Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 17.943

# ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

С. Ю. Беляев, Ю. Н. Кузьмин

(Ленинград)

Рассматривается задача Неймана в области, внешней к полубесконечному цилиндру. Для коэффициентов разложения решения в ряд Фурье по азимутальной переменной составляются краевые задачи, к которым применяется метод парных интегральных уравнений. Показано, что полученные этим методом интегральные уравнения Фредгольма имеют единственные и непрерывные решения, которые могут быть получены итерационными методами. Развитая теория иллюстрируется задачей о потенциальном обтекании цилиндра.

**1. Постановка задачи и сведение ее к парным интегральным уравнениям.** В области, внешней к полубесконечному круговому цилиндру единичного радиуса, требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

убывающее на бесконечности и удовлетворяющее на поверхности цилиндра следующим условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0,\, r<1} = f(r, \varphi), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1,\, z>0} = g(z, \varphi) \tag{1.2}$$

Здесь $f$ и $g$ — заданные функции; $r$, $\varphi$, $z$ — цилиндрические координаты.

Разлагая решение в ряд Фурье по азимутальному углу

$$u = \frac{1}{2} u_0^c(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n^c(r, z)\cos n\varphi + u_n^s \sin n\varphi] \tag{1.3}$$

получим для коэффициентов разложения следующие краевые задачи:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_n}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2}u_n = 0 \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial z}\right|_{z=0,\, r<1} = f_n(r), \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial r}\right|_{r=1,\, r>0} = g_n(z)$$

$$\begin{pmatrix} f_n^c(r) \\ f_n^s(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \varphi)\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\begin{pmatrix} g_n^c(z) \\ g_n^s(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(z, \varphi)\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

В формулах (1.4) $u_n$, $f_n$ и $g_n$ означают либо $u_n^s$, $f_n^s$ и $g_n^s$, либо $u_n^c$, $f_n^c$ и $g_n^c$.

Для решения краевой задачи (1.4) разобьем внешность цилиндра на области I ($z<0$, $0\leqslant r<\infty$) и II ($z>0$, $1<r<\infty$); функции $u_n(r, z)$ в этих областях представим соответственно в виде интегральных разложений

$$
(1.5) \qquad u_n(r,z)=\int_0^\infty A_n(\lambda)\,J_n(\lambda r)\,e^{\lambda z}d\lambda \quad (z<0, 0\leqslant r<\infty)
$$

$$
u_n(r,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_n(\nu r)}{K_n'(\nu)}\,\frac{\cos\nu z}{\nu}\,d\nu\int_0^\infty g_n(\zeta)\cos\nu\zeta d\zeta+
$$

$$
+\int_0^\infty B_n(\lambda)\,\mathrm{Im}\left\{\frac{H_n^{(1)}(\lambda r)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'}\right\}e^{-\lambda z}d\lambda \quad (z>0, r>1)
$$

Здесь $J_n$, $H_n^{(1)}$ — функции Бесселя первого и третьего рода; $K_n$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Если $f(r, \varphi)$ и $g(z, \varphi)$ удовлетворяют условиям Дирихле по всем переменным и при фиксированном $\varphi$ интеграл от $g(z, \varphi)$ в пределах от нуля до бесконечности абсолютно сходится, такие представления обеспечивают убывание искомых функций на бесконечности, а также выполнение граничного условия на боковой поверхности цилиндра. Удовлетворяя граничному условию на торце цилиндра, а также требуя непрерывности искомой функции и ее производной по $z$ в плоскости $z=0$ при $r>1$, сведем задачу к решению парных интегральных уравнений

$$
(1.6) \qquad \int_0^\infty \lambda A_n(\lambda)\,J_n(\lambda r)\,d\lambda=f_n(r), \quad 0\leqslant r<1
$$

$$
\int_0^\infty A_n(\lambda)\,J_n(\lambda r)\,d\lambda=F_n(r), \quad r>1
$$

$$
F_n(r)=h_n(r)+\int_0^\infty B_n(\lambda)\,\mathrm{Im}\frac{H_n^{(1)}(\lambda r)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'}d\lambda
$$

$$
h_n(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_n(\nu r)}{K_n'(\nu)}\,\frac{\partial\nu}{\nu}\int_0^\infty g_n(\zeta)\cos\nu\zeta d\zeta
$$

Для $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ справедливо дополнительное интегральное соотношение

$$
(1.7) \qquad \int_0^\infty \lambda A_n(\lambda)\,J_n(\lambda r)\,d\lambda+\int_0^\infty \lambda B_n(\lambda)\,\mathrm{Im}\frac{H_n^{(1)}(\lambda r)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'}d\lambda=0, \quad r>1
$$

