

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН  
В ПОЛИКРИСТАЛЛАХ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ  
С УЧЕТОМ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ**

**О. А. Григорьев, Т. Д. Шермергор**

(Москва)

Для поликристаллов кубической симметрии проводится расчет коэффициентов рассеяния и скоростей распространения продольных и поперечных ультразвуковых волн во всем диапазоне частот. Расчет выполнен в приближении Бурре методами перенормировки волнового уравнения и переразложения, учитывающего многократное рассеяние, при экспоненциальной координатной зависимости корреляционного тензора. Найдены асимптотики низких и высоких частот. Выполнен численный расчет для меди. Полученное поведение коэффициентов рассеяния соответствует известным зависимостям для областей релеевского, фазового и диффузного рассеяния.

Распространение ультразвуковых волн в поликристаллах сопровождается их рассеянием на кристаллитах (зернах неоднородности). Обзор соответствующих работ дан в [1]. Этот эффект впервые рассчитан в [2] в приближении Бурре методом перенормировки волнового уравнения для поликристаллов кубической симметрии. Однако вычислялись лишь длинноволновые и коротковолновые асимптотики и учитывалось однократное рассеяние. Тем же методом, но во всей области длин волн, расчет был проведен в [3].

Ниже рассчитываются коэффициенты многократного рассеяния и скорости распространения ультразвуковых волн во всем диапазоне частот и размеров зерен неоднородности методом статистической теории упругости [4].

1. Рассмотрим два тела одинаковых размеров и формы: неоднородное, эффективные динамические модули упругости которого требуется вычислить, и однородное тело сравнения. Вектор смещений  $u$  гармонической волны в среде, характеризующейся тензором упругих модулей  $C_{nwrs}(\mathbf{r})$ , удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad L_{nr}u_r = 0, \quad L_{nr} \equiv \partial_w C_{nwrs} \partial_s + \rho \omega^2 \delta_{nr}, \quad \partial_n \equiv \partial / \partial r_n$$

где  $\rho$  — плотность среды, которая считается однородной,  $\omega$  — циклическая частота. Будем отмечать величины, относящиеся к телу сравнения, индексом  $c$ , избыточные относительно тела сравнения величины — штрихами и, где это возможно, опускать тензорные индексы.

Вычитая из уравнения (1.1) его значение для среды сравнения, получим

$$(1.2) \quad L_c u' = -L u, \quad L' = L - L_c$$

Решение уравнения (1.2) запишем с помощью тензора Грина  $G$  регуляризованного оператора  $L_c$

$$(1.3) \quad u' = G * L' u$$

где звездочка обозначает интегральную свертку. Вторую производную тензора Грина представим в виде суммы сингулярной  $G^{(s)}$  и формальной  $G^{(f)}$  частей. Выберем для нетекстурированного поликристалла поверхность элемента интегрирования сферической [4] и введем тензор  $g$  и интегральный оператор  $p$  равенствами

$$(1.4) \quad gf \equiv G^{(s)} * f, \quad pf \equiv G^{(f)} * f$$

где  $f$  — произвольная функция. Первое из равенств (1.4) тривиально, так как координатная зависимость  $G^{(s)}$  есть  $\delta(r)$ .

Перейдем в (1.3) от вектора смещения к тензору деформаций  $\epsilon$  и примем, что исходное тело велико по сравнению с пространственным масштабом корреляций. Тогда

$$(1.5) \quad \epsilon' = (g + p) C' \epsilon$$

Отделим локальный член, связанный с  $G^{(s)}$ , от интегрального члена, описывающего нелокальную часть взаимодействия между неоднородностями. Учтем также, что вклады от локальных взаимодействий между неоднородностями можно просуммировать точно:

$$(1.6) \quad \epsilon = \epsilon_c + p\epsilon, \quad \epsilon \equiv (I - gC') \epsilon, \quad l = C' (I - gC')^{-1}$$

$$(1.7) \quad \epsilon = (I - pl)^{-1} \epsilon_c, \quad I_{nwrs} = 1/2 (\delta_{nr} \delta_{ws} + \delta_{ns} \delta_{wr})$$

$$(1.8) \quad l\epsilon = C' \epsilon$$

Будем считать поле тензора модулей упругости эргодическим [5,6]. Тогда усреднение равенства (1.8) дает

$$(1.9) \quad l_* \langle \epsilon \rangle = \langle l\epsilon \rangle, \quad l_* (I - g(C_* - C_c))^{-1} \langle \epsilon \rangle = (C_* - C_c) \langle \epsilon \rangle$$

Из равенств (1.7) и (1.9) получим [7]

$$(1.10) \quad l_* = \langle lR \rangle, \quad R \equiv (I - pl)^{-1} \langle (I - pl)^{-1} \rangle^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (Hl)^n \\ H \equiv (I - M) p, \quad Mf \equiv \langle f \rangle$$

Решение (1.10) представляет собой операторный ряд, требующий для своего вычисления знания многоточечных моментных функций упругих постоянных. Положим в (1.10)  $\langle l \rangle = 0$  и ограничимся учетом моментов второго порядка. Это дает

$$(1.11) \quad l_* = \langle lpl \rangle$$

Условие  $\langle l \rangle = 0$  улучшает сходимость ряда (1.10) и упрощает расчет  $l_*$ . Одновременно оно определяет постоянные тела сравнения в приближении самосогласования. Действительно, если принять

$$(1.12) \quad \langle l \rangle = \langle (C - C_c) (I - g(C - C_c)^{-1}) \rangle = 0$$

то, вводя тензор  $b$  равенством  $b = -C_c - g^{-1}$  [4], приходим к формуле

$$(1.13) \quad C_c = \langle (C + b)^{-1} \rangle^{-1} - b$$

которая, как показано в [8], определяет постоянные  $C_c$  в приближении самосогласования.

