Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 539.3 : 534.1

ДОКРИТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Дается обоснование асимптотических разложений для осесимметричного докритического равновесия весьма тонкой упругой строго выпуклой оболочки вращения с неподвижным закреплением края и вывод асимптотической оценки для критической нагрузки потери устойчивости этого равновесия при осесимметричной потере устойчивости оболочки. Обсуждается вопрос об области применимости формул для асимптотических значений верхних критических нагрузок, полученных [1,2] методом пограничного слоя.

1. К постановке задачи. Рассматривается система уравнений осесимметричной деформации тонких пологих упругих оболочек вращения [3] с краевыми условиями

$$\varepsilon^2 Av - \frac{1}{2}u^2 + \theta u = 0,\ \ \varepsilon^2 Au + uv - \theta v + \varphi(r) = 0 \tag{1.1}$$

$$A(\ ) \equiv -r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r(\ ),\quad \varphi(r) = \int_0^r q(t)\,t\,dt$$

$$\theta \leqslant -\alpha^2 r,\ \alpha = \text{const} > 0,\quad \varepsilon^2 = ha^{-1}[12(1-\nu^2)]^{-1/2}$$

$$\left|\frac{v}{r},\frac{u}{r}\right|_{r=0} < \infty,\quad \left[\frac{dv}{dr} - \frac{\nu}{r}v\right]_{r=1} = 0 \tag{1.2}$$

$$\left[\frac{du}{dr} + \left(\frac{\nu}{r} + \frac{k}{\varepsilon}\right)u\right]_{r=1} = 0,\quad k \geqslant 0$$

где k — коэффициент упругого защемления края в неподвижной стенке. При $k = 0$ и $k = \infty$ соответственно формула (1.2) отвечает неподвижному шарнирному закреплению и абсолютно глухой заделке края. Все величины в (1.1), (1.2) безразмерные и связаны с размерными соотношениями, указанными в [1]. Ограничений на знак поперечного давления $q(r)$ не налагается.

Для формы равновесия в докритической стадии, согласно [1], строятся асимптотические разложения

$$v \sim v_\varepsilon \equiv \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i [v_i(r) + h_i(t)],\quad u - u_\varepsilon \equiv \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i [u_i(r) + g_i(t)] \tag{1.3}$$

$$t = (1-r)\varepsilon^{-1},\ v_0 = \varphi\theta^{-1},\ u_0 = 0$$

Здесь v_i, u_i определяются из алгебраических систем

$$\theta u_i - {}^1/{}_2 \sum_{k+j=i} u_k u_j + Av_{i-2} = 0,\quad \sum_{k+j=i} u_k v_j - \theta v_i + Au_{i-2} = 0 \tag{1.4}$$

где $u_{-1} = v_{-1} \equiv 0$. Функции краевого эффекта h_i, g_i находятся последовательно из уравнений с краевыми условиями

$$h_i'' + g_i(\eta_i g_0 - \theta_0) = th_{i-1}'' + h_{i-1}' + \sum_{k+j+2=i} t^k h_j - {}^1/{}_2 \sum_{m+n=i} g_m g_n + \tag{1.5}$$
$$+ \sum_{l+p=i} t^l \theta_l g_p - \sum_{k+l+j=i} t^l u_{kl} g_j \equiv F_{i1}, \quad g_i'' - \eta_i (h_i g_0 + g_i h_0) +$$
$$+ h_i \theta_0 - v_0(1) g_i = tg_{i-1}'' + g_{i-1}' + \sum_{k+j+2=i} t^k g_j +$$
$$+ \sum_{m+n=i} h_m g_n + \sum_{m+l+p=i} u_{ml} t^l h_p - \sum_{l+p=i} \theta_l t^l h_p + \sum_{k+l+p=i} v_{kl} t^l g_p \equiv F_{i2}$$
$$m \neq 0, \ n \neq 0, \ p \neq i; \ \eta_0 = \frac{1}{2}, \ \eta_i = 1 \ (i \geqslant 1)$$
$$\{\theta_l, u_{ml}, v_{ml}\} = \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{dr^l} \{\theta, u_m, v_m\}_{r=1}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$
$$(\ )' = d(\ )/dt, \ \{h_i, g_i\}_{t=\varepsilon^{-1}\to\infty} = 0$$

$$h_i'(0) = \left[\frac{dv_{i-1}}{dr} - \nu v_{i-1}\right]_{r=1} - \nu h_{i-1}(0), \quad h_{-1} = g_{-1} = 0 \tag{1.6}$$
$$[g_i' - kg_i]_{t=0} = \left[\frac{du_{i-1}}{dr} + \nu u_{i-1} + ku_i\right]_{r=1} + \mu g_{i-1}(0)$$

