 0$ масса $\mu(t)$ изменяется по линейному, а при $\nu = 1$ — по экспоненциальному законам).

Приведенные законы изменения массы позволяют преобразованием переменных

$$\mathbf{r} = v(t)\,\boldsymbol{\rho},\quad d\tau = u(t)\,dt,\quad \boldsymbol{\rho} = (\xi,\ \eta) \tag{1.4}$$
$$v(t) \in C_I^2,\quad u(t) \in C_I^2,\quad u(t)\,v(t) \neq 0,\quad \forall\, t \in I$$

где I — открытый ограниченный или неограниченный интервал оси времени t, C_I^2 — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций в I, привести задачу (1.1) к стационарному виду

$$\boldsymbol{\rho}'' \pm b_1\boldsymbol{\rho}' + b_0\boldsymbol{\rho} = -\mu_0\boldsymbol{\rho}/\rho^3,\quad (') = d\,/\,d\tau \tag{1.5}$$

Здесь b_0, μ_0 — вещественные постоянные, а b_1 может быть как вещественной, так и чисто мнимой постоянной.

В силу известной теоремы Штеккеля — Ли (1.4) является наиболее общим преобразованием, сохраняющим порядок уравнения, линейность его линейной части и структуру нелинейной части.

Определим все возможные законы изменения массы, при которых задача (1.1) преобразованием (1.4) приводится к виду (1.5).

Поскольку искомые законы являются не только достаточными, но и необходимыми условиями существования соответствующего преобразования (1.4), то ответ на данный вопрос не может быть получен ни полуобратным методом, ни эвристическими подстановками. Решение дается на основе метода автономизации дифференциальных уравнений [6].

2. *Лемма 1.* Для того чтобы задача (1.1) преобразованием (1.4) приводилась к виду (1.5), необходимо и достаточно, чтобы ядро $u(t)$ и множитель $v(t)$ преобразования (1.4) удовлетворяли уравнениям

$$\frac{1}{2}\frac{u^{\cdot\cdot}}{u}-\frac{3}{4}\left(\frac{u^{\cdot}}{u}\right)^2-\frac{1}{4}\delta u^2=0,\quad \delta=b_1^2-4b_0 \tag{2.1}$$

$$v^{\cdot\cdot}-b_0v^{-3}=0,\quad b_1=0 \tag{2.2}$$

$$v^{\cdot\cdot}-\frac{b_0}{b_1^2}v^{-3}\left(\int\limits_{t_0}^{t}v^{-2}\,dt\right)^{-2}=0,\quad b_1\neq 0,\quad t_0\in I \tag{2.3}$$

Здесь $v(t)$, $u(t)$ и $\mu(t)$ связаны соотношениями

$$\mu(t)=\mu_0u^2(t)v^3(t) \tag{2.4}$$

$$v(t)=|u|^{-1/2}\exp\left(\pm\frac{1}{2}b_1\int u\,dt\right)$$

$$v^{\cdot\cdot}-b_0u^2(t)\,v=0$$

При этом задача (1.1) допускает однопараметрическую группу Ли с инфинитезимальным оператором

$$X=\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v^{\cdot}}{uv}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.5}$$

и имеет частные решения

$$\mathbf{r}=v(t)\boldsymbol{\lambda},\quad \lambda^3=-\mu_0/b_0,\quad b_0\neq 0 \tag{2.6}$$

Отметим, что приводимые в статье леммы и теоремы даны без доказательства.

Лемма 2. Общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(t)=\begin{cases}(\alpha_1t+\beta_1)^{-1}(\alpha_2t+\beta_2)^{-1}, & \delta=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2>0\\ (At^2+Bt+C)^{-1}, & \delta=B^2-4AC<0\\ (\alpha t+\beta)^{-2}, & \delta=0\end{cases}$$

Частные случаи этого решения представляются формулами

$$u(t)=(\alpha t+\beta)^{-1},\quad u(t)=1$$

Лемма 3. а) Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$v(t)=[(\alpha_1t+\beta_1)(\alpha_2t+\beta_2)]^{1/2},\quad -4b_0=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2>0$$

$$v(t)=(At^2+Bt+C)^{1/2},\quad -4b_0=B^2-4AC<0$$

$$v(t)=\alpha t+\beta,\quad b_0=0$$

Важными частными случаями решения являются

$$v(t)=\sqrt{\alpha t+\beta},\quad v(t)=1$$

б) Общее решение уравнения (2.3) описывается соотношениями

$$v(t)=(\alpha_1t+\beta_1)^{\gamma_\pm}(\alpha_2t+\beta_2)^{\gamma_\mp},\quad \gamma_\pm={}^1/_2\pm b_1/(2\sqrt{\delta}),$$

