

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН В СЛОЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В. В. Калинин, И. Б. Полякова

(Ростов-на-Дону)

С позиций линеаризованной теории распространения упругих волн [1,2] развивается подход к изучению особенностей возбуждения вибрирующим штампом предварительно напряженного слоя, нижняя грань которого жестко закреплена. Среда предполагается сжимаемой, первоначально изотропной, имеющей упругий потенциал произвольной формы, колебания штампа — гармоническими.

Строятся интегральные уравнения и системы интегральных уравнений задач о вибрации на поверхности слоя произвольного в плане, кругового в плане и полосового штампа.

На примере задачи о вибрации штампа, лежащего без трения на поверхности слоя, проводится численный анализ дисперсионных кривых, а для случая полосового штампа — контактного давления в зависимости от интенсивности начального напряженного состояния среды. Последнее предполагается однородным, т. е. [1,2]

$$u_n^0 = \delta_{in} (\lambda_i - 1) x_n, \quad n = 1, 2, 3$$

$$\lambda_i = \text{const}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} \neq \sigma_{33}^{*0}$$

(u_n^0 — составляющие вектора начального смещения точек слоя, λ_i — относительные удлинения волокон, σ_{ii}^{*0} — компоненты тензора обобщенных начальных напряжений, δ_{in} — символ Кронекера).

1. Решение задачи о возбуждении слоя $0 \leq x_3 \leq h$, $|x_1|, |x_2| < \infty$ с указанными выше свойствами, поверхностной нагрузкой.

$$(1.1) \quad q(x_1, x_2) e^{-i\omega t}, \quad q = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$x_1, x_2 \in \Omega, \quad u^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

(α, β — параметры преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2 , Ω — область, вне которой нагрузка отсутствует) с помощью принципа предельного поглощения представляется в виде

$$(1.2) \quad u_k(x_1, x_2, 0) = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = U_j(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$(1.3) \quad U_j(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^3 \iint_{\Omega} q_n(\xi, \eta) k_{jn}(x_3, \xi - x_1, \eta - x_2) d\xi d\eta$$

$$k_{jn}(x_3, s, t) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \Delta_j^n e^{i[\alpha s + \beta t]} d\alpha d\beta$$