Задача (1.5), (1.6) при $i = 0$ имеет тривиальное решение $h_0 = g_0 \equiv 0$, от которого при $\varphi_0 = \varphi(1) < 2\,\theta_0^2$ не ответвляется новых решений, так как соответствующая линеаризованная задача не имеет собственных значений. В этом случае при $i \geqslant 1$ для определения h_i, g_i имеем системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В частности, при $i = 1$ находим

$$h_1 = \frac{B}{2ab}\left[a\left(\frac{2a}{z_0} + \frac{Q}{2}\right)x + b\left(\frac{2a}{z_0} + \frac{Q}{2} - 2\right)y\right] \tag{1.7}$$
$$g_1 = \frac{B}{b}\left[\left(1 - \frac{a}{z_0}\right)x + \frac{by}{z_0}\right], \quad z_0 = 2a + k(-\theta_0)^{-1/2}$$
$$x = e^{-a\tau}\sin b\tau, \quad y = e^{-a\tau}\cos b\tau, \quad \tau = \frac{1-r}{\varepsilon}(-\theta_0)^{1/2}$$
$$Q = \frac{2\varphi(1)}{\theta_0^2}, \quad B = (-\theta_0)^{-1/2}\left[\frac{d}{dr}(\varphi\theta^{-1}) - \nu\varphi\theta^{-1}\right]_{r=1}$$
$$\theta_0 = \theta(1), \quad a = \left(\frac{4-Q}{8}\right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{4+Q}{8}\right)^{1/2}, \quad \varphi(1) < 2\theta_0^2$$

(В (1.5) и (1.7) устранены описки, допущенные в формулах (2.5), (2.9) из [1].)

При $k = 0$ и $k = \infty$ формулы (1.7) переходят в соответствующие формулы (2.9) из [1]. По индукции нетрудно установить, что h_n, g_n состоят из линейных комбинаций элементов вида

$$t^m \exp\left[-(j - m)(a \pm ib)\tau\right], \quad m = 0, 1, \ldots, n - 1; \quad i = \sqrt{-1} \tag{1.8}$$
$$m < j = 1, 2, \ldots, n; \quad \varphi(1)/\theta_0^2 < 2(1 - \delta), \quad \delta = o(1)$$

Построенные асимптотические разложения (1.3) носят формальный характер и отвечают докритическому равновесию лишь при определенных условиях. Ниже проводится обоснование асимптотики при $\varepsilon \to 0$. Ради простоты изложения рассматриваются только предельные случаи $k = 0$ и $k = \infty$, т. е. краевые условия 3) и 4) в (1.2) из [1].

2. Обоснование асимптотики. Из последовательного рассмотрения задач (1.4) вытекает

Лемма 2.1. Пусть $M \geqslant n$, $\varphi(r) = \varphi_1(r^2)$, $\varphi(0) = 0$ и $z(r) = z_1(r^2)$, где функции $\varphi_1(s)$, $z_1(s)$ соответственно $M+2$ и $M+3$ раза непрерывно дифференцируемы. Тогда решения задач (1.4) — функции u_i, v_i — дважды непрерывно дифференцируемы при $0 \leqslant r \leqslant 1$ и имеют место соотношения

$$u_{2k+1} = v_{2k+1} = 0, \; k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{1}{2}(n-1)\right]; \; u_{2k} = O(r)$$

$$v_{2k} = O(r), \; Au_{2k} = O(r^2), \; Av_{2k} = O(r^2), \; k = 0, 1, \ldots, [n/2]$$

Введем обозначения

$$\varphi_n = \varphi(r)\,\theta^{-1}(r) + \varepsilon s_2(r, \varepsilon), \quad \psi_n = \varepsilon s_1(r, \varepsilon) \tag{2.1}$$

$$s_1(r, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{i-1} u_i + \sum_{i=1}^{N_0} \varepsilon^{i-1}(g_i + \beta_i) + \varepsilon^n \gamma_1$$

$$s_2(r, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{i-1} v_i + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^{i-1}(h_i + \alpha_i) + \varepsilon^n \gamma_2$$

Здесь α_i, β_i — экспоненциального порядка малости по ε бесконечно дифференцируемые монотонные функции, причем $\beta_i(r) = -g_i(\varepsilon^{-1})$, $\alpha_i(r) = -h_i(\varepsilon^{-1})$ при $0 \leqslant r \leqslant 0.1$ и $\beta_i(r) = \alpha_i(r) \equiv 0$ при $0.2 \leqslant r \leqslant 1$, а произвольные достаточно гладкие функции $\gamma_1(r)$ и $\gamma_2(r)$ удовлетворяют соотношениям

$$|\gamma_1 / r, \; \gamma_2 / r|_{r=0} < \infty, \; \left[\frac{d\gamma_2}{dr} - \nu\gamma_2\right]_{r=1} = \nu h_{n+1}(0)$$

$$\left[\frac{d\gamma_1}{dr} + \nu\gamma_1\right]_{r=1} = -\nu g_{n+1}(0), \quad N_0 = n+1, \quad k = 0$$

Если $k = \infty$, то $N_0 = n$ и $\gamma_1 \equiv 0$. Функции $(\varepsilon^i\beta_i, \varepsilon^i\alpha_i)$ и (γ_1, γ_2) соответственно компенсируют невязки в выполнении граничных условий (1.2) при $r = 0$ и $r = 1$ для разложений $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$. В результате (φ_n, ψ_n) точно удовлетворяют всем краевым условиям задачи и имеют место оценки

$$\max \left| \frac{d^\varkappa z}{dr^\varkappa} \right| < m_1 \varepsilon^{n+1}, \quad \varkappa = 0, 1, 2 \tag{2.2}$$