Уравнения, аналогичные (1.9) и (1.11), получаются и при суммировании фейнмановских диаграмм [9,10].

Для гармонической волны средняя деформация зависит от координат, что не позволяет непосредственно получить  $C_*$  из уравнения (1.9). Однако применение преобразования Фурье к этому уравнению и исключение трансформанты  $\langle \epsilon \rangle$  позволяет выразить фурье-образ  $\bar{C}_*$  оператора  $C_*$  через фурье-образ  $\bar{I}_*$  оператора  $I_*$

$$(1.14) \quad \bar{C}_* - C_c = (I + \bar{I}_* g)^{-1} \bar{I}_*$$

2. Вычислим  $\bar{I}_*$  в предположении разделения тензорной  $A_{imrs}^{nwuv}$  и координатной  $\varphi(\mathbf{r})$  зависимостей. Имеем

$$(2.1) \quad \bar{I}_{*imuv} = A_{imrs}^{nwuv} J_{nwrs}, \quad \langle l_{nwuv}(\mathbf{r}) l_{imrs}(\mathbf{r}') \rangle = A_{imrs}^{nwuv} \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Найдем входящий в (2.1) интеграл

$$(2.2) \quad J_{nwrs} = \int G_n^{(f)}(r, s)(w)(\mathbf{r}, \omega) \varphi(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (\cdot)_{,n} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial r_n}$$

где  $\mathbf{q}$  — волновой вектор, для поликристаллов  $\varphi(\mathbf{r}) = \exp(-r/a)$  [11],  $a$  — масштаб корреляций, совпадающий по порядку величины с размером зерна неоднородности. По индексам, заключенным в скобки, проводится симметризация.

Замена переменных  $\mathbf{q} = q\mathbf{k}$ ,  $\zeta = q\mathbf{r}$ ,  $\zeta/\zeta = \mathbf{n}$  дает

$$(2.3) \quad J_{nwrs} = \int G_n^{(f)}(r, s)(w) \zeta^2 \exp(-x\zeta) \cos(\mathbf{k}\zeta) d\zeta d\Omega$$

$$(2.4) \quad x \equiv 1/(qa), \quad q = \omega/c$$

$$d\Omega \equiv d\zeta/\zeta^2 d\zeta, \quad k_{nwr\dots} \equiv k_n k_w k_r \dots$$

$$(2.5) \quad 4\pi\rho c^2 \zeta^3 G_n^{(f)}(r, s)(w)(\zeta, c, \eta) = h_1 k_{nwrs} + \left| \begin{array}{l} + h_2 \varphi_{nwrs} + h_3 \delta_{nwrs} + h_4 \theta_{nwrs} + h_5 \delta_{n(r} \delta_{s)w} \end{array} \right.$$

$$\theta_{nwrs} \equiv k_{(n} \delta_{w)(r} k_{s)}, \quad \varphi_{nwrs} \equiv 4\theta_{nwrs} + \delta_{nw} k_{rs} + k_{nw} \delta_{rs}$$

$$\delta_{nwrs} \equiv \delta_{nw} \delta_{rs} + \delta_{nr} \delta_{ws} + \delta_{ns} \delta_{wr}$$

где  $c$  — фазовая скорость волны в теле сравнения. Выражения (2.3)–(2.5) справедливы для продольных и поперечных волн. В первом случае все величины должны быть выражены через  $c_l$ ,  $q_l$ ,  $x_l$ ,  $\zeta_l$ , а во втором — через  $c_t$ ,  $q_t$ ,  $x_t$ ,  $\zeta_t$ . Функции  $h_n^{(l)}$  и  $h_n^{(t)}$  равны

$$(2.6) \quad \zeta^2 h_1^{(l)} = d_1(\zeta\eta) - d_1(\zeta), \quad \zeta^2 h_2^{(l)} = d_2(\zeta) - d_2(\zeta\eta)$$

$$\zeta^2 h_3^{(l)} = d_3(\zeta\eta) - d_3(\zeta), \quad h_4^{(l)} = \eta^2 d_3(\zeta\eta), \quad h_5^{(l)} = \eta^2 d_4(\zeta\eta)$$

$$(2.7) \quad \zeta^2 h_1^{(t)} = d_1(\zeta) - d_1(\zeta\eta), \quad \zeta^2 h_2^{(t)} = d_2(\zeta\eta) - d_2(\zeta)$$

$$\zeta^2 h_3^{(t)} = d_3(\zeta) - d_3(\zeta\eta), \quad h_4^{(t)} = d_3(\zeta), \quad h_5^{(t)} = d_4(\zeta)$$

$$d_1(x) = (105 + 105ix - 45x^2 - 10ix^3 + x^4) e^{-ix}$$

$$d_2(x) = (15 + 15ix - 6x^2 - ix^3) e^{-ix}$$

$$d_3(x) = (3 + 3ix - x^2) e^{-ix}, \quad d_4(x) = -(1 + ix) e^{-ix}$$

Для упрощения записи у величин  $\zeta$ ,  $\eta$  в формулах (2.6) опущен индекс  $l$ , а в формулах (2.7) — индекс  $t$ . Через  $\eta$  обозначены отношения  $\eta_l = 1/\eta_t = c_l/c_t$ , а скорости распространения волн в среде сравнения

определяются ее объемным  $K_c$  и сдвиговым  $\mu_c$  модулями

$$(2.8) \quad c_l = [(K_c + 4 \mu_c / 3) / \rho]^{1/2}, \quad c_t = (\mu_c / \rho)^{1/2}$$

Сравнивая выражения (2.6) и (2.7), находим, что функции  $h_n^{(l)}$  и  $h_n^{(t)}$  связаны соотношениями

$$(2.9) \quad \begin{aligned} h_n^{(t)}(\zeta_t, c_t, \eta_t) &= -h_n^{(l)}(\zeta_t, c_t, \eta_t), \quad n = 1, 2, 3 \\ h_n^{(t)}(\zeta_t, c_t) &= h_n^{(l)}(\zeta_t, c_t, 1), \quad n = 4, 5 \end{aligned}$$

которые позволяют вычислить интеграл (2.3) для случая поперечных волн по его значению для продольных волн.