$$(1.4) \quad \Delta_1^n = \Delta_{1n} (\text{sh } \sigma_1 x_3 + k \text{ sh } \sigma_2 x_3) + \Delta_{2n} (\text{ch } \sigma_1 x_3 - \text{ch } \sigma_2 x_3) + \Delta_{3n} \text{ sh } \sigma_3 x_3$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2^n &= [\Delta_{1n} (\operatorname{sh} \sigma_1 x_3 + k \operatorname{sh} \sigma_2 x_3) + \Delta_{2n} (\operatorname{ch} \sigma_1 x_3 - \operatorname{ch} \sigma_2 x_3)] \times \\
&\times \beta \alpha^{-1} - \alpha \beta^{-1} \Delta_{3n} \operatorname{sh} \sigma_3 x_3 \\
\Delta_3^n &= i \alpha^{-1} [\Delta_{1n} (f_1 \operatorname{ch} \sigma_1 x_3 + k f_2 \operatorname{ch} \sigma_2 x_3) + \Delta_{2n} \times \\
&\times (f_1 \operatorname{sh} \sigma_1 x_3 - f_2 \operatorname{sh} \sigma_2 x_3)] \\
\Delta_{11} &= -l_3 T_1 T_5, \quad \Delta_{12} = \alpha \beta^{-1} T_1 T_5, \quad \Delta_{13} = i \alpha (l_3 - 1) T_2 T_5 \\
\Delta_{21} &= l_3 T_3 T_5, \quad \Delta_{22} = \alpha \beta^{-1} T_3 T_5, \quad \Delta_{23} = -i \alpha (l_3 - 1) T_4 T_5 \\
\Delta_{31} &= T_1 T_4 - T_2 T_3, \quad \Delta_{32} = -\alpha \beta^{-1} \Delta_{31}, \quad \Delta_{33} = 0, \quad \Delta = (1 - l_3) \times \\
&\times T_5 \Delta_{31} \\
T_1 &= m_1 \operatorname{ch} \sigma_1 h - m_2 \operatorname{ch} \sigma_2 h, \quad T_2 = \frac{l_1}{\sigma_1} \operatorname{sh} \sigma_1 h - \frac{l_2}{\sigma_2} \operatorname{sh} \sigma_2 h \\
T_3 &= m_1 \operatorname{sh} \sigma_1 h - k m_2 \operatorname{sh} \sigma_2 h, \quad T_4 = \frac{l_1}{\sigma_1} \operatorname{ch} \sigma_1 h + k \frac{l_2}{\sigma_2} \operatorname{ch} \sigma_2 h \\
T_5 &= A_3 \sigma_3 \operatorname{ch} \sigma_3 h \\
(1.5) \quad l_k &= A_3 \sigma_k^2 + \lambda_1 \lambda_3 \mu_{13} d_k, \quad k = 1, 2, \quad d_k = -\frac{A_3}{A_5} \sigma_k^2 + \frac{S_1}{A_5} \\
m_k &= \lambda_1 \lambda_3 a_{31} u^2 - A_6 d_k, \quad l_3 = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad k = \frac{d_1 \sigma_2}{d_2 \sigma_1}, \quad f_k = -i \frac{\alpha d_k}{\sigma_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1.6) \quad \sigma_{1,2} &= \left(\frac{D_2 \pm \Sigma^{1/2}}{2D_1} \right)^{1/2}, \quad \sigma_3 = \left(\frac{A_2 u^2 - \rho \omega^2}{A_3} \right)^{1/2} \\
D_1 &= A_3 A_6, \quad D_2 = A_3 S_2 + A_6 S_1 - A_5^2 u^2, \quad D_3 = S_1 S_2 \\
S_1 &= A_1 u^2 - \rho \omega^2, \quad S_2 = A_7 u^2 - \rho \omega^2, \quad \Sigma = D_2^2 - 4 D_1 D_3 \\
(1.7) \quad A_1 &= a_{11} \lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}, \quad A_2 = \mu_{12} \lambda_1^2 + \sigma_{22}^{*0}, \quad A_3 = \mu_{13} \lambda_1^2 + \sigma_{33}^{*0} \\
A_4 &= \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} - \mu_{12}), \quad A_5 = \lambda_1 \lambda_3 (a_{13} + \mu_{13}) \\
A_6 &= a_{33} \lambda_3^2 + \sigma_{33}^{*0}, \quad A_7 = \mu_{13} \lambda_3^2 + \sigma_{11}^{*0}
\end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность материала среды, a_{ik} и μ_{ik} — коэффициенты, которые характеризуют связь между напряжениями и деформациями и определяются через упругий потенциал [1, 2]. Их конкретный вид для рассматриваемого в работе случая потенциала Мурнагана будет приведен ниже. Контуры Γ_k (кроме Γ_3) лежат на вещественной оси и отклоняются от нее, лишь обходя отрицательные особые точки подынтегральной функции сверху, а положительные — снизу. Их выбор диктуется принципом предельного поглощения [3, 4, 5].

Правая часть (1.3) определяет перемещение любой точки слоя с начальными напряжениями под действием распределенной в Ω нагрузки.

2. Полагая в (1.3) $x_3 = h$, получим перемещения поверхности слоя, определяемые соотношениями ($q(\xi, \eta) = \{q_1, q_2, q_3\}$ — вектор напряжения, $u_0(x_1, x_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$ — вектор перемещения поверхности слоя)

$$(2.1) \quad u_0(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} q(\xi, \eta) k(\xi - x_1, \eta - x_2) d\xi, d\eta$$

$$(2.2) \quad \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \alpha^2 M + \beta^2 N & \alpha \beta (M - N) & -i \alpha S \\ \alpha \beta (M - N) & \alpha^2 N + \beta^2 M & -i \beta S \\ i \alpha S & i \beta S & R \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad M(u) &= \sigma_1 \sigma_2 (m_2 - m_1) (d_2 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 h \operatorname{sh} \sigma_2 h - \\
&- d_2 \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2 h \operatorname{sh} \sigma_1 h) / (u^2 \Delta(u)) \\
N(u) &= \operatorname{th} \sigma_3 h / (u^2 A_3 \sigma_3)
\end{aligned}$$

$$S(u) = [\sigma_1 \sigma_2 (l_1 d_2 + l_2 d_1) (1 - \operatorname{ch} \sigma_1 h \operatorname{ch} \sigma_2 h) + \\ + \operatorname{sh} \sigma_1 h \operatorname{sh} \sigma_2 h (l_1 d_1 \sigma_1^2 + l_2 d_2 \sigma_2^2)] / \Delta(u)$$

