

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Д. В. Грилицкий, М. С. Драган, В. К. Опанасович

(Львов)

Рассматривается плоская задача теплопроводности и термоупругости для пластинки с прямолинейным тонкостенным упругим включением конечной длины. Задача сводится к системе двух сингулярных интегродифференциальных уравнений типа Прандтля, решение которой строится на основании метода ортогональных полиномов. Приводится численный анализ решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку, содержащую инородное тонкостенное прямолинейное включение длины $2a$, толщины $2h$ и находящуюся под воздействием лишь тепловых факторов (тепловой поток на бесконечности, сосредоточенные источники тепла). Предполагается, что боковые плоскости пластинки теплоизолированы, а на берегах включения имеет место идеальный силовой и тепловой контакт с окружающим материалом. Требуется

определить и исследовать влияние включения на величину и характер распределения температурного поля и термоупругого состояния в пластинке.

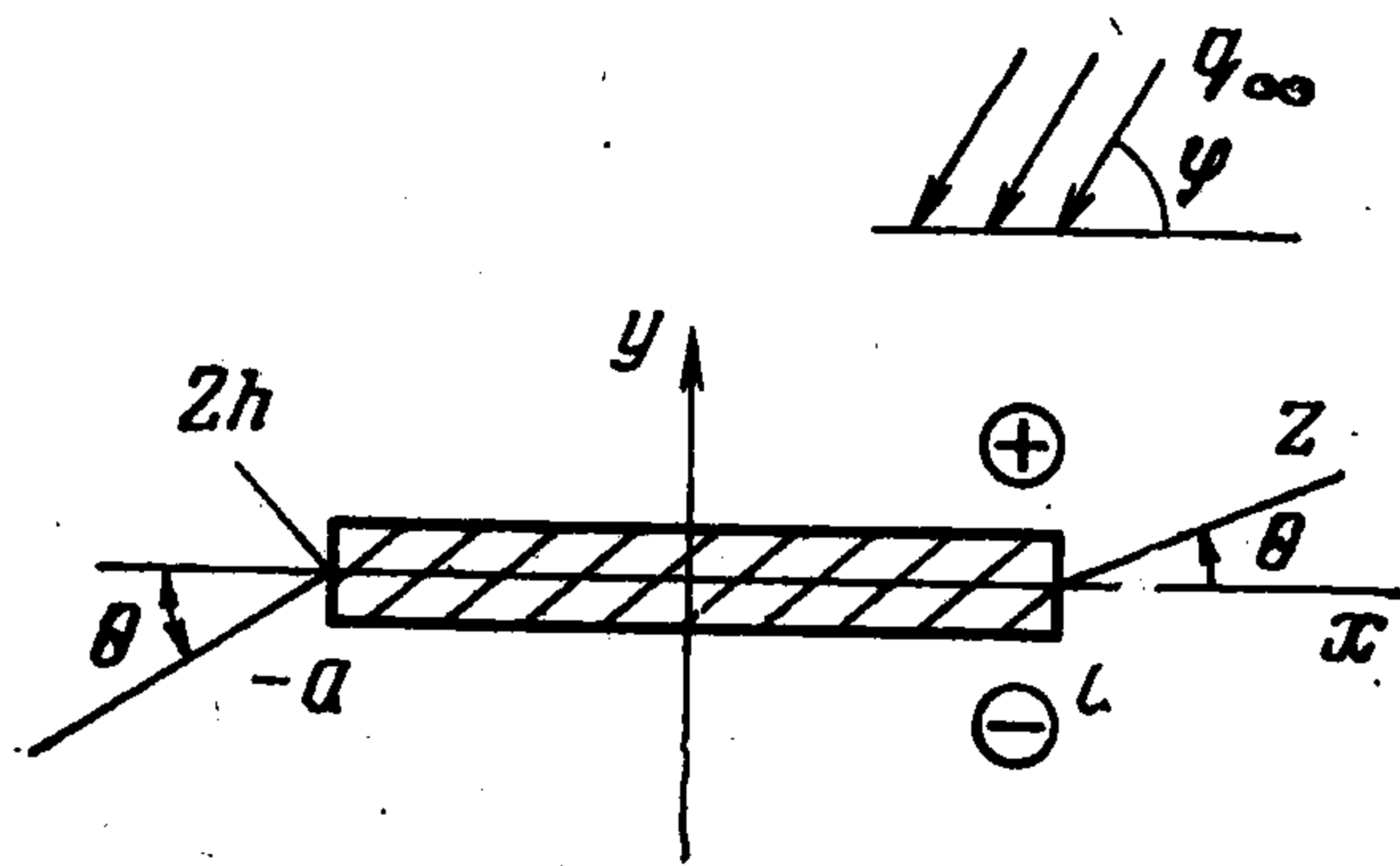
Для решения задачи будем пользоваться декартовой системой координат xOy , оси которой направляем по осям симметрии включения (фиг. 1). Длину включения обозначим через L . Величины, относящиеся к включению, будем снабжать нулевым индексом. Индексами плюс и минус обозначим граничные значения функций соответственно на верхнем и нижнем берегах включения.