где $z = u_\varepsilon - \psi_n$ или $z = v_\varepsilon - \varphi_n$. Здесь, как и всюду в п. 2, m_i, c_i — некоторые положительные постоянные, не зависящие от r и ε; максимум везде берется при $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Кроме того, применяя лемму 2.1, соотношения

$$\max |r^{-1}(g_i + \beta_i)| \leqslant \max \left| \frac{dg_i}{dr} \right| \tag{2.3}$$

и аналогичные оценки для h_i, имеем неравенства

$$|\varphi_n - \varphi\theta^{-1}| \leqslant m_2 r\varepsilon, \quad |\psi_n| \leqslant m_2 r\varepsilon, \quad |\varphi\theta^{-1}| \leqslant m_0 r \tag{2.4}$$

Лемма 2.2. Пусть выполняются условия леммы 2.1, $\varepsilon \to 0$ и δ_2 — сколь угодно малое, не зависящее от ε положительное число, $\delta_2 = o(1)$. Тогда при $Q < 4 - \delta_2^2$ для φ_n, ψ_n имеют место оценки

$$F_1(r, \varepsilon) \equiv \varepsilon^2 A\varphi_n - {}^1/_2\,\psi_n^2 + \theta\psi_n = O(r\varepsilon^{n+1}) \tag{2.5}$$

$$F_2(r, \varepsilon) \equiv \varepsilon^2 A\psi_n + \varphi_n\psi_n - \theta\varphi_n + \varphi(r) = O(r\varepsilon^{n+1})$$

$$(|F_1(r, \varepsilon)| \leqslant m_3 r\varepsilon^{n+1}, \quad |F_2(r, \varepsilon)| \leqslant m_3 r\varepsilon^{n+1}),$$

Доказательство. Подставим (2.1) в (1.1) и, используя (1.4), получим

$$F_1(r,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n+1}\varepsilon^{i+2}Ah_i^\circ-\sum_{m+k=1}^{n+N_0}\varepsilon^{m+k}u_m g_k^\circ-{}^1/_2\sum_{j+k=2}^{2N_0}\varepsilon^{j+k}g_j^\circ g_k^\circ+ \tag{2.6}$$

$$+\theta\sum_{k=1}^{N_0}\varepsilon^k g_k^\circ+\varepsilon^{n+3}A\gamma_2+\varepsilon^{n+1}\gamma_1\left[-\sum_{m=1}^{n}\varepsilon^m u_m-\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k g_k^\circ+\theta-{}^1/_2\varepsilon^{n+1}\gamma_1\right]$$

$$g_k^\circ=g_k+\beta_k,\quad h_k^\circ=h_k+\alpha_k,\quad 1\leqslant m\leqslant n,\quad 1\leqslant j,\quad k\leqslant N_0$$

Выражение для $F_2(r,\varepsilon)$ имеет аналогичный вид. Рассмотрим правую часть (2.6) при $r\in[0, 0.25)$. Заметим, что при $y_i=g_i^\circ$ или $y_i=h_i^\circ$ имеют место соотношения

$$\lim_{r\to 0}\frac{Ay_i}{r}=-\frac{3}{2}\frac{d^2y_i}{dr^2}\bigg|_{r=0},\quad\left|\frac{Ay_i}{r}\right|\leqslant\frac{5}{2}\max\left|\frac{d^2y_i}{dr^2}\right| \tag{2.7}$$

Теперь, используя (2.3), (2.7) и учитывая, что при $Q<4-\delta_2^2$ на отрезке $[0, 0.25)$ погранслои h_i, g_i вместе со своими производными стремятся к нулю быстрее, чем любая степень ε, устанавливаем (2.5). При $r\in[0.25, 1]$ оценка (2.5) вытекает из (2.6) после перехода к переменной t при помощи (1.5), (1.6) и оценок для элементов вида (1.8).

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия леммы 2.1 при $M>7$ ($M=N+4$), $\varepsilon\to 0$ и δ — сколь угодно малое, не зависящее от ε положительное число ($\delta=o(1)$) и

$$\max\left[\varphi(r)\,\theta^{-2}(r)\right]\leqslant 2(1-\delta) \tag{2.8}$$

Тогда найдется значение ε_1, такое, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ и достаточно малой окрестности асимптотических разложений $(v_\varepsilon, u_\varepsilon)$ из (1.3) для каждой из задач (1.1), (1.2) существует единственное решение (v, u), для которого при $n=0, 1, \ldots, N$ справедливы оценки

$$\max|v-v_\varepsilon|\leqslant m\varepsilon^{n+1},\quad\max|u-u_\varepsilon|\leqslant m\varepsilon^{n+1} \tag{2.9}$$

Кроме того, при $n=N+j$ $(j=1, 2, 3, 4)$ имеем

$$\max|v-v_\varepsilon|\leqslant m\varepsilon^{N+1},\quad\max|u-u_\varepsilon|\leqslant m\varepsilon^{N+1}$$