$$R(u) = (d_1 l_2 - d_2 l_1) (d_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 h \operatorname{ch} \sigma_2 h - d_2 \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 h \times \\ \times \operatorname{ch} \sigma_1 h) / \Delta(u)$$

$$\Delta(u) = \sigma_1 \sigma_2 (l_1 m_1 d_2 + l_2 m_2 d_1) (1 - \operatorname{ch} \sigma_1 h \operatorname{ch} \sigma_2 h) + \\ + \operatorname{sh} \sigma_1 h \operatorname{sh} \sigma_2 h (l_1 m_2 d_1 \sigma_2^2 + l_2 m_1 d_2 \sigma_1^2)$$

В случае задачи о действии штампа на поверхность слоя соотношение (2.1) представляет собой систему интегральных уравнений относительно вектора контактных напряжений. Функции, участвующие в представлении (2.2), аналитические в комплексной плоскости, вещественные на вещественной оси и имеют на ней счетное множество нулей и полюсов, количество которых зависит от частоты ω . Видно, что при $u \rightarrow \infty$

$$S(u) = c_3 / u^2 + O(u^{-4}), \quad M(u) = c_1 / u^4 + O(u^{-6}) \\ R(u) = c_4 / u + O(u^{-3}), \quad N(u) = c_2 / u^3 + O(u^{-5})$$

Воспользовавшись соотношениями (1.6), можно получить выражения для коэффициентов c_k , которые в силу громоздкости не приводятся.

3. Для важного с практической точки зрения случая вибрации кругового в плане штампа на поверхности слоя получим, переходя в (2.1) — (2.3) к цилиндрической системе координат (u_r, u_z, u_φ — радиальные, осевые, крутильные перемещения) поверхности слоя, q_r, q_z, q_φ — соответственные напряжения под штампом радиуса a).

Для осесимметричных колебаний

$$(3.1) \quad u_r = \int_0^a q_r(\rho) k_{11}(r, \rho) \rho d\rho + \int_0^a q_z(\rho) k_{12}(r, \rho) \rho d\rho \\ u_z = \int_0^a q_r(\rho) k_{21}(r, \rho) \rho d\rho + \int_0^a q_z(\rho) k_{22}(r, \rho) \rho d\rho$$

для кососимметричных колебаний

$$(3.2) \quad u_\varphi = \int_0^a q_\varphi(\rho) k_{33}(r, \rho) \rho d\rho$$

Здесь

$$k_{ii}(r, \rho) = \int_{\Gamma_3} K_{ii}(u) J_1(ur) J_1(u\rho) u du, \quad i = 1, 3$$

$$k_{12}(r, \rho) = \int_{\Gamma_3} K_{12}(u) J_1(ur) J_0(u\rho) u du$$

$$k_{21}(r, \rho) = \int_{\Gamma_3} K_{21}(u) J_0(ur) J_1(u\rho) u du$$

$$k_{22}(r, \rho) = \int_{\Gamma_3} K_{22}(u) J_0(ur) J_0(u\rho) u du$$

$$K_{11}(u) = u^2 M(u), \quad K_{12}(u) = -K_{21}(u) = u S(u)$$

$$K_{22}(u) = R(u), \quad K_{33}(u) = u^2 N(u)$$

Функции $M(u)$, $R(u)$, $S(u)$ и $N(u)$ определены формулами (2.3). Контур Γ_3 лежит на положительной части вещественной оси, отклоняясь от нее при обходе особых точек подынтегральной функции снизу [5,6].