Условия силового и теплового контакта включения с окружающим материалом имеют вид

$$(1.1) \quad (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^\pm = (\sigma_y - i\tau_{xy})^\pm, \quad (u + iv)_0^\pm = (u + iv)^\pm \text{ на } L$$

$$(1.2) \quad (T + i\eta)_0^\pm = (T + i\eta)^\pm, \quad k_0 \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)_0^\pm = k \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)^\pm \text{ на } L$$

где η — вспомогательная гармоническая функция [1], k_0 и k — коэффициенты теплопроводности соответственно для материалов включения и пластинки.



Фиг. 1

2. Задача теплопроводности. Согласно [1], температурное поле в однородной изотропной пластине можно определить исходя из формул

$$(2.1) \quad F_1(z) + Q_1(\bar{z}) = T + i\eta$$

$$F(z) + Q(\bar{z}) = \frac{\partial}{\partial x}(T + i\eta), \quad F(z) - Q(\bar{z}) = -i \frac{\partial}{\partial y}(T + i\eta)$$

$$(F(z) = F_1'(z), \quad Q(z) = Q_1'(z))$$

где $F_1(z)$, $Q_1(z)$ — кусочно-голоморфные функции.

Поскольку рассматривается тонкостенное включение, то, пренебрегая величинами высших порядков малости по сравнению с h , на основании зависимостей (2.1) можно записать

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial x}(T + i\eta)_0^+ + \frac{\partial}{\partial x}(T + i\eta)_0^- = 2g(x), \quad x \in L$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(T + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial x}(T + i\eta)_0^- = 2h\rho'(x), \quad x \in L$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(T + i\eta)_0^+ + \frac{\partial}{\partial y}(T + i\eta)_0^- = 2\rho(x), \quad x \in L$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(T + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial y}(T + i\eta)_0^- = -2hg'(x), \quad x \in L$$

где $g(x)$ и $\rho(x)$ — подлежащие определению функции.

Удовлетворяя с помощью соотношений (2.1) условиям (1.2), учитывая при этом зависимости (2.2), получим следующие краевые задачи для определения кусочно-голоморфных функций $F(z)$ и $Q(z)$ с линией скачков L :

$$(2.3) \quad [F(x) + Q(x)]^+ + [F(x) + Q(x)]^- = 2g(x), \quad x \in L$$

$$[F(x) - Q(x)]^+ + [F(x) - Q(x)]^- = -2i \frac{k_0}{k} \rho(x), \quad x \in L$$

$$(2.4) \quad [F(x) + Q(x)]^+ - [F(x) + Q(x)]^- = 2ih \frac{k_0}{k} [g'(x) - g_1(x)], \quad x \in L$$

$$[F(x) - Q(x)]^+ - [F(x) - Q(x)]^- = 2h [\rho'(x) - \rho_1(x)], \quad x \in L$$

Здесь

$$g_1(x) = [F_2'(x) + Q_2'(x)] \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\min(k_0, k)}{k_0}$$

$$\rho_1(x) = [F_2'(x) - Q_2'(x)] i\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\min(k_0, k)}{k}$$

$F_2(x)$ и $Q_2(x)$ — известные функции, дающие решение задачи теплопроводности для той же пластинки при отсутствии включения.

Решая задачи линейного сопряжения (2.4), находим

$$(2.5) \quad F(z) = \frac{h}{2\pi} \left[\frac{k_0}{k} \int_{-a}^a \frac{[g'(x) - g_1(x)] dx}{x-z} - i \int_{-a}^a \frac{[\rho'(x) - \rho_1(x)] dx}{x-z} \right] + F_2(z)$$

$$Q(z) = \frac{h}{2\pi} \left[\frac{k_0}{k} \int_{-a}^a \frac{[g'(x) - g_1(x)] dx}{x-z} + i \int_{-a}^a \frac{[\rho'(x) - \rho_1(x)] dx}{x-z} \right] + Q_2(z)$$

Подставляя выражения функций $F(z)$ и $Q(z)$ (2.5) в формулы (2.3), получим два сингулярных интегродифференциальных уравнения типа