$$\delta=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2>0$$

$$v(t)=(At^2+Bt+C)^{1/2}\exp\left(\pm\frac{b_1}{\sqrt{-\delta}}\operatorname{arctg}\frac{2At+B}{\sqrt{-\delta}}\right),\quad \delta=B^2-4AC<0$$

$$v(t)=(\alpha t+\beta)\exp[\mp b_1/(2\alpha(\alpha t+\beta))],\quad \delta=0$$

Частные случаи данного решения имеют вид

$$v(t) = (\alpha t + \beta)^{1/2 \pm b_1/(2\alpha)}, \quad v(t) = \exp(\pm {}^1/_2 b_1 t)$$

3. *Теорема 1.* Для того чтобы задача (1.1) преобразованием

$$\mathbf{r} = |u|^{-1/2}\boldsymbol{\rho}, \quad d\tau = u\,dt \tag{3.1}$$

приводилась к виду (1.5) при $b_1 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы масса $\mu(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\mu^{\cdot\cdot} - 2\mu^{-1}\mu^{\cdot 2} + b_0\mu^5 = 0 \tag{3.2}$$

При этом соотношения (3.1), (2.5) и (2.6) принимают соответственно вид

$$\mathbf{r} = \mu^{-1}\boldsymbol{\rho}, \quad d\tau = \mu^2 dt$$

$$X = \mu^{-2}\frac{\partial}{\partial t} - \mu^{-3}\mu^{\cdot}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\mathbf{r} = \mu^{-1}\boldsymbol{\lambda}, \quad \lambda^3 = -\mu_0 / b_0, \quad b_0 \neq 0$$

Теорема 2. Для того чтобы задача (1.1) преобразованием

$$\mathbf{r} = |u|^{-1/2}\exp\left(\pm\frac{1}{2}b_1\int u\,dt\right)\boldsymbol{\rho}, \quad d\tau = u\,dt \tag{3.3}$$

приводилась к виду (1.5) ($b_1 \neq 0$), необходимо и достаточно, чтобы масса $\mu(t)$ удовлетворяла интегродифференциальному уравнению

$$\mu^{\cdot\cdot} - 2\mu^{-1}\mu^{\cdot 2} + \frac{9b_1^2 - \delta}{36b_1^2}\mu^5\left(\int_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)^{-2} = 0 \tag{3.4}$$

Соотношения (1.4), (2.5) и (2.6) принимают в этом случае соответственно вид

$$\mathbf{r} = \left(3b_1\int_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)^{2/3}\mu^{-1}\boldsymbol{\rho}, \quad d\tau = \left(\pm 3b_1\int_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)^{-1}\mu^2 dt$$

$$X = \left(\pm 3b_1\int_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)\mu^{-2}\frac{\partial}{\partial t} + \left[\left(\mp 3b_1\int_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)^{-3}\mu^{\cdot} \pm 2b_1\right]\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\mathbf{r} = \left(3b_1\int\mu^2 dt\right)^{2/3}\mu^{-1}\boldsymbol{\lambda}, \quad \lambda^3 = -\frac{\mu_0}{b_0}, \quad b_0 \neq 0$$

Уравнения (3.2) и (3.4) будем называть соответственно дифференциальным и интегродифференциальным законами изменения массы, из которых конечные формулы могут быть получены либо путем непосредственного интегрирования уравнений (3.2) и (3.4), либо на основе связи, существующей между $\mu(t)$ и $u(t)$, $v(t)$ (формула (2.4), леммы 2 и 3).

4. *Теорема 3.* Все возможные законы изменения со временем массы $\mu(t)$ в задаче (1.1), (1.4), (1.5) даются конечными уравнениями

$$\mu(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{\varkappa_\pm}(\alpha_2 t + \beta_2)^{\varkappa_\mp} \tag{4.1}$$

$$\varkappa_\pm = -{}^1/_2 \pm 3b_1/(2\sqrt{\delta}), \quad \delta = b_1^2 - 4b_0 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0, \; \alpha_1 \neq 0, \; \alpha_2 \neq 0$$

$$\mu(t) = (At^2 + Bt + C)^{-1/2}\exp\left(\pm\frac{3b_1}{\sqrt{-\delta}}\operatorname{arctg}\frac{2At + B}{\sqrt{-\delta}}\right), \quad \delta = B^2 - 4AC < 0 \tag{4.2}$$