4. Задача о вибрации полосового в плане ширины $2a$, ориентированного вдоль оси x_2 , штампа на поверхности слоя сводится в случае плоских колебаний к системе уравнений

$$(4.1) \quad u(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(\xi) k(x_1 - \xi) d\xi, \quad u(x_1) = \{u_1, u_3\}, \quad q(x_1) = \{q_1, q_3\}$$

в случае антиплоских колебаний — к интегральному уравнению

$$(4.2) \quad u_2(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q_2(\xi) k_{22}(x_1 - \xi) d\xi, \quad |x_1| \leq a$$

$$k(t) = \int_{\Gamma_4} K(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad K(\alpha) = \begin{vmatrix} K_{11}(\alpha) & iK_{13}(\alpha) \\ -iK_{13}(\alpha) & K_{33}(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$k_{22}(t) = \int_{\Gamma_4} K_{22}(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} K_{11}(\alpha) &= \alpha^2 M(\alpha), & K_{13}(\alpha) &= \alpha S(\alpha), & K_{33}(\alpha) &= R(\alpha) \\ K_{22}(\alpha) &= \alpha^2 N(\alpha) \end{aligned}$$

Функции $M(\alpha)$, $S(\alpha)$, $R(\alpha)$, $N(\alpha)$ определены формулами (2.3), α — параметр одномерного преобразования Фурье по переменной x_1 .

5. Исследованию интегральных уравнений и их систем, подобных рассмотренным в п. 1—4, посвящены работы [3,7—11]. В общем случае проверить выполнение указанных в этих работах условий однозначной разрешимости не представляется возможным. В каждом конкретном случае (материал с заданным законом состояния и физико-механическими свойствами, определенный характер и интенсивность начальных напряжений) необходим дополнительный численный анализ.

Предмет исследования данной работы — особенности возбуждения вибрирующим штампом волн в предварительно напряженном слое. Это приводит к анализу построенных решений интегральных уравнений соответствующих задач. Некоторые зависимости можно установить, изучая свойства символов ядер интегральных уравнений, в частности их дисперсионные кривые.

В качестве примера рассмотрим задачу о нормальной к поверхности слоя вибрации полосового в плане штампа в отсутствие трения между штампом и слоем. Предполагаем, что среда гиперупругая с потенциалом Мурнагана, а начальное напряженное состояние определено условием

$$\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} = s_1, \quad \sigma_{33}^{*0} = s_2$$

Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$(5.1) \quad u_3(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q_3(\xi) k_{33}(x_1 - \xi) d\xi$$

$$k_{33}(t) = \int_{\Gamma} K_{33}(u) e^{iut} du$$

Символ $K_{33}(u)$ определен формулой (4.3). Коэффициенты a_{ik} , μ_{ik} , участвующие в представлениях (1.5) — (1.7), при сделанных предположениях имеют вид

$$a_{ii} = \lambda + 2\mu + k_0 (a_{ii}^0 s_1 + a_{ii}^1 s_2), \quad i = 1, 2, 3$$

$$a_{1i} = \lambda + k_0 (a_{1i}^0 s_1 + a_{1i}^1 s_2), \quad i = 2, 3$$

$$\mu_{1i} = \mu + k_0 (m_{1i}^0 s_1 + m_{1i}^1 s_2), \quad i = 2, 3$$

$$a_{11}^0 = 4a + 2(4 + \gamma)b + (2 + \gamma)c, \quad a_{11}^1 = 2a + 2(1 - \gamma) \times \\ \times b - \gamma c$$

$$a_{33}^0 = 8a + 8(1 - \gamma)b - 4\gamma c, \quad a_{33}^1 = 2a + (6 + 4\gamma)b + \\ + 2(1 + \gamma)c$$

$$a_{12}^0 = 2a + (2 + \gamma)b, \quad a_{12}^1 = a - \gamma b$$

$$a_{13}^0 = 4a + (2 - \gamma)b, \quad a_{13}^1 = 2a + 2(3 + 2\gamma)b + 2 \times \\ \times (1 + \gamma)c$$