Прандтля для определения неизвестных функций $g(x)$ и $\rho(x)$

$$(2.6) \quad g(x) - \frac{hk_0}{\pi k} \int_{-a}^a \frac{[g'(t) - g_1(t)] dt}{t-x} = F_2(x) + Q_2(x), \quad x \in L$$

$$\frac{k_0}{k} \rho(x) - \frac{h}{\pi} \int_{-a}^a \frac{[\rho'(t) - \rho_1(t)] dt}{t-x} = i[F_2(x) - Q_2(x)], \quad x \in L$$

Решение уравнений (2.6) будем искать в виде

$$(2.7) \quad g(ax) = g_2(ax) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} X_m U_{m-1}(x)$$

$$\rho(ax) = \rho_2(ax) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Y_m U_{m-1}(x), \quad |x| \leq 1$$

$$g_2(x) = [F_2(x) + Q_2(x)] \varepsilon_1, \quad \rho_2(x) = [F_2(x) - Q_2(x)] i\varepsilon_2$$

Здесь X_m, Y_m — неизвестные коэффициенты, $U_m(x)$ — полиномы Чебышева второго рода.

Исходя из формул (2.6), (2.7) и следуя работе [2], приходим к двум бесконечным квазирегулярным системам линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения X_m и Y_m

$$(2.8) \quad \sum_{m=1}^{\infty} R(m, n) X_m + \frac{\pi h k_0}{2ak} X_n = (\varepsilon_1 - 1) D_n^+$$

$$\frac{k_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} R(m, n) Y_m + \frac{\pi h}{2a} Y_n = i(\varepsilon_2 - 1) D_n^- \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$D_n^{\pm} = \int_{-1}^1 [F_2(ax) \pm Q_2(ax)] \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx$$

$$R(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (m+n) \text{ — нечетное число} \\ -\frac{4n}{(m+n+1)(m+n-1)(m-n-1)(m-n+1)}, & \text{если } (m+n) \text{ — четное число} \end{cases}$$

Учитывая представления (2.7), формулы (2.5) запишем в виде

$$(2.9) \quad F(z) = \frac{h}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{k_0}{k} X_m - iY_m \right] L_m\left(\frac{z}{a}\right) + F_2(z)$$

$$Q(z) = \frac{h}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{k_0}{k} X_m + iY_m \right] L_m\left(\frac{z}{a}\right) + Q_2(z)$$

$$L_m(z) = U_{m-1}(z) - T_m(z)/\sqrt{z^2-1}$$

($T_m(z)$ — полиномы Чебышева первого рода).

Заметим, что если в (2.8) и (2.9) положить $k_0 = 0$, то получим решение задачи теплопроводности для пластинки с термоизолированной трещиной, если же положить $k_0 = k$, то получим решение задачи теплопроводности для пластинки без включения.

3. Задача термоупругости. Согласно [1], напряженно-деформированное состояние изотропной пластинки можно описать следующими формулами:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} + \beta\Psi_1(z) \\ \Psi_1(z) &= F_1(z) + \bar{Q}_1(z) \end{aligned}$$

Здесь $\beta = 2\alpha E$ — для плоской деформации, $\beta = 2\alpha E/(1 + \nu)$ — для плоского напряженного состояния, α — температурный коэффициент линейного расширения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

На основании соотношений (3.1) и условий (1.1), следуя решению задачи теплопроводности, получим краевые задачи для определения кусочно-голоморфных функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ с линией скачков L

$$(3.2) \quad \begin{aligned} [\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- &= 2ihK'(x), \quad x \in L \\ [\kappa\Phi(x) + \Omega(x)]^+ - [\kappa\Phi(x) + \Omega(x)]^- + \beta(\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x)) &= \\ = \frac{2ih\mu}{\mu_0} [M'(x) - M_1(x) + \beta_0\Psi_0'(x)], \quad x \in L \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- &= \\ = \frac{2}{1 + \kappa_0} [(1 - \kappa_0)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}], \quad x \in L \\ \kappa[\Phi^+(x) + \Phi^-(x)] - [\Omega^+(x) + \Omega^-(x)] + \beta(\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x)) &= \\ = \frac{2\mu!}{\mu_0(1 + \kappa_0)} [2\kappa_0K(x) + (\kappa_0 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] + \\ + \frac{2\mu\beta_0}{\mu_0} \Psi_0(x), \quad x \in L \end{aligned}$$

Здесь

$$(3.4) \quad M_1(x) = \beta\varepsilon_3\Psi_2'(x), \quad \varepsilon_3 = \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}$$

$$\Psi_2(z) = \int F_2(z) dz + T_\infty$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &= \frac{1}{4} \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (X_m - iY_m) \left[\frac{1}{(m-1)} U_{m-2}\left(\frac{x}{a}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{(m+1)} U_m\left(\frac{x}{a}\right) \right] + \rho_3(x) + T_0 \end{aligned}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{h}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(iY_m - \frac{k_0}{k} X_m \right) \sqrt{z^2 - a^2} L_m\left(\frac{z}{a}\right) + \Psi_2(z)$$

$$\rho_3'(x) = \frac{1}{2} [g_2(x) - i\rho_2(x)]$$

T_0 и T_∞ — соответственно значение температуры во включении и на бесконечности, $K(x)$ и $M(x)$ — неизвестные функции.