Доказательство. Применим метод обоснования асимптотики, развитый в работах [4,5]. Задачу (1.1), (1.2) будем рассматривать как операторное уравнение

$$\mathbf{P}(\mathbf{V})=0,\quad\mathbf{V}\equiv(v, u) \tag{2.10}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — решение, а оператор P определяется левой частью системы (1.1) и действует из пространства X, замыкания множества гладких вектор-функций $\mathbf{V}\equiv(v, u)$, удовлетворяющих краевым условиям (1.1), (1.2), по норме

$$\|\mathbf{V}\|_X^2=\int_0^1\left[(Av)^2+(Au)^2\right]dr$$

в пространстве Y, вектор-функций $\mathbf{V}$ с конечной нормой

$$\|\mathbf{V}\|_Y^2=\int_0^1(v^2+u^2)\,dr=\|v\|^2+\|u\|^2$$

Согласно [4,5], для обоснования асимптотики надо доказать, что при $\varepsilon \to 0$ выполняется неравенство

$$(2.11)\qquad \|\mathbf{P}(V_\varepsilon)\|_Y \|[P'_{\mathbf{V}_\varepsilon}]^{-1}\|^2_{(Y\to X)} \|\mathbf{P}''\|_{(X\to(X\to Y))} < 1/2$$

где $\mathbf{V}_\varepsilon \equiv (\varphi_n, \psi_n)$ — асимптотические разложения, $\mathbf{P}'_{\mathbf{V}_\varepsilon}$ — производная Фреше на элементе V_ε и $\mathbf{P}''$ — вторая производная оператора $\mathbf{P}$.

Лемма 2.3. Пусть выполняются условия леммы 2.2. Тогда имеют место оценки

$$(2.12)\qquad \|\mathbf{P}(\mathbf{V}_\varepsilon)\|_Y \leqslant c_1\varepsilon^{n+1}, \qquad \|\mathbf{P}''\| \leqslant c_3, \qquad \mathbf{V}_\varepsilon \equiv (\varphi_n, \psi_n)$$

Лемма 2.4. Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда имеет место оценка

$$(2.13)\qquad \|[\mathbf{P}'_{\mathbf{V}_\varepsilon}]^{-1}\|_{(Y\to X)} \leqslant c_2\varepsilon^{-4}$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$(2.14)\qquad \mathbf{P}'_{\mathbf{V}_\varepsilon}(\mathbf{V}) = f, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2), \qquad \mathbf{V} \equiv (v, u)$$

$$\mathbf{P}'_{\mathbf{V}_\varepsilon}(\mathbf{V}) = \left\{\varepsilon^2 Av - \varepsilon s_1 u + \theta u,\ \varepsilon^2 Au + \frac{\varphi u}{\theta} + \varepsilon s_2 u + \varepsilon s_1 v - \theta v\right\}$$

где $\mathbf{P}'_{\mathbf{V}_\varepsilon}$ — производная Фреше на элементе $\mathbf{V}_\varepsilon$.

При $k = \infty$ умножим первое уравнение (2.14) на $v - 2u + \delta u$, а второе — на $u + \varepsilon v$. Складывая и интегрируя по частям, с учетом краевых условий находим

$$(2.15)\qquad \varepsilon^2 I_1 + (2-\delta) I_2 + \varepsilon I_3 + \int_0^1 \varphi\theta^{-1}u^2 dr - \varepsilon^2 \nu v^2(1) + I_4 +$$

$$+ I_5 + I_6 - \varepsilon^3 v(1)\, u'(1) = \int_0^1 [f_1(v - 2u + \delta u) + f_2(u + \varepsilon v)]\, dr$$

$$I_1 = \int_0^1 \left(rv'^2 + ru'^2 + \frac{v^2}{r} + \frac{u^2}{r}\right) dr, \quad I_2 = -\int_0^1 \theta u^2 dr \geqslant 0$$

$$I_3 = -\int_0^1 \theta v^2 dr \geqslant 0, \quad I_4 = \varepsilon \int_0^1 \varphi\theta^{-1} uv\, dr$$

$$I_5 = \varepsilon \int_0^1 [s_2 u^2 + (2-\delta) s_1 u^2 + \varepsilon s_2 uv + \varepsilon s_1 v^2]\, dr$$

$$I_6 = \varepsilon^2(\delta + \varepsilon - 2) \int_0^1 \left(rv'u' + \frac{uv}{r}\right) dr$$

Отметим следующие неравенства:

$$(2.16)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^2 v^2(1) \leqslant \varepsilon^{5/2} m_1 I_1 + \varepsilon^{3/2} m_2 I_3, \quad |I_4| \leqslant m_3(\varepsilon^{1/2} I_2 + \varepsilon^{3/2} I_3)\\ &|I_5| \leqslant m_4\varepsilon(I_2 + \varepsilon I_3)\\ &|I_6| \leqslant \varepsilon^2(1 - 1/4\,\delta)\, I_1, \quad m_1 = \theta_0^{-2}\max(\theta^2 r^{-1})\\ &m_2 = \theta_0^{-2}\max(|\theta| + 2\varepsilon^{1/2}|\theta'|), \quad m_3 = 1/2\max|\varphi\theta^{-2}|\\ &m_4 = 2\max[\theta^{-1}(|s_1| + |s_2|)], \quad \varepsilon < 1/2\,\delta \end{aligned}$$