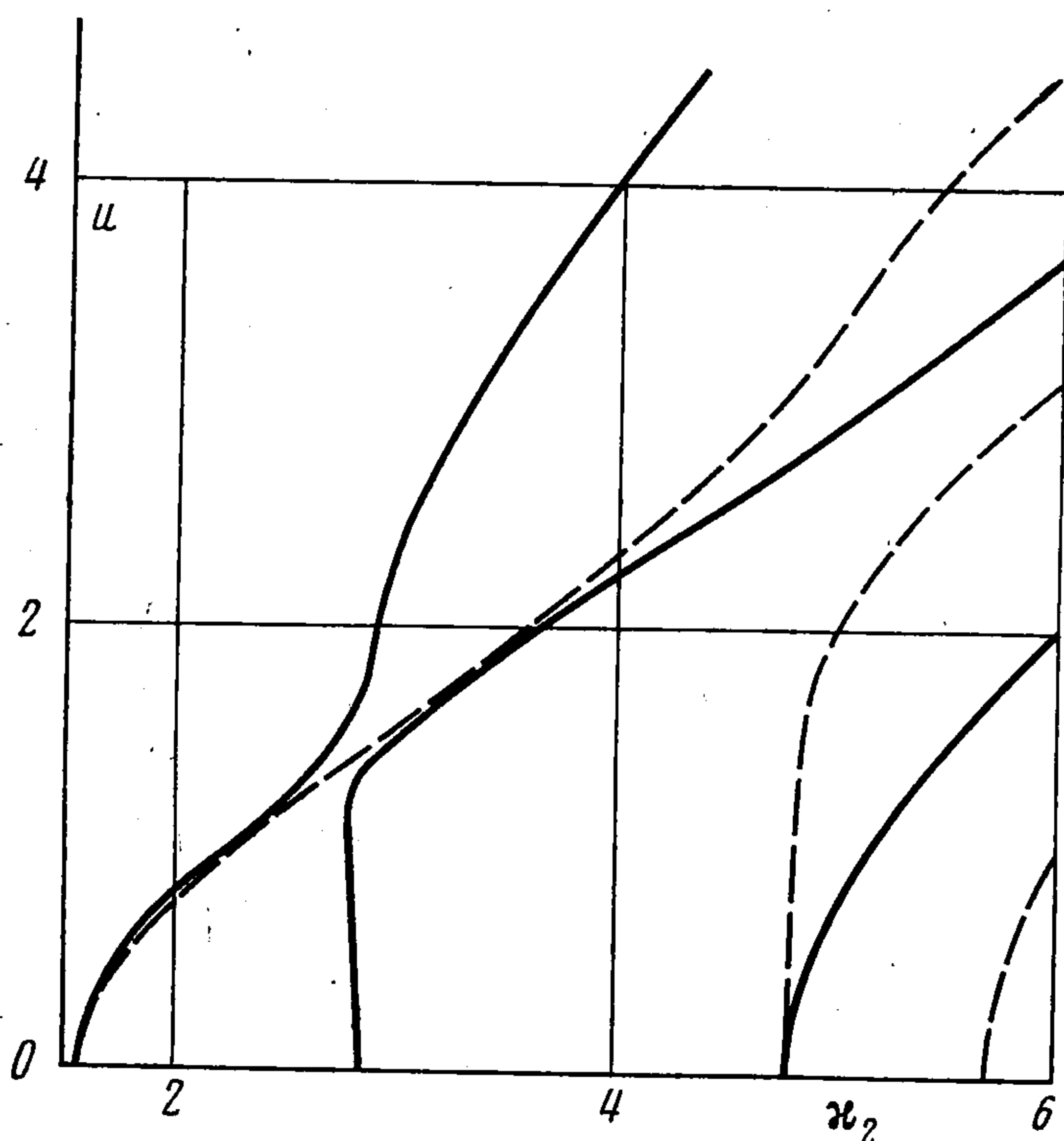
$$m_{12}^0 = 2b + (2 + \gamma)c/2, \quad m_{12}^1 = b - \gamma c/2$$

$$m_{13}^0 = 2b + (2 - \gamma)c/4, \quad m_{13}^1 = b + (2 + \gamma)c/4$$

$$\lambda_1^2 = 1 + k_0 [(2 + \gamma)s_1 - \gamma s_2], \quad \lambda_3^2 = 1 + k_0 [-2\gamma s_1 + 2 \times \\ \times (1 + \gamma)s_2]$$

$$\gamma = \lambda / \mu, \quad k_0 = (3\lambda + 2\mu)^{-1}$$

(μ , λ — параметры Ламе, a , b , c — постоянные третьего порядка, участвующие в представлении потенциала Мурнагана [1,2]).



Фиг. 1

Для обоснования однозначной разрешимости уравнения важен вопрос о расположении нулей и полюсов функции $K_{33}(u)$ (4.3).