Решая задачи линейного сопряжения (3.2), находим

$$(3.5) \quad \Phi(z) = \frac{1}{1+\kappa} \left\{ \frac{h}{\pi} \left[I_K(z) + \frac{\mu}{\mu_0} I_M(z) \right] - \right. \\ \left. - \frac{h\beta}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (a_1 X_m + ia_2 Y_m) \sqrt{z^2 - a^2} L_m \left(\frac{z}{a} \right) \right\} \\ \Omega(z) = \frac{1}{1+\kappa} \left\{ \frac{h}{\pi} \left[-\kappa I_K(z) + \frac{\mu}{\mu_0} I_M(z) \right] - \right. \\ \left. - \frac{h\beta}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (a_1 X_m + ia_2 Y_m) \sqrt{z^2 - a^2} L_m \left(\frac{z}{a} \right) \right\} \\ I_K(z) = \int_{-a}^a \frac{K'(t) dt}{t-z}, \quad I_M(z) = \int_{-a}^a \frac{[M'(t) - B(t)] dt}{t-z} \\ B(t) = M_1(t) - \beta_0 \rho_3'(t) \\ a_1 = \frac{\mu\beta_0}{\mu_0\beta} - \frac{k_0}{k}, \quad a_2 = 1 - \frac{\mu\beta_0}{\mu_0\beta}$$

Подставляя выражение функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ (3.5) в условия (3.3), получим систему интегродифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $K(x)$ и $M(x)$

$$(3.6) \quad \frac{1}{1+\kappa_0} [(1-\kappa_0)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}] - \\ - \frac{h(1-\kappa)}{\pi(1+\kappa)} I_K(x) - \\ - \frac{2h\mu}{\pi\mu_0(1+\kappa)} I_M(x) = \frac{h\beta}{(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (a_1 X_m + ia_2 Y_m) T_m \left(\frac{x}{a} \right) \\ \frac{\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} [2\kappa_0 K(x) + (\kappa_0 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] - \\ - \frac{2h\kappa}{\pi(1+\kappa)} I_K(x) - \frac{h\mu(\kappa-1)}{\pi\mu_0(1+\kappa)} I_M(x) = \\ = \frac{h\beta}{2(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (b_1 X_m - ib_2 Y_m) T_m \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{\mu\beta_0}{\mu_0} \Psi_0(x) + \beta \Psi_2(x) \\ b_1 = \frac{\mu\beta_0(\kappa-1)}{\mu_0\beta} + 2 \frac{k_0}{k}, \quad b_2 = \frac{\mu\beta_0(\kappa-1)}{\mu_0\beta} + 2$$

Решение системы (3.6) будем искать в виде

$$(3.7) \quad K(ax) = K_0 - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Z_m U_{m-1}(x) \\ M(ax) = M_0 + B_2(ax) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} S_m U_{m-1}(x) \\ (B_2'(x) = B(x))$$

где K_0, M_0, Z_m, S_m — неизвестные коэффициенты.

Выполняя необходимые преобразования, приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффи-

коэффициентов разложения Z_m и S_m

$$(3.8) \quad \frac{2}{1+\kappa_0} \sum_{m=1}^{\infty} R(m, n) [(1-\kappa_0)Z_m + 2S_m + 2\bar{Z}_m + 2\bar{S}_m] + C_1 Z_n + C_2 S_n = A_n$$

$$\frac{2\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} \sum_{m=1}^{\infty} R(m, n) [2\kappa_0 Z_m + (\kappa_0 - 1)S_m - 2\bar{Z}_m - 2\bar{S}_m] + C_3 Z_n + C_4 S_n = B_n$$