Чтобы оценить слагаемое $v(1)u'(1)$, умножим второе уравнение из (2.14) на ru', проинтегрируем от 0 до 1 и применим неравенство Коши—Буняковского. В результате получим

(2.17) $$|\varepsilon^3 u'(1)v(1)| \leqslant \varepsilon^2 m_7 v^2(1) + {}^1/_4\varepsilon^{3/2}(3\varepsilon I_1 + I_2 + I_3 + \| r^{1/2} f_2 \|^2), \quad m_7 = {}^1/_2 + m_5{}^2$$

$$m_5 = \max\left(\left| \frac{r\varphi^2}{\theta^3} \right|^{1/4} + \varepsilon^{1/2} \left| \frac{r s_2{}^2}{\theta} \right|, \quad |r\theta|^{1/4} + \varepsilon^{1/2} \left| \frac{r s_1{}^2}{\theta} \right|^{1/4} \right)$$

Наконец, используя (2.16) и (2.17), из (2.15) имеем

(2.18) $${}^1/_8\varepsilon^2\delta I_1 + 2(1-\delta) I_2 + \varepsilon(1-\delta) I_3 + \int_0^1 \varphi\theta^{-1}u^2 dr \leqslant$$

$$\leqslant \|f_1\| \, \|v - 2u + \delta u\| + \|f_2\| \, \|u + \varepsilon v\| + {}^1/_4\varepsilon^{3/2} \|r^{1/2} f_2\|^2$$

При этом ε удовлетворяет условию

$$\varepsilon^{1/2}(m_2 + m_3 + m_4\varepsilon^{1/2} + m_2 m_7 + \varepsilon^2 m_1 + \varepsilon^2 m_1 m_7) < \delta$$

Применяя (2.8), из (2.18) получаем оценку

(2.19) $$\max|u| + \max|v| \leqslant m_8\varepsilon^{-2} \|\mathbf{f}\|_Y$$

Теперь (2.13) выводится при помощи (2.19) из (2.14) аналогично [5].

В случае $k = 0$ оценка (2.13) получена в [1] для частного случая $\theta = -\lambda r$, $\varphi(r) = {}^1/_2 q r^2$. В общем случае умножим первое уравнение системы (2.14) на $\delta_1 v - u$, а второе — на $\delta_1 u + v$, где δ_1 — некоторое малое положительное число. Интегрируя от 0 до 1 и складывая, получим

(2.20) $$\delta_1\varepsilon^2 [I_1 + \nu u^2(1) - \nu v^2(1)] + 2\nu\varepsilon^2 u(1) v(1) + I_2 +$$

$$+ I_3 + \delta_1 \int_0^1 \varphi\theta^{-1}u^2 dr + \int_0^1 \varphi\theta^{-1}uv dr + I_7 = \int_0^1 [(\delta_1 f_1 + f_2) v + (\delta_1 f_2 - f_1) u] dr$$

$$I_7 = \varepsilon \int_0^1 (\delta_1 s_2 u^2 + \delta_1 s_2 uv + s_1 v^2 + s_1 u^2) dr$$

(Здесь устранена описка в формуле (5.7) работы [1], где в подынтегральном выражении вида I_7 вместо $s_2 uv + s_1 wv$ должно быть $\delta_1 s_2 uv + s_1 u^2$.) Применяя оценку

$$|I_7| \leqslant m_9\varepsilon(I_2 + I_3), \qquad m_9 = \max[(|s_1| + 1.5\ \delta_1 |s_2|)\theta^{-1}]$$

и первое неравенство в (2.16), из (2.20) выводим

$$0.5\ \delta_1\varepsilon^2 I_1 + (1-4\ \delta_1^2)(I_2 + I_3) - (0.5 + \delta_1)(I_2 + I_3) \times$$
$$\times \max|\varphi\theta^{-2}| \leqslant (\|f_1\| + \|f_2\|)(\|v\| + \|u\|)$$

где ε удовлетворяет условиям

$$4m_1\varepsilon^{1/2} < \delta_1, \quad (2\nu + \delta_1) m_2\varepsilon^{3/2} < 4\delta_1^2$$

Полагая $\delta = 2\delta_1$ и учитывая (2.8), отсюда находим (2.19) и аналогично [5] оценку (2.13).

При помощи (2.12), (2.13) проверяем, что все условия теоремы 3.2 из [5] и, в частности, условия (2.11) выполняются при $k = M$, $m = 4$, если $M > 7$ и ε достаточно мало ($0 < \varepsilon < \varepsilon_1$). Поэтому задача (2.10) имеет решение, для которого справедлива оценка $\| \mathbf{V} - \mathbf{V}_\varepsilon \| \leqslant m\varepsilon^{M-3}$. Теперь, применяя неравенство треугольника, аналогично [5] получаем оценки (2.9).