Проведем в (2.3) интегрирование по углам при помощи формул

$$(2.10) \quad \begin{aligned} T_{nwrs} &\equiv \int n_{nwrs} \cos(\zeta \mathbf{k}) d\Omega = 4\pi (k_{nwrs} j_4 \zeta^{-1} - \Phi_{nwrs} j_3 \zeta^{-1} + \delta_{nwrs} j_2 \zeta^{-2}) \\ T_{nw} &\equiv T_{nwrr} = 4\pi (\delta_{nw} j_1 \zeta^{-1} - k_{nw} j_2), \quad T \equiv T_{nn} = 4\pi j_0 \end{aligned}$$

где  $j_n(\zeta)$  — сферические функции Бесселя. Это дает

$$(2.11) \quad \begin{aligned} J_{nwrs} &= \int_0^\infty \zeta^2 e^{-\zeta x} [h_1 T_{nwrs} + 2h_2 (T_{n(w\delta_r)s} + T_{w(r\delta_s)n} + \\ &+ T_{s(r\delta_n)w}) + h_3 \delta_{nwrs} T + h_4 T_{(n\delta_w)(rT_s)} + h_5 \delta_{n(r\delta_s)w}] d\zeta \end{aligned}$$

Интегрирование выражения (2.11) по переменной  $\zeta$  проведем отдельно для продольных и поперечных волн.

3. Рассмотрим вначале продольные волны. В целях упрощения записи у всех величин, таких, как  $s, q, x, \eta$ , индекс  $l$  будет опускаться. Воспользуемся величинами  $T$  согласно (2.10) и явным видом функций  $h_n^{(l)}$  для продольных волн согласно (2.6). Тогда выражение (2.11) позволяет представить искомый интеграл  $J_{nwrs}$  в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} J_{nwrs} &= P_1 k_{nwrs} + P_2 \Phi_{nwrs} + P_3 \delta_{nwrs} + P_4 k_{(n\delta_w)(rk_s)} + \\ &+ P_5 \delta_{n(r\delta_s)w} \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \rho c^2 P_n \equiv R_n(\eta, \beta) - Q_n(\alpha)$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} R_1 &= 35 R_3 + 10 R_5 + \eta^4 I_0^1, \quad R_2 = -5 R_3 - R_5, \quad R_3 = \\ &= 3 I_4^1 + 3 i \eta I_4^2 - \eta^2 (9 I_3^1 - I_2^1) - 2 i \eta^3 I_3^2 + \eta^4 I_2^1 \\ R_4 &= -3 R_5 - \eta^4 I_0^1, \quad R_5 = \eta^2 I_2^1 + i \eta^3 I_2^2 + \eta^4 I_1^1 \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad I_n^m = \int_0^\infty e^{-\beta \zeta} j_n(\zeta) \zeta^{m-n} d\zeta \quad \begin{pmatrix} \beta = x + i\eta \\ \alpha = x + i \end{pmatrix}$$

Интегралы  $I_n^m$  вычисляются аналогично интегралу Ганкеля [12] и выражаются через гипергеометрическую функцию

$$(3.5) \quad I_n^m = \frac{\bar{m}! \beta^{-m-1}}{(2n+1)!!} F\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2}; n + \frac{3}{2}; -\beta^{-2}\right)$$

В формуле (3.4)  $m$  и  $n$  — неотрицательные целые числа, а параметр  $x = \text{Re } \alpha = \text{Re } \beta$  согласно (2.4) положительный. Поэтому интеграл  $I_n^m$  существует во всей области допустимых значений  $x$ , а  $F(a, b; c; \zeta)$  — элементарная функция  $\zeta$ . Кроме того, любые три функции типа  $F(a + p_1, b + p_2; c + p_3; \zeta)$ , где  $p_1, p_2, p_3$  — целые числа ( $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ),

связаны линейной однородной зависимостью, коэффициенты которой — многочлены [12].

Для интегралов (3.5) может быть выведена общая формула, аналогичная формуле Кристоффеля [12], однако удобнее пользоваться рекуррентными соотношениями

$$(3.6) \quad \begin{aligned} I_n^2 &= \beta^{-1} [I_n^1 - (2n + 1) I_{n-1}^1] \\ 2n(2n + 1) I_{n+1}^1 &= [\beta^2(2n + 1) + (4n - 1)] I_n^1 - (1 + \beta^2) I_{n-1}^1 \\ I_1^1 &= 1 - \beta \operatorname{arctg} \beta^{-1}, \quad I_0^1 = 1 / (1 + \beta^2) \end{aligned}$$

которые позволяют свести искомые интегралы к интегралам  $I_1^1$  и  $I_0^1$ . Формулы (3.6) получаются из соотношений Гаусса для смежных гипергеометрических функций [12] и известных представлений для элементарных функций

$$\beta^2 / (1 + \beta^2) = F(1, 3/2; 3/2; -\beta^{-2}), \quad \beta \operatorname{arctg} \beta^{-1} = F(1, 1/2; 3/2; -\beta^{-2})$$