**2. Решение парных интегральных уравнений.** Предположим, что функция $F_n(r)$ задана. Тогда решение пары (1.6) найдем, например, следующим методом. Известные формулы теории бесселевых функций [1] показывают, что операторы

$$\Lambda_1[u(r)] = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, t^{-n} \int_0^t \frac{r^{n+1} u(r)\, dr}{\sqrt{t^2 - r^2}},$$

$$\Lambda_2[u(r)] = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, t^n \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{r^{1-n} u(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - t^2}}$$

будучи применены к обеим частям равенств (1.6) соответственно, позволяют свести эти парные интегральные уравнения к одному интегральному уравнению Ханкеля

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, A_n(\lambda)\, J_{n+1/2}(\lambda t)\, d\lambda = \Phi_n(t) \tag{2.1}$$

$$t < 1, \quad \Phi_n(t) = \Lambda_1[f_n(r)]$$

$$t > 1, \quad \Phi_n(t) = \Lambda_2[F_n(r)]$$

Обращение формулы (2.1)

$$A_n(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^\infty t \Phi_n(t)\, J_{n+1/2}(\lambda t)\, dt \tag{2.2}$$

завершает решение задачи, если функции $f_n(r)$ и $F_n(r)$ известны.

Однако в рассматриваемом случае $F_n(r)$ неизвестна, а значит, неизвестна и функция $\Phi_n(t)$ на промежутке $1 < t < \infty$.

Обозначим $\varphi_n(t) = \Phi_n(t)$ при $1 < t < \infty$. Из (1.6) и (2.1) с учетом известных соотношений для функций $H_\nu^{(1)}$ для функции $\varphi_n(t)$ получим интегральное уравнение

$$\varphi_n(t) = p_n(t) + \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, B_n(\lambda)\, \mathrm{Im} \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(\lambda t)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'}\, d\lambda \tag{2.3}$$

$$p_n(t) = \Lambda_2[h_n(r)]$$

Формула (1.7) позволяет выразить функцию $B_n(\lambda)$ через $A_n(\lambda)$; для этого достаточно воспользоваться теоремой обращения Вебера — Орра [2]

$$B_n(\lambda) = -\int_1^\infty \rho\, \mathrm{Im}\, \{[H_n^{(2)}(\lambda)]' H_n^{(1)}(\lambda\rho)\}\, N(\rho)\, d\rho$$

$$N(\rho) = \int_0^\infty \nu A_n(\nu)\, J_n(\nu\rho)\, d\nu$$

Соотношения (2.1) и (2.2) показывают, что функция $A_n(\lambda)$ может быть представлена в виде двух слагаемых, одно из которых известно, а другое выражается через $\varphi_n(t)$

$$A_n(\lambda) = a_n(\lambda) + \sqrt{t} \int_1^\infty t \varphi_n(t)\, J_{n+1/2}(\lambda t)\, dt \tag{2.4}$$

$$a_n(\lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_0^1 t^{-n+1/2} J_{n+1/2}(\lambda t)\, dt \int_0^t \frac{r^{n+1} f_n(r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr$$

Следовательно, функция $B_n(\lambda)$ может быть представлена в виде суммы

(2.5) $$B_n(\lambda) = b_n(\lambda) + C_n(\lambda)$$

$$b_n(\lambda) = -\int_1^\infty \rho \operatorname{Im}\{[H_n^{(2)}(\lambda)]' H_n^{(1)}(\lambda\rho)\} d(\rho)\, d\rho$$

$$d(\rho) = \int_0^\infty \nu a_n(\nu) J_n(\nu\rho)\, d\nu$$

$$C_n(\lambda) = -\int_1^\infty \rho \operatorname{Im}\{[H_n^{(2)}(\lambda)]' H_n^{(1)}(\lambda\rho)\} T(\rho)\, d\rho$$

$$T(\rho) = \int_0^\infty \nu \sqrt{\nu}\, J_n(\nu\rho)\, d\nu \int_1^\infty \tau\varphi_n(\tau) J_{n+1/2}(\nu\tau)\, d\tau$$

Здесь также первое слагаемое $b_n(\lambda)$ известно, а второе представимо через функцию $\varphi_n(t)$. Из (2.5) и (2.3) получим интегральное уравнение для функции $\varphi_n(t)$