3. Асимптотические оценки для верхней критической нагрузки. Из теоремы 2.1 вытекают оценки снизу для асимптотического значения верхней критической нагрузки при осесимметричном прощелкивании оболочек с неподвижным закреплением края. Предположим, для простоты, что функция нагрузки зависит от одного параметра ρ, т. е. $\varphi(r, \rho)$ и $\varphi(r, 0) = 0$.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия теоремы 2.1, $\varepsilon \to 0$ и δ — сколь угодно малое, не зависящее от ε положительное число ($\delta = o(1)$). Тогда верхнее критическое значение ρ^* [1] для задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет неравенству

$$\max [\varphi (r, \rho^*)\, \theta^{-2} (r)] > 2 (1 - \delta)$$

Теорема непосредственно следует из того факта, что при условии (2.8) в окрестности V_ε существует единственное решение.

После работ А. В. Погорелова хорошо известно, что достаточно тонкие строго выпуклые оболочки могут терять устойчивость с образованием локальных вмятин вдали от края («принцип В» [6], см. также работы [7–9]). В статьях автора [1, 2] рассматривался тип потери устойчивости, который соответствует локальному выпучиванию оболочки вблизи края. Поэтому критические значения, указанные в [1, 2], следует рассматривать как асимптотические значения верхних критических нагрузок локального выпучивания вблизи края в предположении, что число азимутальных волн не слишком быстро нарастает при $\varepsilon \to 0$. Эти нагрузки в общем случае дают лишь асимптотическую оценку сверху для верхней критической нагрузки, определяемой как наинизшая точка ветвления. В случае, когда локальные вмятины не успевают образоваться, верхняя критическая нагрузка не только оценивается, а точно определяется критической нагрузкой потери устойчивости в зоне краевого эффекта. Этот случай имеет место при осесимметричной деформации сферической оболочки под равномерным внешним давлением при подвижной шарнирной опоре и скользящем защемлении края [1], а также в случае неподвижного закрепления края [9], когда образование локальных вмятин происходит с выпучиванием любой части внутри оболочки и на краю при асимптотически совпадающих значениях давления. Таким образом, формула (4.4) в [1] должна применяться, когда функция $\varphi\theta^{-2}$ имеет максимум при $r = 1$.

В общем случае, когда максимум $\varphi\theta^{-2}$ достигается внутри области в точке r_* и вмятина не мала ($r \geqslant r_*$, $r_*\varepsilon^{-1} \gg 1$ — локальное выпучивание начинается вдали от полюса оболочки), в работе [9] для задачи (1.1), (1.2) для верхней критической нагрузки формально получена асимптотическая формула

$$\sup_r (\varphi (r, \rho^*)\, \theta^{-2} (r)) = 2 \tag{3.1}$$

В случае гладкости $\varphi\theta^{-2}$ теорема 3.1 гарантирует, что эта формула дает точную оценку снизу для ρ^*, когда указанный максимум достигается при $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Пусть далее индексы $j = 1$—4 соответствуют краевым условиям 1) —4) в (1.2) из [1]. Тогда при краевых условиях 1) и 2) верхняя критическая нагрузка Ω_j^* (как наинизшая точка ветвления при $\varepsilon \to 0$) определяется формулами

$$\Omega_j^* = \min (\rho^*, \rho_j^*), \quad j = 1,\ 2 \tag{3.2}$$

где ρ_1^* и ρ_2^* определяются из соотношений [1]

$$\varphi (1, \rho_1^*)\, \theta^{-2} (1) = 0.3965, \quad \varphi (1, \rho_2^*)\, \theta^{-2} (1) = 0.8835$$

Приведем примеры численных расчетов для сферических оболочек ($\theta = -r$) под действием переменных по радиусу нагрузок. Пусть $q = 4\rho (1 - r^2)$. При $b = 30,\ 75,\ 150,\ 250$ в случаях 1) — 4) соответственно для критических значений имеем $\rho_1^c = 0.366,\ 0.384,\ 0.390,\ 0.392$; $\rho_2^c =$

$= 0.780, 0.843, 0.864, 0.872$; $\rho_{3,4}{}^c = 1.052, 1.010, 1.005, 1.003$. Эти результаты хорошо согласуются с формулами (3.1), (3.2), которые дают асимптотические значения $\rho_1{}^c(\infty) = 0.396$, $\rho_2{}^c(\infty) = 0.883$, $\rho_{3,4}{}^c(\infty) = 1.00$. Численные результаты для $\rho_4{}^c$ при $b \leqslant 12$ даны в [10]. Пусть $q = 4\rho r^2$. Тогда численные расчеты для критических значений ρ_j^c дают расхождение до 5% с асимптотическими значениями соответственно для $j = 1, 2, 3, 4$ при $b \geqslant 20$, 40, 100, 400. Здесь при неподвижном закреплении края $\rho_{3,4}{}^c(b)$ медленно выходят на асимптотику.