Вычисления по формулам (3.3) — (3.6) дают

$$(3.7) \quad \begin{aligned} R_1 &= 35 R_3 + 10 R_5 + \eta^4 / (1 + \beta^2), \quad R_2 = -5 R_3 - R_5 \\ 48 R_3 &= 48/35 + \beta^2 (33/5 + 8\beta^2 + 3\beta^4) - 3\beta(1 + \\ &+ 3\beta^2 + 3\beta^4 + \beta^6) J - i\eta\beta(81/5 + 38\beta^2 + 21\beta^4) + \\ &+ 3i\eta(1 + 9\beta^2 + 15\beta^4 + 7\beta^6) J - 6\eta^2(32/15 + 11\beta^2 + \\ &+ 9\beta^4) + 6\eta^2\beta(5 + 14\beta^2 + 9\beta^4) J + 4i\eta^3\beta(13 + 5\beta^2) - \\ &- 12i\eta^3(1 + 6\beta^2 + 5\beta^4) J + 8\eta^4(2 + 3\beta^2) - 24\eta^4\beta \times \\ &\times (1 + \beta^2) J, \quad R_4 = -3 R_5 - \eta^4 / (1 + \beta^2), \quad 2 R_5 = \eta^2(2/3 + \\ &+ \beta^2) - \eta^2\beta(1 + \beta^2) J - 3i\eta^3\beta + i\eta^3(1 + 3\beta^2) J + 2\eta^4 \times \\ &\times (J\beta - 1), \quad J \equiv \operatorname{arctg} \beta^{-1} \end{aligned}$$

Соответствующие выражения для  $Q_n(\alpha)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) получаются из  $R_n(\eta, \beta)$ , если в формулах (3.7) провести замены  $\beta \rightarrow \alpha$  и  $\eta \rightarrow 1$ , а  $Q_4 = Q_5 = 0$ .

Переменные  $\alpha$  и  $\beta$  комплексные и определяются соотношениями в скобках в (3.4). Перейдем от них к переменным  $\eta_l$  и  $x_l$ . Затем подставим результат в (3.2), (3.7) и разделим действительные и мнимые части функций  $P_n$ . Имеем]

$$(3.8) \quad \rho c^2 P_n = a_n + i b_n$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} a_1 &= 35 u_1 + 10(u_2 + u_3) + u_4 + u_5, \quad b_1 = 35 u_6 + 10(u_7 + \\ &+ u_8) + u_9 + u_{10} \end{aligned}$$

$$a_2 = -5 u_1 - u_2 - u_3, \quad a_3 = u_1, \quad b_2 = -5 u_6 - u_7 - u_8 \\ b_3 = u_6$$

$$a_4 = -3 u_2 - u_4, \quad a_5 = u_2, \quad b_4 = -3 u_7 - u_9, \quad b_5 = u_7$$

$$(3.10) \quad u_1 = w \left[ \frac{1}{15} - \frac{1}{16} x^2 (v + 2x^2) \right] + \frac{1}{16} (t_1 t_2 + t_3 t_4)$$

$$u_2 = \eta^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{1}{4} t_1 t_5, \quad u_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} t_3 t_6$$

$$u_4 = \eta^4 u (w + x^2), \quad u_5 = -1 / (4 + x^2)$$

$$\begin{aligned}
 u_6 &= \frac{1}{16} x^3 (1 - \eta)(x^2 + 4 + 2\eta + 2\eta^2) + \\
 &+ \frac{1}{48} x (4 - 3\eta + 2\eta^3 - 3\eta^5) + \frac{1}{64} (t_2 t_7 + t_4 t_8) \\
 u_7 &= -\frac{1}{2} x \eta^3 + \frac{1}{8} t_5 t_7, \quad u_8 = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} t_6 t_8, \quad u_9 = -2\eta^5 x u \\
 u_{10} &= 2 / [x (4 + x^2)], \quad t_1 = -\operatorname{arctg} [2x / (x^2 - w)] \\
 t_2 &= x^7 + 3vx^5 + (1 + 2v + 3\eta^4)x^3 + w^2 vx, \quad t_3 = \operatorname{arctg} (2/x) \\
 t_4 &= x^7 + 6x^5 + 8x^3, \quad t_5 = \eta^2 x(v + x^2), \quad t_6 = 2x + x^3 \\
 t_7 &= \ln [1 + 4\eta / (x^2 + v - 2\eta)], \quad t_8 = -\ln (1 + 4/x^2) \\
 v &= 1 + \eta^2, \quad w = 1 - \eta^2, \quad 1/u = x^4 + 2vx^2 + w^2
 \end{aligned}$$

Аналогично может быть вычислен интеграл  $J_{nwrs}^{(t)}$  для поперечных волн. Но более простой путь состоит в использовании соотношений (2.9), позволяющих воспользоваться конечными формулами (3.7) для продольных волн. Интеграл  $J_{nwrs}^{(l)}$  будет определяться выражениями (3.1), (3.8), (3.10), однако теперь  $x = x_t \equiv \omega a / c_t$ ,  $\eta = \eta_t \equiv c_t / c_l$  и в формулах (3.9) надо заменить  $u_1, u_2, \dots, u_{10}$  соответственно на  $-u_1, -u_3, -u_2, -u_5, -u_4, -u_6, -u_8, -u_7, -u_{10}, -u_9$ .