(2.6) $$\varphi_n(t) = q_n(t) + \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, C_n(\lambda) \operatorname{Im} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'}\, d\lambda$$

$$q_n(t) = p_n(t) + \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, b_n(\lambda) \operatorname{Im} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'}\, d\lambda$$

Изменяя порядок интегрирования в последней формуле (2.5), интегрируя по частям и применяя следующие соотношения теории функций Бесселя:

$$\nu J_n(\nu\rho) = \rho^{-n-1} d\,[\rho^{n+1} J_{n+1}(\nu\rho)]/d\rho$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty J_{n+1}(\nu\rho) J_{n+1/2}(\nu\tau) \sqrt{\nu\tau}\, d\nu = E_n(\rho, \tau)$$

$$\rho > \tau, \quad E_n = \tau^{n+1}\rho^{-n-1}/\sqrt{\rho^2 - \tau^2}, \quad \rho < \tau, \quad E_n = 0$$

$$d\,[\rho^{-n} H_n^{(1)}(\lambda\rho)]/d\rho = -\lambda\rho^{-n} H_{n+1}^{(1)}(\lambda\rho)$$

$$\int_\tau^\infty \frac{\rho^{-n} H_{n+1}^{(1)}(\lambda\rho)}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}}\, d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda\tau}}\, \tau^{-n} H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda\tau)$$

$$\operatorname{Im} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'} \operatorname{Im}\{[H_n^{(2)}(\lambda)]' H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda\tau)\} \equiv$$

$$\equiv J_{n+1/2}(\lambda t) J_{n+1/2}(\lambda\tau) - \operatorname{Re}\left\{ \frac{J_n'(\lambda)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]} H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t) H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda\tau) \right\}$$

а также теорему разложения Ханкеля [1]

$$\int_0^\infty \lambda J_{n+1/2}(\lambda t)\, d\lambda \int_1^\infty \tau\varphi_n(\tau) J_{n+1/2}(\lambda\tau)\, d\tau = \varphi_n(t)$$

преобразуем уравнение (2.6) к виду

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2} q_n(t) + \int_1^\infty M_n(t, \tau)\, \varphi_n(\tau)\, d\tau \tag{2.7}$$

$$M_n(t, \tau) = \frac{\tau}{2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \lambda \frac{J_n'(\lambda)}{[H_n^{(1)}(\lambda)]'} H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t)\, H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda\tau)\, d\lambda =$$

$$= \frac{\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_n'(x)}{K_n'(x)} K_{n+1/2}(xt)\, K_{n+1/2}(x\tau)\, x dx$$

Последнее преобразование проведено аналогично [3] с помощью теоремы Коши.

Уравнение (2.7) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода с ядром $M_n(t, \tau)$, которое выражается в квадратурах от специальных функций.

Введем новую неизвестную функцию

$$\psi_n(x) = \frac{I_n'(x)\sqrt{x}}{K_n'(x)\, I_n(x)} \int_1^\infty \tau\varphi_n(\tau)\, K_{n+1/2}(x\tau)\, d\tau \tag{2.8}$$

Для функции $\psi_n(x)$ ядро соответствующего интегрального уравнения будет представляться в замкнутой форме. Действительно, с учетом (2.8) формула (2.7) принимает вид

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2} q_n(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{x}\, K_{n+1/2}(xt)\, I_n(x)\, \psi_n(x)\, dx \tag{2.9}$$

Из (2.9) и (2.8) получим интегральное уравнение для функции $\psi_n(x)$

$$\psi_n(x) = S_n(x) + \int_0^\infty L_n(x, y)\, \psi_n(y)\, dy \tag{2.10}$$

$$S_n(x) = \frac{I_n'(x)\sqrt{x}}{2K_n'(x)\, I_n(x)} \int_1^\infty q_n(\tau)\, \tau K_{n+1/2}(x\tau)\, d\tau$$

$$L_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{I_n'(x)\sqrt{xy}\, I_n(y)}{K_n'(x)\, I_n(x)} \int_1^\infty \tau K_{n+1/2}(x\tau)\, K_{n+1/2}(y\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{I_n'(x)\sqrt{xy}\, I_n(y)}{K_n'(x)\, I_n(x)} \frac{xK_{n-1/2}(x)\, K_{n+1/2}(y) - yK_{n-1/2}(y)\, K_{n+1/2}(x)}{x^2 - y^2}$$

Покажем, что уравнение (2.10) имеет единственное решение в классе непрерывных и ограниченных на бесконечности функций. Для этого (см. например, [3,4]) достаточно убедиться в том, что

$$\int_0^\infty |L_n(x, y)|\, dy < 1 \tag{2.11}$$

Воспользовавшись известными интегралами [1]

$$\int_0^\infty I_n(y) K_{n+1/2}(yt) \sqrt{yt}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t^{-n}}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}\, K_{n+1/2}(xt)}{t^n \sqrt{t^2-1}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_n(x)$$