При учете неосесимметричных деформаций [10–13] верхней критической нагрузке могут соответствовать как симметричные, так и несимметричные (с различным числом азимутальных волн) формы потери устойчивости. Результат довольно сложным образом зависит от формы оболочки и распределения давления [1]. В качестве примера неосесимметричной потери устойчивости укажем сферические оболочки с одним из распределений давления: $4\rho \sin(\pi r / 2)$, $4\rho r^m$, $4\rho(1 + r^m)$, $m = 2, 4$. В этих случаях численные и асимптотические расчеты с применением формул (1.3), (1.7) показывают, что критические нагрузки выпучивания по неосесимметричным формам $\rho_j{}^H$ меньше соответствующих нагрузок осесимметричной потери устойчивости $\rho_j{}^c$. Вместе с тем при внешнем давлении $4\rho(1 - \alpha r^2)$ в зависимости от параметра α возможны как осесимметричная, так и неосесимметричные формы потери устойчивости, что следует из приводимых ниже результатов

α	$\rho_{3,4}^{c}(\infty)$	$\rho_3^{H}(\infty)$	σ_3^*	$\rho_4^{H}(\infty)$	σ_4^*
0.1	1.0	0.793	0.613	0.912	0.705
0.2	1.0	0.897	0.568	1.036	0.644
0.3	1.0	1.025	0.519	1.170	0.580

При $0.3 \leqslant \alpha \leqslant 1.0$ потеря устойчивости происходит по осесимметричным формам, причем $\rho_{3,4}{}^c(\infty) = 1.0$. Здесь $\sigma_i{}^* = \lim n^2 / b^2$ при $n \to \infty$, $b \to \infty$.

4. Пологая сферическая оболочка при равномерном внешнем давлении. Как известно, критические давления равномерно нагруженных сферических оболочек определяются формулой

$$p_i(b) = \frac{2Eq_i(b)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad b^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{a^2}{hR} \tag{4.1}$$

где h — толщина оболочки, R — радиус сферы, a — радиус опорного контура, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга. Значения $q_i(b)$ для осесимметричной потери устойчивости вычислялись многими авторами и найдены в [10] для $b \leqslant 60$ при $i = 1$ и $b \leqslant 42$ при $i = 2, 3, 4$. Для больших b критические давления выходят на асимптотические значения [6, 1]

$$q_1(\infty) = 0.198, \quad q_2(\infty) = 0.442, \quad q_3(\infty) = q_4(\infty) = 1.0 \tag{4.2}$$

[1] См. работу [21], а также статью: *Бермус И. М., Срубщик Л. С.* Применение численных и асимптотических методов для расчета верхних критических нагрузок упругих сферических оболочек. Ростовск. ун-т, 1979, деп. ВИНИТИ, № 2378-79.

Для определения границ применимости асимптотики на БЭСМ-6 были проведены численные расчеты верхних критических давлений для $b \leqslant 300$.

Численная программа была составлена по модифицированному алгоритму работы [13] и проверялась для $b \leqslant 42$ при сравнении с результатами [10]. Под критическим значением q_i принималось значение q, при котором в интервале $(q_i, q_i + \Delta q)$, где $\Delta q < 10^{-4}$, происходила смена знака функции

$$D(q) = \frac{\det B_2}{|\det B_2|} \prod_{i=2}^{N} \frac{\det(B_i + A_i Q_{i-1})}{|\det(B_i + A_i Q_{i-1})|} \det(G + HQ_N - GQ_{N-1}Q_N)$$

где сохранены обозначения работы [13]. Часть найденных значений $q_n^\circ = 10^4 \times q_n(b)$ для $\nu = 0.33$ помещена ниже

b	60	100	150	250
q_1°	1945	1958	1965	1970
q_2°	4343	4376	4393	4405
q_3°	9722	9845	9900	9942
q_4°	9829	9996	10000	9985

Для подвижного закрепления края ($i = 1,2$) расхождение численных и асимптотических значений [1] не превышает 5% при $b \geqslant 20$ и 1% при $b \geqslant 100$. Для неподвижного шарнирного закрепления это расхождение не более 4% при $b \geqslant 45$ и 1% при $b \geqslant 150$, а в случае глухой заделки края [6] не более 5% при $b \geqslant 30$ и 1% при $b \geqslant 85$.

Отметим, что осесимметричная потеря устойчивости, как правило, в этой задаче связана с явлением прощелкивания, т. е. критические значения являются предельными точками. Исключение представляют точки слияния $q_4(b)$ при $b_1 = 8.348$, $b_2 = 14.987$, обнаруженные в [14]. Исследование при помощи метода пристрелки показало, что $q_4(b_1)$ и $q_4(b_2)$ являются точками бифуркации. (При $b \geqslant 15$ аналогичное исследование не проводилось.)

Из теорем 2.1 и 3.1 для равномерно нагруженных сферических оболочек вытекает.

Теорема 4.1. Пусть $\varepsilon \to 0$ и $\theta = -\lambda r$, $\lambda = a / R$, $\varphi(r) = {}^1/_2\, qr^2$. Тогда для сколь угодно малого $\delta > 0$ ($\delta = o(1)$) найдется такое значение ε_1, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ в задаче (1.1), (1.2) верхнее критическое давление q^* удовлетворяет неравенству $q^* \geqslant 4\lambda^2 - \delta$. При этом для всех $q < 4\lambda^2 - \delta$ в достаточно малой окрестности v_ε, u_ε из (1.3) существует только одно решение и при $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы оценки

$$\max |v - v_\varepsilon| \leqslant m\varepsilon^{n+1}, \max |u - u_\varepsilon| \leqslant m\varepsilon^{n+1} \tag{4.3}$$

Здесь устранена неточность, допущенная автором при формулировке этой теоремы в случае 3) в (1.2) (см. [1], стр. 712). Вместо $\delta = O(\varepsilon)$ в [1] должно быть $\delta = o(1)$.