Разрешая равенства $K_{33}(\zeta_k, \kappa_2) = 0$ и $K_{33}(z_k, \kappa_2) = 0$ ($\kappa_2 = a\omega(\rho/\mu)^{1/2}$) относительно нулей ζ_k и полюсов z_k , получим функции $\zeta_k(\kappa_2)$ и $z_k(\kappa_2)$ (k — порядковый номер нуля или полюса). Графики этих функций при $s_1 = s_2 = 0$ представлены на фиг. 1 (полюса — сплошные линии, нули — штриховые). Такое расположение кривых характерно и для значений σ_{33}^{*0} , отличных от нуля, что, согласно

[6], указывает на существование единственного в L_α ($\alpha > 1$) решения уравнения (5.1) при всех частотах и рассматриваемых значениях s_2 ($s_1 = 0$).

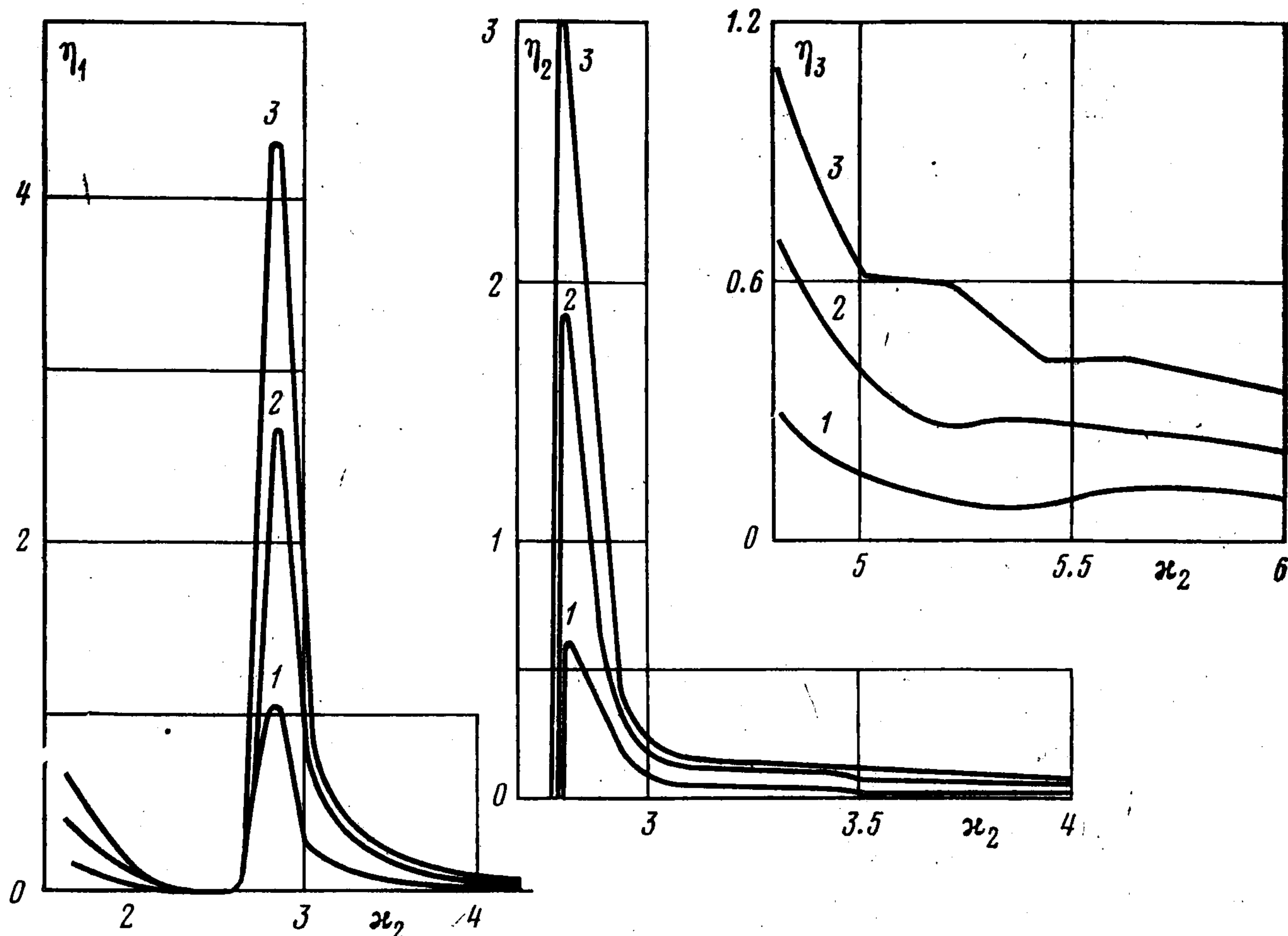
Расчеты проводились для стали 09 Г2С [2] при следующих значениях упругих постоянных:

$$\lambda = 9.26 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad \mu = 7.75 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$$

$$a = -3.19 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad b = -3.03 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad c = -0.784 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$$