Здесь

$$(3.9) \quad H(m, n) = \begin{cases} 0, & n \neq m+1, n \neq m-1 \\ \pi/4, & n = m+1 \\ -\pi/4, & n = m-1 \end{cases}$$

$$A_n = 2 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{2}{(1+\kappa_0)} [B_2(ax) + \overline{B_2(ax)}] + A_0 \right\} \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx -$$

$$- \frac{2h\beta}{(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (a_1 X_m + ia_2 Y_m) H(m, n)$$

$$B_n = 2 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} [(\kappa_0 - 1)B_2(ax) - 2\overline{B_2(ax)}] - \beta \Psi_2(ax) + B_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu\beta_0}{\mu_0} (\rho_3(ax) + T_0) \right\} \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx -$$

$$- \frac{h\beta}{(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (b_1 X_m - ib_2 Y_m) H(m, n) +$$

$$+ \frac{\mu\beta_0 a}{2\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (X_m - iY_m) [R(m-1, n) - R(m+1, n)], \quad n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{\pi h(1-\kappa)}{a(1+\kappa)}, \quad C_2 = \frac{2\pi h\mu}{a\mu_0(1+\kappa)}, \quad C_3 = \frac{2\pi h\kappa}{a(1+\kappa)}, \quad C_4 = \frac{\pi h\mu(\kappa-1)}{a\mu_0(1+\kappa)}$$

$$A_0 = \frac{1}{1+\kappa_0} [(1-\kappa_0)K_0 + 2M_0 + 2\bar{K}_0 + 2\bar{M}_0]$$

$$B_0 = \frac{\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} [2\kappa_0 K_0 + (\kappa_0 - 1)M_0 - 2\bar{K}_0 - 2\bar{M}_0]$$

Исходя из формул (3.5) и учитывая соотношения (3.7), имеем

$$(3.10) \quad \Phi(z) = \frac{1}{(1+\kappa)} \left\{ \frac{h}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(Z_m + \frac{\mu}{\mu_0} S_m \right) L_m \left(\frac{z}{a} \right) - \right.$$

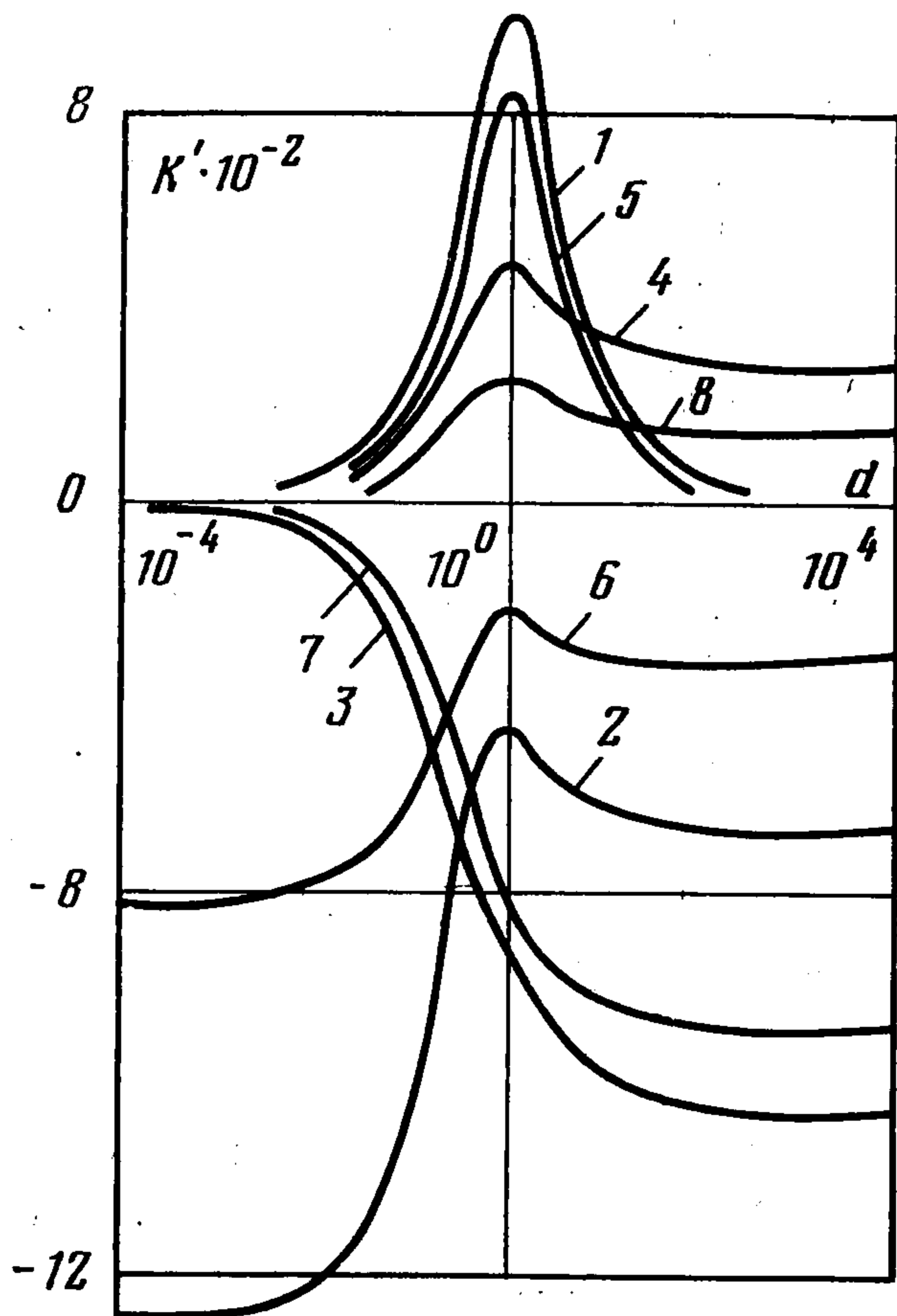
$$\left. - \frac{h\beta}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (a_1 X_m + ia_2 Y_m) \sqrt{z^2 - a^2} L_m \left(\frac{z}{a} \right) \right\}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{(1+\kappa)} \left\{ \frac{h}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\kappa Z_m + \frac{\mu}{\mu_0} S_m \right) L_m \left(\frac{z}{a} \right) - \right.$$