$$\mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1}\exp\left[\mp\frac{3b_1}{2\alpha(\alpha t + \beta)}\right], \quad \delta = 0 \tag{4.3}$$

$$\mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1/2 \pm 3b_1/(2\alpha)} \tag{4.4}$$

$$\mu(t) = \mu_0\exp(\pm {}^3/_2 b_1 t) \tag{4.5}$$

Следствие. Вещественная масса $\mu(t)$ в задаче (1.1), (1.4), (1.5) не может изменяться ни по периодическому, ни по колебательному законам.

Замечание. Из формулы (4.1)—(4.4) при $b_1 = 0$ следуют законы Мещерского, а формулы (4.4), (4.5) представляют конечный вид обобщенного закона Эддингтона — Джинса. Частными случаями (4.4) являются формулы

$$\mu(t) = \alpha t + \beta \tag{4.6}$$

$$\mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-2} \tag{4.7}$$

$$\mu(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)(\alpha_2 t + \beta_2)^{-2} \tag{4.8}$$

Линейный закон (4.6) рассматривал Ловетт (см. [1]), однако при этом он ошибочно считал первый закон Мещерского некорректным. В [7] установлено, что случаи (4.6), (4.7) могут быть использованы для изучения движения в сопротивляющейся среде. В [8] показано, каким образом по известным начальным условиям можно установить определяемые изменением масс явления захвата или распада системы в прошлом или в будущем. Соотношения (4.8) [9] охватывают формулу $\mu(t) = (2\alpha t + 1)(\alpha t + 1)^{-2}$, полученную в [10] при рассмотрении стационарной задачи о движении спутника-точки в поле притяжения Земли-шара под действием пропорциональной скорости силы сопротивления однородной атмосферы. Формула (4.1) получена Л. М. Берковичем и Б. Е. Гельфгатом [1] [11].

Теорема 4. Для того чтобы задача (1.1) допускала прямолинейные решения (2.6), необходимо и достаточно, чтобы масса $\mu(t)$ изменялась согласно законам (4.1)—(4.5); при этом в качестве $v(t)$ выбираются соотношения, определяемые леммой 3 ($b_0 \neq 0$).

В заключение отметим, что вопрос о математических законах изменения массы тесно связан с вопросом об интегрировании задачи (1.1), который требует специального рассмотрения.

Автор благодарит Г. Н. Дубошина, В. В. Румянцева, А. С. Галиуллина, на семинарах которых обсуждались полученные результаты, а также В. Г. Демина, обратившего внимание автора на возможность эффективного использования метода автономизации [6] в задачах механики тел переменной массы.

Поступила 11 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. М.— Л., «Гостехиздат», 1949.
2. *Омаров Т. Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики. Алма-Ата, «Наука», 1975.
3. *Дубошин Г. Н.* Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астрон. ж., 1925, т. 2, вып. 4.
4. *Dirac P. A. M.* The cosmological constants, Nature, 1937, vol. 139, No. 3512.
5. *Jeans J. H.* Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass. Monthly Notices Roy. Astron Soc., 1925, vol. 85, No. 1.
6. *Беркович Л. М.* Преобразования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 2.
7. *Радзиевский В. В., Гельфгат Б. Е.* Об ограниченной задаче двух тел переменной массы. Астрон. ж., 1957, т. 34, вып. 4.
8. *Гельфгат Б. Е.* Два случая интегрируемости задачи двух тел переменной массы и их применение к изучению движения в сопротивляющейся среде. Бюл. Ин-та теор. астрон., 1959, т. 7, № 5.
9. *Гельфгат Б. Е.* Обобщение задачи двух тел переменной массы и ее строгие решения. Тр. третьих чтений К. Э. Циолковского. Секция механики космического полета. М., «Знание», 1968.
10. *Niță M. M.* Studiu asupra mişcării sațelitilor artificiali în mediul rezisteu Studii cercetari mec. apl. Acad. RPR, 1958, t. 9, N 2.
11. *Беркович Л. М., Гельфгат Б. Е.* Исследования некоторых нестационарных задач небесной механики методом преобразований. В сб.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М., «Наука», 1975.

---

[1] Б. Е. Гельфгат (1929—1976 гг.), внесший значительный вклад в исследование задачи двух тел переменной массы, трагически погиб в июле 1976 г. при восхождении на одну из вершин Памира.