На фиг. 2 показан характер влияния величины s_2 на зависимости $\eta_k = (z_k / z_{0k} - 1) \cdot 10^3$ от κ_2 , где z_{0k} — полюса $K_{33}(u)$ (4.3) при $s_1 = s_2 = 0$, z_k — при отличном от нуля начальном напряжении. Цифрами 1, 2, 3 обозначены кривые, полученные при значениях s_2 , равных соответственно $2 \cdot 10^{-4} \mu$, $5 \cdot 10^{-4} \mu$, $8 \cdot 10^{-4} \mu$ (μ — модуль сдвига). Графики показывают наличие диапазонов κ_2 «малого» и «сильного» влияния s_2 на $z_k(\kappa_2)$.

Сопоставляя фиг. 2 с фиг. 1, можно видеть, что участкам сильного влияния соответствуют окрестности точек перегиба кривых $z_k(\kappa_2)$.



Фиг. 2

Диапазон изменения s_2 несколько расширен по сравнению с принятым в литературе [1,2] для более четкого представления влияния интенсивности начального напряженного состояния на волновой процесс как под штампом, так и вне его.

Поведение свободной поверхности вне штампа можно описать функциями [10] (S_k — числовые коэффициенты, B — параметр аппроксимации)

$$(5.2) \quad \varphi^\pm(x) = \varphi(\pm x - a), \quad \pm x - a \gg 1$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^m S_k e^{iz_k t} + O(e^{-Bt})$$

Из (5.2) следует, что в окрестностях точек перегиба кривых $z_k(\kappa_2)$ малые изменения σ_{33}^{*0} могут привести к довольно резким изменениям волновой картины на поверхности слоя.

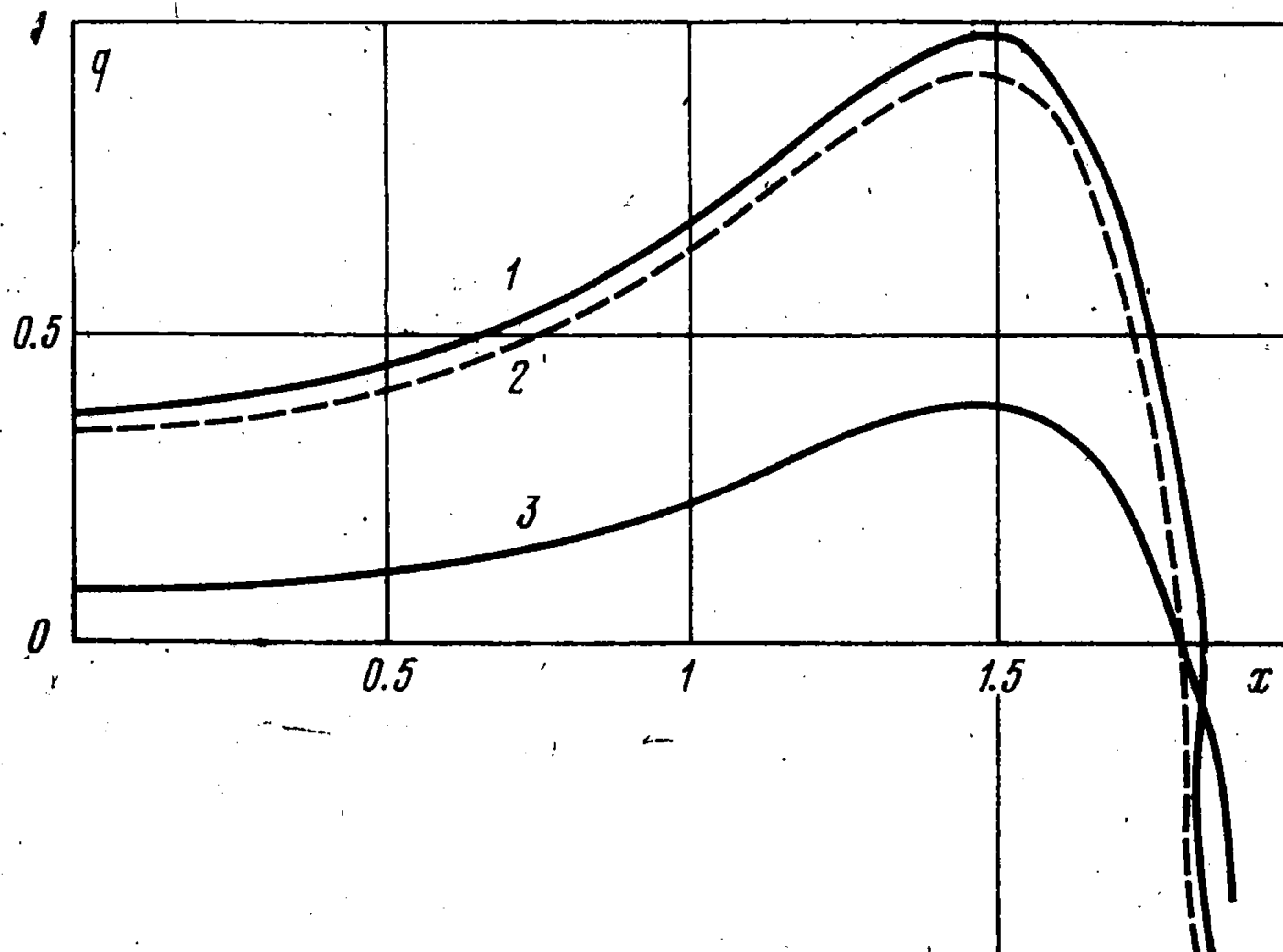
Зная распределение нулей и полюсов $K_{33}(u)$ (4.3), можно построить аппроксимирующую функцию [3,7-13]