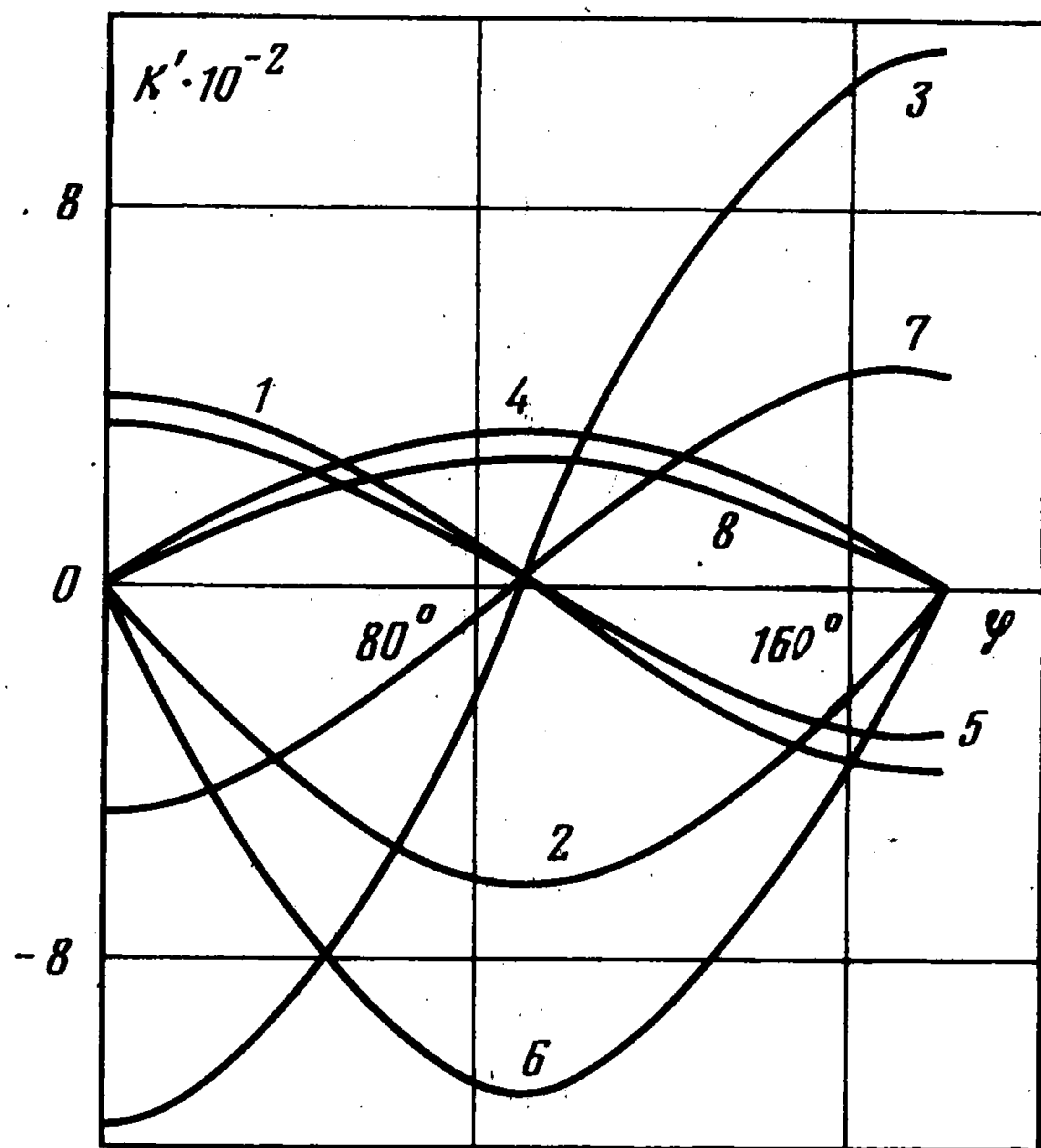
$$\left. - \frac{h\beta}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (a_1 X_m + ia_2 Y_m) \sqrt{z^2 - a^2} L_m \left(\frac{z}{a} \right) \right\}$$