Из полученных общих формул могут быть найдены предельные значения, соответствующие асимптотикам коротких и длинных волн путем предельного перехода в выражениях (3.1), (3.8) — (3.10). Для асимптотики коротких волн разложение в ряд по малому параметру  $x = 1 / (qa) \ll 1$  приводит к следующему значению интеграла  $J_{nwrs}$ :

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad \rho J_{nwrs}^{(l)} &= \left[ \frac{1}{c_l^2 - c_t^2} - \frac{5}{4c_l^2} + i \frac{a\omega}{2c_l^3} \right] k_{nwrs} + \left[ \frac{1}{c_l^2} - \frac{1}{c_t^2} \right] \frac{\delta_{nwrs}}{15} + \\
 &+ \left[ \frac{1}{c_l^2 - c_t^2} \right] \theta_{nwrs} + \frac{\delta_{n(r\delta_s)w}}{3c_l^2} \\
 \rho J_{nwrs}^{(t)} &= \left[ \frac{5}{4c_t^2} + \frac{1}{c_t^2 - c_l^2} - i \frac{a\omega}{2c_t^3} \right] k_{nwrs} + \left[ \frac{1}{c_l^2} - \frac{1}{c_t^2} \right] \frac{\delta_{nwrs}}{15} + \\
 &+ \left[ -\frac{5}{4c_t^2} + i \frac{a\omega}{2c_t^3} \right] \theta_{nwrs} + \frac{\delta_{n(r\delta_s)w}}{3c_t^2}
 \end{aligned}$$

Для асимптотики длинных волн разложение в ряд по параметру  $1/x = qa \ll 1$  приводит к выражению

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad J_{nwrs} &= a^2 \omega^2 Y_{nwrs} + ia^3 \omega^3 Z_{nwrs} \\
 \rho Y_{nwrs} &= (3 \varphi_{nwrs} - 2 \delta_{nwrs}) c^{-2} (c_t^{-2} - c_l^{-2}) / 105 - \\
 &- \theta_{nwrs} c^{-2} c_t^{-2} / 5 + \delta_{nwrs} (c_t^{-4} - c_l^{-4}) / 15 + \delta_{n(r\delta_s)w} c_t^{-2} (c^{-2} - \\
 &- 5 c_t^{-2}) / 15 \\
 \rho Z_{nwrs} &= \frac{2}{15} \delta_{nwrs} (c_l^{-5} - c_t^{-5}) + \frac{2}{3} \delta_{n(r\delta_s)w} c_t^{-5}
 \end{aligned}$$

Интегралы  $J_{nwrs}^{(l)}$  и  $J_{nwrs}^{(t)}$  находятся из (3.12), соответствующей заменой  $c \rightarrow c_l$  или  $c \rightarrow c_t$ .

Все приведенное выше справедливо для квазиизотропных поликристаллов произвольной симметрии. Ниже проводится расчет коэффициентов

рассеяния и скоростей распространения ультразвуковых волн в поликристаллах кубической симметрии.

4. Метод нахождения постоянных  $K_c$  и  $\mu_c$  из условия, эквивалентного (4.12), дан в [11]. Пусть тензоры кубической симметрии  $C$  и  $l$  представлены своими матричными коэффициентами  $C_{11}, C_{12}, C_{44}, l_{11}, l_{12}, l_{44}$ . Тогда параметр анизотропии  $h$  согласно (1.6) будет равен

$$(4.1) \quad h = l_{11} - l_{12} - 2 l_{44} = C_2 [(1 + \kappa C_1) (1 + \kappa C_1 + \kappa C_2)]^{-1} \\ C_1 \equiv 2 C_{44} - 2 \mu_c, \quad C_2 \equiv C_{11} - C_{12} - 2 C_{44}, \quad \kappa = 3 (K_c + 2 \mu_c) [5 \mu_c (3 K_c + 4 \mu_c)]^{-1}$$

Введем символическую форму записи тензорной функции четвертого ранга в изотропном пространстве [13]

$$(4.2) \quad (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)_{nwrs} \equiv E_1 k_{nwrs} + E_2 (\delta_{nr} k_{ws} + \delta_{ns} k_{wr} + \delta_{us} k_{nr} + \delta_{wr} k_{ns}) - E_3 (\delta_{nw} k_{rs} + \delta_{rs} k_{nw}) + E_4 (\delta_{nr} \delta_{ws} + \delta_{ns} \delta_{wr}) - E_5 \delta_{nw} \delta_{rs}$$

Подставим найденное значение интеграла  $J_{nwrs}$  и свертки ковариантного тензора для поликристалла кубической симметрии [14]

$$(4.3) \quad A_{rsvv}^{nwuu} = A_{rsuu}^{nw11} = 0, \quad A_{rsuv}^{nwuv} = 21 \xi (0, 0, 0, 3, 2)_{nwrs} \\ A_{rs1u}^{nw1u} = 3 \xi (0, 3, 4, 5, 2)_{nwrs}, \quad A_{rs11}^{nw11} = \xi (1, 5, 7, 5, 1)_{nwrs} \\ \xi \equiv h^2 / 525$$

в формулу (2.1). Тогда найдем

$$(4.4) \quad l_{*nwrs} = \xi (P_1, 5 P_1 + 9 D, 7 P_1 + 12 D, 5 P_1 + 15 D + 63 D', P_1 + 6 D + 42 D')_{nwrs}, \quad D \equiv 4 P_2 + P_4 \\ D' \equiv 2 P_3 + P_5$$

Рассматривая условия существования средних полей в виде плоских волн, приходим к характеристическому уравнению [11]

$$(4.5) \quad \det [\rho \omega^2 \delta_{nr} - q_*^2 k_{*ws} \bar{C}'_{*nwrs}] = 0$$