Отметим, что (4.3) в случае $k = 0$ улучшает аналогичную оценку (5.2) в [1]. При $k > 0$ в (1.2) теорема формулируется впервые. Строгое доказательство оценки сверху для $q_3(\infty)$ и $q_4(\infty)$ автору неизвестно.

Применяя уравнения Маргерра — Власова к задаче о равномерно нагруженной сферической оболочке при глухой заделке края, Хуан [11] вычислил критические давления $p_H(b)$, при которых осесимметричная форма равновесия может выпучиваться в неосесимметричные формы. В частности, при $b \to \infty$, $n \to \infty$ было найдено соответствующее асимптотическое значение $p_H(\infty) = 0.810\ p_4(\infty)$, $n^2 b^{-2} \equiv \sigma \to 0.728$, где n — номер гармоники собственной функции, отвечающей значению $p_H(b)$ (здесь приведено исправленное значение $p_H(\infty)$ [12]). Отметим также, что значения $p_H(\infty)$ в зависимости от k даны в [21].

Экспериментальные данные [15] оказались близкими к критическим нагрузкам Хуана, однако они ничего не дают в пользу результатов неосесимметричной теории. В самом деле, согласно расчетам [11], потеря устойчивости для $b \geqslant 5.5$ должна носить неосесимметричный характер и число n (волн в азимутальном направлении) должно расти вместе с b, а в экспериментах [15] при $b \geqslant 5.5$ из девяти оболочек шесть имели после опыта осесимметричную форму, а остальные три с $n = 1$, как показано в [16], могли быть неупругими при нагрузках, близких к критическим значениям. Кроме того, все испытанные оболочки в [15] не удовлетворяли критерию пологости.

Более поздние и прецизионные эксперименты [16–20] не подтвердили теорию Хуана, но показали хорошее согласие с существующей симметричной теорией. В частности, описано [20] экспериментально наблюдаемое явление осесимметричного краевого эффекта.

Выяснение причин такого несоответствия экспериментальных данных и результатов теории требует дополнительных исследований.

Автор благодарит В. И. Юдовича за обсуждение работы.

Поступила 13 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Срубщик Л. С.* Асимптотический метод определения критических нагрузок потери устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
2. *Срубщик Л. С.* О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Феодосьев В. И.* Упругие элементы точного приборостроения. М., Оборонгиз, 1949.
4. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.* Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
5. *Срубщик Л. С.* Нежесткость сферической оболочки. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
6. *Погорелов А. В.* Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., «Наука», 1966.
7. *Ворович И. И.* Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1.
8. *Жуков М. Ю., Срубщик Л. С.* Поведение замкнутой сферической оболочки после потери устойчивости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
9. *Бабенко В. И.* Асимптотический анализ послекритического поведения пологих строго выпуклых оболочек вращения. В сб.: Математическая физика и функциональный анализ. Вып. 4, Харьков, 1973.
10. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М., «Машиностроение», 1976.
11. *Huang Nai-Chien.* Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical sheels. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 3.
12. *Григолюк Э. И., Липовцев Ю. В.* Локальная устойчивость упругих оболочек вращения. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
13. *Fitch J. R.* The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load. Internat. J. Solids and Struct., 1968, vol. 4, No. 4, p. 421—446.
14. *Keller H. B., Wolfe A. W.* On the equilibrium states and buckling mechanism of spherical shells. J. Soc. Indust. and Appl. Math., 1965, vol. 13, No. 3, p. 674—705.
15. *Krenzke M. A., Kiernan T. J.* Elastic stability of near-perfect shallow spherical shells. AIAA J., 1963. vol. 1, No. 12. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 12.)
16. *Parmerter R. R.* Unsymmetric buckling of thin shallow spherical shells. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механика, 1965, № 2.)

17. *Погорелов А. В.* Исследование потери устойчивости сферической оболочки под внешним давлением. Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 4.
18. *Evan-Iwanowski R. M., Loo T. C., Chia C. Y.* Influence of imperfections on mechanism of buckling of shallow spherical shells. Office Aerospace Res. Aerospace Res. Laboratory Technical Report AFFDL-TR-8, 1965.
19. *Tillman S. C.* On the buckling behaviour of shallow spherical caps under uniform pressure load. Internat. J. Solids and Struct., 1970, vol. 6, No. 1, p. 37—52.
20. *Sunakawa M., Ichida K.* A high precision experiment on the buckling of spherical caps subjected to external pressure. Rept Inst. of Space and Aeronaut. Sci., 1974, No. 508.
21. *Бермус И. М., Срубщик Л. С.* Асимптотические формулы для расчета верхних критических нагрузок пологих сферических оболочек и границы их применимости. В сб.: Устойчивость пространственных конструкций. Киев, Киевск. инж.-строит. ин-т, 1978, стр. 39—43.