Для постоянных A_0 и $\text{Re}B_0$ примем следующие значения:

$$A_0 = \text{Re}B_0 = 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Величину $\text{Im} B_0$ найдем из условия равенства нулю момента всех сил, приложенных к включению (Λ — замкнутый контур, окружающий L)

$$(3.11) \quad \text{Re} \int_{\Lambda} [\bar{\Omega}(z) + \Phi(z)] z dz = 0$$

Используя результаты работ [2, 3], можно показать, что система линейных алгебраических уравнений (3.8) будет квазирегулярной.

По аналогии с теорией трещин [4] напряженное состояние в окрестности конца включения в полярной системе координат r, θ (фиг. 1) можно представить в виде

$$(3.12) \quad \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2r}} [N_1(-1)K_1 + N_2(3)K_2 + N_1(1+2\kappa)K_3 + \\ + N_2(1-2\kappa)K_4] + O(1) \\ N_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 5 \cos^{1/2}\theta + \lambda \cos^{3/2}\theta \\ 3 \cos^{1/2}\theta - \lambda \cos^{3/2}\theta \\ \sin^{1/2}\theta - \lambda \sin^{3/2}\theta \end{pmatrix}, \quad N_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -5 \sin^{1/2}\theta + \lambda \sin^{3/2}\theta \\ -3 \sin^{1/2}\theta - \lambda \sin^{3/2}\theta \\ \cos^{1/2}\theta + \lambda \cos^{3/2}\theta \end{pmatrix}$$

Здесь K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — коэффициенты интенсивности напряжений, определяемые по формулам ($j = 1$ для точки a , $j = 2$ для точки $-a$)

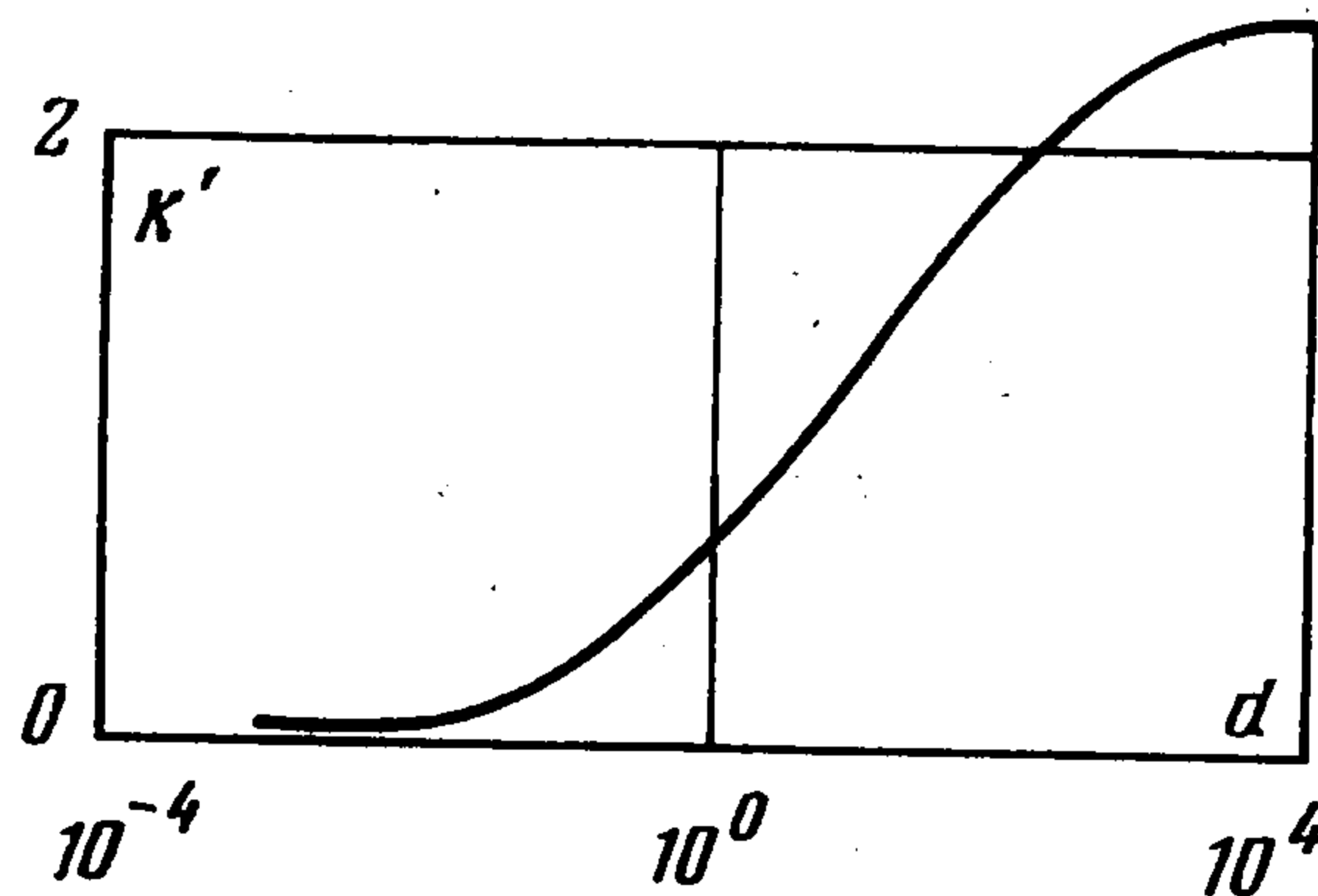
$$(3.13) \quad K_1^j - iK_2^j = -\frac{2h\mu}{\mu_0(1+\kappa)\sqrt{a}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} S_m \\ K_3^j - iK_4^j = -\frac{2h}{(1+\kappa)\sqrt{a}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} Z_m$$