$$(5.3) \quad K^*(u) = c_1 (u^2 + B^2)^{-1/2} \prod_{k=1}^n (u^2 - \zeta_k^2) (u^2 - z_k^2)^{-1}$$

Вид решения в случае $u_3(x) = \exp i\eta x$ и аппроксимирующей функции (5.3) в различных формах приведен в [3,7-13].

На фиг. 3 представлены построенные с помощью ЭЦВМ графики функций $q = \operatorname{Re} q_3 \cdot \mu^{-1}$ в случае вибрации плоского штампа при $\eta = 0$, $a = 2$, $\kappa_2 = 2.79$ и значениях $\sigma_{33}^{*0} = 5 \cdot 10^{-4} \mu$, $10^{-3} \mu$, $5 \cdot 10^{-3} \mu$ (соответственно кривые 1—3).

Заметим, что графики на фиг. 1, 2 дают возможность установить наличие единственного решения осесимметричной задачи [6] о вибрации кругового в плане штампа на по-



Фиг. 3

верхности предварительно напряженного слоя, а также выявить влияние величины начального напряжения на волновой процесс вне штампа. Методом, развитым в работах [7,12,13], можно вычислить контактные напряжения под штампом и выявить влияние на их распределение интенсивности предварительного напряженного состояния.

Авторы благодарят В. А. Бабешко за внимание к работе, ценные советы и обсуждения результатов.

Поступила 23 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
2. Гузь А. Н., Жук А. П., Мазорт Ф. Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев, «Наукова думка», 1976.
3. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
5. Бабешко В. А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
6. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.
7. Бабешко В. А., Ворович И. И., Селезнев М. Г. Распространение в упругом слое волн, возникающих при колебании штампа. Распространение упругих и упруго-пластических волн. Алма-Ата, «Наука», 1973.
8. Селезнев М. Г. Возбуждение вибрирующим штампом волн в двухслойных средах. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 9.
9. Ананьев И. В., Бабешко В. А. Динамические контактные задачи для штампов с относительно малым радиусом. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6.
10. Калцнчук В. В. Об одной динамической задаче для бесконечного цилиндра. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
11. Бабешко В. А., Коренева Т. В. К расчету прочности трехопорного фундамента при вибрации. Тез. докл. VII Всес. конф. по прочности и пластичности. Горький, 1978, с. 12—13.
12. Бабешко В. А., Гарагуля В. А. Асимптотическое решение задачи о действии штампа, круглого в плане, на упругий слой. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1.
13. Бабешко В. А., Ворович И. И., Селезнев М. Г. Вибрация штампа на двухслойном основании. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.