где  $k_{*n} = q_{*n} / q_*$ , а  $q_*$  — комплексный «волновой вектор». Три корня уравнения (4.5), кубичного относительно квадрата волнового вектора, позволяют найти вклад корреляционной добавки  $\bar{C}'_{*nwrs}$  в рассеяние. Пусть

$$(4.6) \quad \bar{C}'_{*nr} = k_{*ws} \bar{C}'_{*nwrs} = (N^{(l)} - N^{(t)} + iM^{(l)} - iM^{(t)}) k_{*wr} + (N^{(t)} + iM^{(t)}) \delta_{wr}$$

Тогда, считая корреляционную добавку малой, получим

$$(4.7) \quad \gamma_{l,t}(\omega) = \frac{\omega M^{(l,t)}(\omega)}{2\rho c_{l,t}^3}$$

$$(4.8) \quad v_{l,t}(\omega) = c_{l,t} \left[ 1 + \frac{1}{2\rho c_{l,t}^2} \left( 1 + \omega \frac{d}{d\omega} \right) N^{(l,t)}(\omega) \right]$$

Величина  $\gamma$  представляет собой коэффициент рассеяния, отнесенный к единице длины, а выражение (4.8) для дисперсии скорости волны  $v(\omega)$

найденно из соотношения

$$v = (d\chi / d\omega)^{-1}, \quad q_* = \chi - i\gamma$$

5. Для коэффициентов рассеяния, проводя необходимые вычисления по формулам (1.14), (4.4) — (4.7), получим

$$(5.1) \quad \gamma_l = \frac{\omega}{3\rho c_l^3} \frac{|m''}{(\kappa m'')^2 + [1 + \kappa m']^2}, \quad \gamma_t = \frac{\omega}{4\rho c_t^3} \frac{n''}{(\kappa n'')^2 + [1 + \kappa n']^2}$$

$$m' = \xi' (2u_1 - 2u_2 + 4u_3 - 5u_4 + 4u_5), \quad n' = 2/3 m' + \xi' (2u_5 - u_3)$$

$$m'' = \xi' (2u_6 - 2u_7 + 4u_8 - 5u_9 + 4u_{10}), \quad n'' = 2/3 m'' + \xi' (2u_{10} - u_8)$$

$$\xi' = 2h^2 / (175\rho c^2)$$

где  $u_n$ ,  $h$  и  $\kappa$  определены выражениями (3.10) и (4.1).

Таким образом, для вычисления коэффициентов рассеяния продольных  $\gamma_l$  и поперечных  $\gamma_t$  волн необходимо использовать соответственно первую и вторую из формул (5.1). При переходе от параметра  $x$  к волновому числу  $q$  используется соотношение (2.4). В формулах, относящихся к определенному виду волн, все величины должны быть снабжены индексом  $l$  или  $t$ . Подчеркнем, что введение индекса обязательно ( $c_l \neq c_t$ ,  $x_l \neq x_t$ ,  $\eta_l = 1/\eta_t = c_l/c_t$  и т. д.).

Для коэффициентов рассеяния (5.1) получим три асимптотики. При условии  $m', m'', n', n'' \ll 1/\kappa$  в выражениях (5.1) знаменатели можно приравнять единице, и возможны два случая, когда  $x \gg 1$  или  $x \ll 1$ . В первом случае, используя асимптотику (3.12), получим для длинных волн

$$(5.2) \quad \gamma_l = \frac{4h^2 a^3 \omega^4}{375\rho^2 c_l^3} \left( \frac{2}{c_l^5} + \frac{3}{c_t^5} \right), \quad \gamma_t = \frac{h^2 a^3 \omega^4}{125\rho^2 c_t^3} \left( \frac{2}{c_l^5} + \frac{3}{c_t^5} \right)$$

Во втором случае, используя выражения (3.11), найдем

$$(5.3) \quad \gamma_l = \frac{4h^2 a \omega^2}{525\rho^2 c_l^6}, \quad \gamma_t = \frac{h^2 a \omega^2}{150\rho^2 c_t^6}$$

При условии  $m', m'', n', n'' \gg 1/\kappa$  имеем  $x \ll 1$  и, как это следует из (5.1), (3.10) и (3.11), в формулах (5.1) выражениями в квадратных скобках можно пренебречь. Это дает для коротких волн

$$(5.4) \quad \gamma_l = \frac{175}{12h^2 \kappa^2 a}, \quad \gamma_t = \frac{75}{8h^2 \kappa^2 a}$$

Формулы (5.2) и (5.3) отличаются от известных асимптотик однократного рассеяния [2] тем, что в них при вычислении параметра анизотропии  $h$  использованы вспомогательные упругие постоянные, зависящие от выбора тела сравнения. В асимптотиках (5.4) выбор тела сравнения влияет на параметры  $h$  и  $\kappa$ .

6. Для скоростей распространения продольных  $v_l$  и поперечных  $v_t$  волн, проводя вычисления по формулам (1.14), (3.8) — (3.10), (4.4) — (4.6),

(4.8), получим

$$(6.1) \quad v_l = c_l \left[ 1 - \frac{1}{3\kappa \rho c_l^2} \left( \frac{\eta_1 - x\eta_3}{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \frac{2x(\eta_1^2\eta_3 + \eta_1\eta_2\eta_4)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} - 1 \right) \right]$$

$$(6.2) \quad v_t = c_t \left[ 1 - \frac{1}{4\kappa \rho c_t^2} \left( \frac{\eta_5 - x\eta_7}{\eta_5^2 + \eta_6^2} + \frac{2x(\eta_5^2\eta_7 + \eta_5\eta_6\eta_8)}{(\eta_5^2 + \eta_6^2)^2} - 1 \right) \right]$$