В заключение отметим, что если в приведенных формулах положить $k_0 = k$, $\mu_0 = \mu$, $\kappa = \kappa_0$, $\beta = \beta_0$, то получим решение задачи для пластинки без включения. Если же в формулах (3.5), (3.6) или (3.8), (3.10) перейти к пределу соответственно при $\mu_0 \rightarrow 0$ ($k_0 = 0$) и при $\mu_0 \rightarrow \infty$ ($k_0 = 0$), при этом во втором случае должно выполняться условие

$$(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)_0 = 0$$

то получим решение задачи термоупругости для податливого включения (разреза) и абсолютно жесткого включения.

В частном случае, когда на бесконечности задан тепловой поток, получаем результаты, приведенные в работах [5, 6].



Фиг. 4

4. Результаты численного анализа. На фиг. 2—4 представлены результаты численного анализа задачи для случая, когда на пластинку действует тепловой поток (q_∞ — интенсивность потока на бесконечности). Расчеты проведены при значениях параметров $\nu = \nu_0 = 1/3$, $\alpha_0/\alpha = 0$, $k_0/k = 0$, $a/h = 10$, $T_0 = T_\infty = 0$.

На фиг. 2 показана зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $K_i' = K_i k / (\beta a^{3/2} q_\infty)$ в точке $x = a$ от относительной жесткости включения $d = \mu_0 / \mu$. Кривые 1, 3 характеризуют соответственно K_1' и K_3' при $\varphi = 0$, а кривые 2, 4 — соответственно K_2' и K_4' при $\varphi = \pi/2$. В первом случае ($\varphi = 0$) $K_2' = K_4' = 0$, во втором ($\varphi = \pi/2$) — $K_1' = K_3' = 0$. Кривые 5—8 соответствуют K_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) при $\varphi = \pi/6$.

На фиг. 3 представлена зависимость K_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) от угла φ в той же точке. Кривые 1—4 соответствуют K_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) при $d = 5$, а кривые 5—8 — при $d = 0.2$.

На фиг. 4 показана зависимость $K_i' = K_i / (\sqrt{a\beta})$ от относительной жесткости включения d при $T_0 = T_\infty = 5$ (соответствующая кривая при $T_0 = T_\infty = -5$ симметрична приведенной относительно оси абсцисс). В этом случае $K_2' = K_4' = 0$, $K_1' \approx 0$. Вычисления проведены при $q_\infty = 0$, $\nu = \nu_0 = 1/3$, $\alpha_0/\alpha = 0$, $a/h = 10$.

Поступила 19 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусое И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, Изд-во Белорусск. ун-та, 1972.
2. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ЦММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. Сулим Г. Т. Регулярність деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. механ.-матем., 1975, вип. 10.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев, «Наукова думка», 1976.
5. Sekine H. Thermal stress problem for a ribbon-like inclusion. Letters Appl. Engng. Sci., 1977, vol. 5, No. 1.
6. Sekine H. Thermal stress near tips of an insulated line crack in a semi-infinite medium under uniform heat flow. Engng. Fracture Mech., 1977, vol. 9, No. 2.