получим

$$\int_0^\infty |L_n(x, y)|\, dy = -\frac{1}{2} \frac{I_n'(x) K_n(x)}{K_n'(x) I_n(x)}$$

Как следует из формулы [5]

$$I_n(x) K_n(x) = \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} J_n^2(t)\, dt$$

произведение $I_n(x) K_n(x)$ есть убывающая функция своего аргумента, т. е. $-I_n'(x) K_n(x) / (I_n(x) K_n'(x)) < 1$. Отсюда следует неравенство (2.11), а значит, единственность решения уравнения (2.10).

**3. Потенциальное обтекание полубесконечного цилиндра.** В качестве приложения теории, построенной в пп. 1, 2, рассмотрим задачу о потенциальном обтекании полубесконечного цилиндра постоянным на бесконечности потоком жидкости, направленным под углом $\alpha$ к оси цилиндра.

Пусть $u(r, \varphi, z)$ — потенциал скоростей в этой задаче, т. е. $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u$. Ряд Фурье (1.3) в рассматриваемом случае содержит всего два члена, так как потенциал $u_0$ скоростей $v_0$ на бесконечности имеет вид

$$u_0 = v_0 z \cos\alpha - v_0 r \sin\alpha \cos\varphi$$

Для того чтобы выделить особенности на бесконечности, представим решение задачи в форме

$$u(r, \varphi, z) = v_0 \cos\alpha\, [z - u_0(r, z)] - v_0 \sin\alpha \cos\varphi\, [r - u_1(r, z)], \quad z < 0 \tag{3.1}$$
$$u(r, \varphi, z) = v_0 \cos\alpha\, [z - u_0(r, z)] - v_0 \sin\alpha \cos\varphi\, [(r + r^{-1}) - u_1(r, z)], \quad z > 0$$

Это позволяет считать неизвестные функции $u_0(r, z)$ и $u_1(r, z)$ убывающими на бесконечности.

Учитывая условие непроницаемости боковой поверхности цилиндра, запишем функции $u_0$ и $u_1$ в виде разложений (1.5), положив в последнем $g_n(\zeta) = 0$. Воспользовавшись условием непроницаемости торца цилиндра, а также непрерывностью функции $u$ и ее производной по $z$ в плоскости $z = 0$ при $r > 1$, получим две пары интегральных уравнений (1.6), в которых

$$f_0(r) = 1, \quad h_0(r) = 0, \quad f_1(r) = 0, \quad h_1(r) = -1 / r \tag{3.2}$$

а также два условия (1.7) при $n = 0$ и 1.

Уравнения (2.10) для $n = 0, 1$ имеют вид

$$\psi_0(x) = R_0(x) \left[ \int_0^\infty \frac{y+1}{y^2} \frac{I_1(y)}{K_1(y)} e^{-2y} \frac{dy}{x+y} + \int_0^\infty \frac{I_0(y)}{x+y} e^{-y} \psi_0(y)\, dy \right] \tag{3.3}$$

$$\psi_1(x) = R_1(x) \left[ -\frac{\pi}{2x} + \int_0^\infty I_1(y) e^{-y} \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{xy} \right) \psi_1(y)\, dy \right]$$

$$R_n(x) = \frac{I_n'(x)}{2K_n'(x) I_n(x)} e^{-x}$$

Ядра этих уравнений вычисляются непосредственно по последней формуле (2.10) при $n = 0, 1$. Для вычисления свободного члена во втором уравнении (3.3) следует учесть, что на основании (3.2) $f_1(r) = 0$, следовательно, во второй формуле (2.4) $a_1(\lambda) = 0$. Поэтому в формуле (2.5) $b_1(\lambda) = 0$, а, значит, $q_1(t) = p_1(t)$ (см. (2.6)). Так как, согласно (3.2), $h_1(r) = -r^{-1}$, то из (2.3) следует

$$p_1(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - t^2}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2t^3}}$$

Отсюда и из второго соотношения (2.10), вычисляя интеграл при $n = 1$, получим $S_1(x) = -\pi R_1(x) / (2x)$, что соответствует свободному члену во втором уравнении (3.3).