Здесь

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \tau (2u_1 - 2u_2 + 4u_3 - 5u_4 + 4u_5) + 1 \\ \eta_2 &= \tau (2u_6 - 2u_7 + 4u_8 - 5u_9 + 4u_{10}) \\ \eta_3 &= \tau (2H_1 - 2H_2 + 4H_3 - 5H_4 + 4H_5) \\ \eta_4 &= \tau (2H_6 - 2H_7 + 4H_8 - 5H_9 + 4H_{10}) \\ \eta_5 &= 2/3 \eta_1 + 1/3 + \tau (2u_5 - u_3), \quad \eta_6 = 2/3 \eta_2 + \tau (2u_{10} - u_8) \\ \eta_7 &= 2/3 \eta_3 + \tau (2H_5 - H_3), \quad \eta_8 = 2/3 \eta_4 + \tau (2H_{10} - H_8) \\ H_1 &= -\frac{1}{8} xw(v + 4x^2) + \frac{1}{32} (t_1w_2 + w_1t_2 + t_3w_4 + w_3t_4) \\ H_2 &= x\eta^2 + \frac{1}{4} (t_1w_5 + w_1t_5), \quad H_3 = -x + \frac{1}{4} (t_3w_6 + w_3t_6) \\ H_4 &= -2x\eta^4 (x^4 + 2wx^2 + 2vw - w^2) u^2, \quad H_5 = 2x(4 + x^2)^{-2} \\ H_6 &= \frac{1}{16} x^2 (1 - \eta) (5x^2 + 12 + 6\eta + 6\eta^2) + \\ &+ \frac{1}{48} (4 - 3\eta - 2\eta^3 - 3\eta^5) + \frac{1}{64} (t_7w_2 + w_7t_2 + t_8w_4 + w_8t_4) \\ H_7 &= -\frac{1}{2} \eta^3 + \frac{1}{8} (t_7w_5 + w_7t_5) \\ H_8 &= 1/2 + 1/8 (t_8w_6 + w_8t_6), \quad H_9 = 2\eta^5 (3x^4 + 2vx^2 - w^2) u^2 \\ H_{10} &= -2(3 + 4x^{-2})(x^2 + 4)^{-2}, \quad w_1 = (x^2 - \eta^2 + 1)u \\ w_2 &= 7x^6 + 15vx^4 + 3(1 + 2v + 3\eta^4)x^2 + w^2v, \quad w_3 = 2u_5 \\ w_4 &= 7x^6 + 30x^4 + 24x^2, \quad w_5 = 3x^2\eta^2 + v\eta^2, \quad w_6 = 2 + 3x^2 \\ w_7 &= 8x\eta u, \quad w_8 = 4u_{10}, \quad \tau = 2\kappa h^2 / (175\rho c^2) \end{aligned}$$

Величины  $w, v, u, u_n$  определены формулами (3.10), а величины  $h$  и  $\kappa$  — формулами (4.1).

Таким образом, для вычисления скоростей распространения продольных  $v_l$  и поперечных  $v_t$  волн необходимо использовать соответственно формулы (6.1) и (6.2). Все величины должны быть снабжены индексом  $l$  или  $t$ . При переходе от параметра  $x$  к волновому числу  $q$  используется соотношение (2.4).

Выражения для скоростей распространения волн в длинноволновом приближении можно получить из формул (2.54) и (2.55) книги [11] (гл. 7), произведя замену  $\gamma_6 \rightarrow h$  и положив  $a_1 = a_3 = 0$ . Дисперсия скорости для коротких волн слабая.

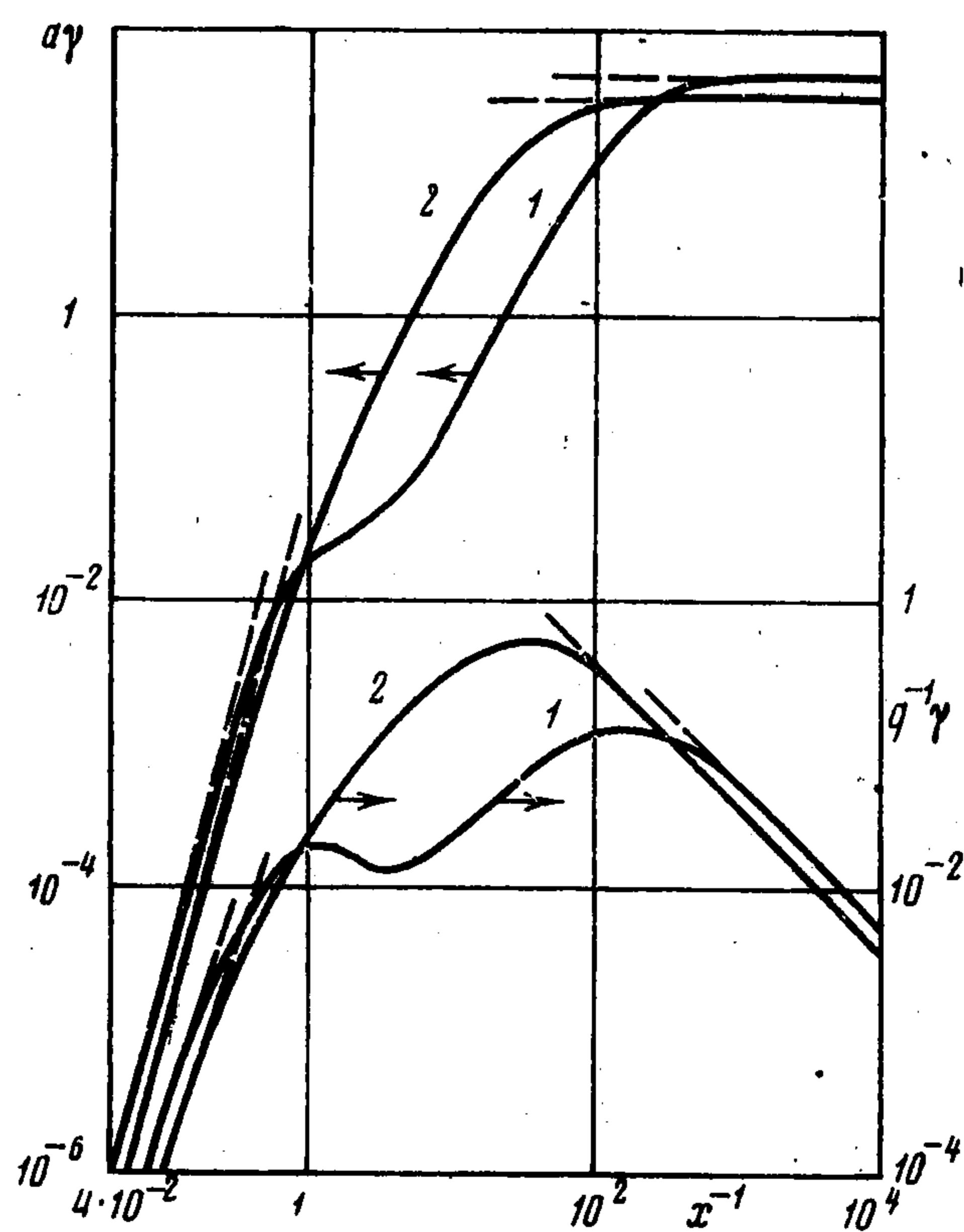
На фигуре представлены зависимости безразмерных коэффициентов рассеяния от частоты и от размера зерна неоднородности, рассчитанные по приведенным формулам как для общего случая, так и в асимптотике длинных и коротких волн. Расчет выполнен для меди, постоянные упругости и модули тела сравнения которой в единицах  $10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> приняты равными  $C_{11} = 16.905$ ,  $C_{12} = 12.193$ ,  $C_{44} = 7.550$ ,  $K_c = 13.76$ ,  $\mu_c = 4.87$  [15], а плотность  $\rho = 8960$  кг/см<sup>3</sup>. Масштаб корреляций  $a$  равен среднему диаметру зерна  $\bar{D}$  [1].

Цифрами 1 и 2 отмечены коэффициенты рассеяния  $\gamma_l(x_l)$  и  $\gamma_t(x_t)$  для продольных и поперечных волн соответственно. Штриховыми линиями отмечены значения  $\gamma_l$  и  $\gamma_t$ , рассчитанные по асимптотическим формулам для длинных и коротких волн. По оси абсцисс отложена величина  $1/x_l$  для продольных волн и  $1/x_t$  для поперечных.

В области высоких и низких частот (больших и малых зерен неоднородности)  $\gamma_l > \gamma_t$ , а в промежуточной области  $\gamma_l < \gamma_t$ . Видно, что при длине волны  $\lambda$ , намного превышающей размер зерна  $\bar{D}$ , коэффициенты рассеяния ультразвуковых волн зернами поликристалла пропорциональны  $\bar{D}^3 \omega^4$  (область релеевского рассеяния), при более низких значениях  $\lambda/\bar{D}$  они пропорциональны  $\bar{D} \omega^3$  (область фазового рассеяния) и при  $\lambda/\bar{D} \ll 1$  — обратно пропорциональны размеру зерна и не зависят от частоты (область диффузного рассеяния).

К подобной зависимости приводит и расчет, основанный [на учете средней плотности потока энергии через границу зерна [16]]. Такая зависимость подтверждается и экспериментально [1].

Поступила 26 III 1979



### ЛИТЕРАТУРА

1. Пападакис Э. Затухание ультразвука, обусловленное рассеянием в поликристаллических средах. В кн.: Физическая акустика. Т. 4. Ч. Б. М., «Мир», 1970.
2. Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2.
3. Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Рассеяние и дисперсия скорости ультразвуковых волн в поликристаллах орторомбической симметрии. ПМТФ, 1976, № 3.
4. Фокин А. Г. Об использовании сингулярного приближения при решении задач статистической теории упругости. ПМТФ, 1972, № 1.
5. Ломакин В. А. О теории деформирования микroneоднородных тел и ее связи с моментной теорией упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
6. Новожилов В. В. О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в статистически изотропных однородных упругих телах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
7. Фокин А. Г. Эффективные модули упругости неоднородных сред в случае потенциальных и бивихревых тензорных полей. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
8. Shermegor T. D., Patlazhan S. A. Elastic Constants of Quasi — Isotropic Polycrystals. Phys. Stat. Solidi (a), 1976, vol. 38, No. 1.
9. Чигарев А. В. К расчету макроскопических коэффициентов стохастически неоднородных упругих сред. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
10. Подболотов Б. Н., Поленов В. С., Чигарев А. В. Динамическое деформирование квазиизотропных композитных сред. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
11. Шермергор Т. Д. Теория упругости микroneоднородных сред. М., «Наука», 1977.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1—2. М., «Наука», 1973—1974.
13. Шермергор Т. Д. Соотношения между компонентами корреляционных функций упругого поля. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
14. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Корреляционные функции упругого поля квазиизотропных твердых тел. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
15. Шермергор Т. Д. Модули упругости неоднородных материалов. В сб.: Упрочнение металлов волокнами. М., «Наука», 1973.
16. Розлин Л. Л. О рассеянии ультразвука в поликристаллических материалах. Акуст. ж., 1972, т. 18, вып. 1.