Вычисление свободного члена первого уравнения (3.3) проводится аналогично. Согласно (2.4), при $n = 0$ и $f_0(r) = 1$ имеем

$$a_0(\lambda) = 2\pi^{-1}\operatorname{Im}[(1 - i\lambda)e^{i\lambda} / \lambda^2] \tag{3.4}$$

Из (2.5) получим

$$b_0(\lambda) = 2\pi^{-1}\operatorname{Re}[(i\lambda - 1) H_1^{(2)}(\lambda) e^{i\lambda} / \lambda^2] \tag{3.5}$$

Так как, согласно (3.2), $p_0(t)$ тождественно равна нулю, то после ряда преобразований из (2.6) получим

$$q_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty \frac{x+1}{x^2} \frac{I_1(x)}{K_1(x)} e^{-(t+1)x} dx \tag{3.6}$$

Подстановка (3.6) во второе соотношение (2.10) позволяет получить выражение для $S_0(x)$ в первом уравнении (3.3).

Введем новые неизвестные функции

$$\omega_0(x) = \frac{(x+1) I_1(x)}{x^2 K_1(x)} e^{-2x} + I_0(x) e^{-x} \psi_0(x) \tag{3.7}$$

$$\omega_1(x) = I_1(x) e^{-x} \psi_1(x)$$

Тогда уравнения (3.3) принимают вид

$$\omega_0(x) = \frac{I_1(x)}{2K_1(x)} e^{-2x} \left[\frac{2(x+1)}{x^2} - \int_0^\infty \frac{\omega_0(y)\,dy}{x+y}\right] \tag{3.8}$$

$$\varphi_1(x) = -\frac{I_1'(x)}{2K_1'(x)} e^{-2x} \left[\frac{\pi}{2x} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{xy}\right) \omega_1(y)\,dy\right]$$

Выразим теперь искомые коэффициенты $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ через $\omega_n(x)$ $(n = 0,1)$. Запишем (2.4) и (2.5) с учетом (3.4), (3.5) и последнего соотношения (2.5) в виде

$$A_n(\lambda) = \operatorname{Re}\left[\beta_n(\lambda) + \sqrt{\lambda} \int_1^\infty t\varphi_n(t) H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t)\,dt\right] \tag{3.9}$$

$$B_n(\lambda) = -\operatorname{Im}\left\{[H_n^{(2)}(\lambda)]' \left[\beta_n(\lambda) + \sqrt{\lambda} \int_1^\infty t\varphi_n(t) H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t)\,dt\right]\right\}$$

$$\beta_0(\lambda) = 2\pi^{-1} i (i\lambda - 1) e^{i\lambda} / \lambda^2, \quad \beta_1(\lambda) = 0$$

Выражения (3.9) показывают, что коэффициенты разложений (1.5) в рассматриваемой задаче обтекания выражаются через одну функцию от $\lambda$. Обозначая

$$D_n(\lambda) = \beta_n(\lambda) + \sqrt{\lambda} \int_1^\infty t\varphi_n(t) H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda t)\,dt \tag{3.10}$$

получим

$$A_n(\lambda) = \operatorname{Re} D_n(\lambda), \quad B_n(\lambda) = -\operatorname{Im}\{[H_n^{(2)}(\lambda)]' D_n(\lambda)\} \tag{3.11}$$

Как следует из (2.9) и (3.7), функции $\varphi_n(t)$ выражаются через $\omega_n(t)$ в виде

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \int_0^\infty \omega_0(x)\, e^{-(t-1)x}\, dx$$

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t^{-3/2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{x}\, K_{3/2}(xt)\, e^{x}\omega_1(x)\, dx$$

Подставляя эти выражения в (3.10), получим

$$D_0(\lambda) = \frac{i}{\pi} e^{i\lambda}\left[2\frac{i\lambda - 1}{\lambda^2} + \int_0^\infty \frac{\omega_0(x)}{i\lambda - x}\, dx\right] \tag{3.12}$$

$$D_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} e^{i\lambda}\left[-\frac{\pi}{2i\lambda} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{i\lambda - x} + \frac{1}{i\lambda x}\right)\omega_1(x)\, dx\right]$$

Таким образом, определив функции $\omega_n(t)$ из интегральных уравнений (3.8) и вычислив $D_n(\lambda)$ при помощи соотношений (3.12), найдем по (3.11) $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ и, тем самым, определим функции $u_0(r, z)$ и $u_1(r, z)$, что в соответствии с (3.1) решает задачу обтекания.

Поступила 18 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 2, М., «Наука», 1970.
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., «Наука», 1974.
3. *Кузьмин Ю. Н.* Внешняя задача Дирихле для полубесконечного цилиндра. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2, М., «Наука», 1974.