Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 534.2 : 532

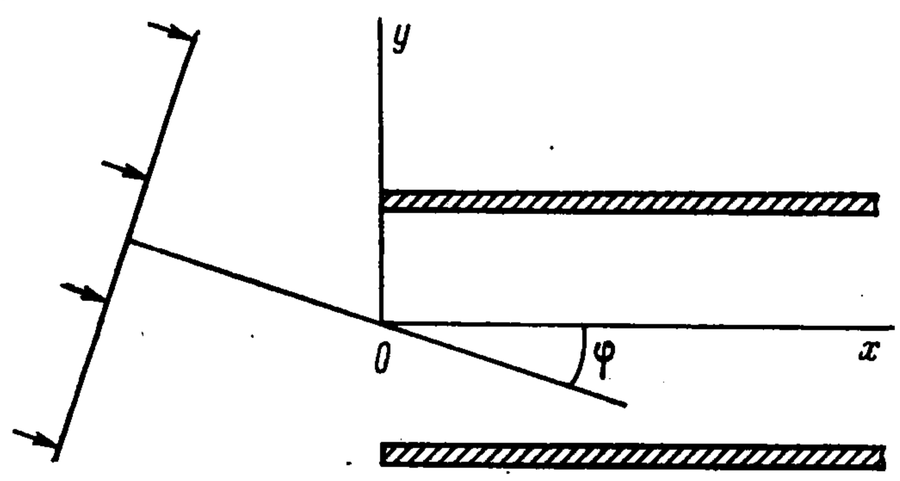
ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ ПЛОСКОГО, ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА С ТОНКИМИ УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

Л. А. Левицкий

(Ленинград)

Рассматриваются стационарные акустические колебания жидкости, в которую погружены две параллельные полуплоскости, образующие открытый полубесконечный волновод. Дифракция на открытом конце волновода с абсолютно жесткими (мягкими) стенками подробно изучена в работе [1]. В предлагаемой статье рассматривается волновод с полупрозрачными стенками. Искомой величиной считается давление, для которого внутри области предполагается выполненным уравнение Гельмгольца, на границе — некоторые условия, содержащие производные высокого порядка, а на ребре полуплоскостей — так называемые гранично-контактные условия. Выражения для граничных и гранично-контактных операторов не конкретизируются. Находится точное представление для давления в том случае, когда звуковое поле возбуждается плоской волной.

1. Постановка задачи. В сжимаемую жидкость помещены два одинаковых тонких полубесконечных параллельных экрана, образующих открытый плоский волновод. Ограничимся случаем несжимаемых стенок, поскольку учет сжимаемости материала стенок привел бы к задаче факторизации матрицы второго порядка; в общем случае для таких задач аналитическое решение неизвестно.



Фиг. 1

Пусть плоская гидроакустическая волна $A \exp [i (\mu x - \sqrt{k^2 - \mu^2} y)]$ $(\mu = k \cos \varphi)$ набегает из жидкости на волновод под углом φ к экранам (см. фиг. 1).

Искомой величиной является поле, рассеянное от стенок волновода. Множитель $\exp(-i\omega t)$, задающий зависимость процессов от времени, везде опущен. Будем описывать акустические процессы в системе в терминах давления $P(x, y)$. Поставленная задача состоит в построении решения однородного уравнения Гельмгольца вне стенок волновода ($k = w / c$ — волновое число, ω — круговая частота, c — скорость звука в жидкости, $2a$ — ширина волновода) с граничными условиями на стенках

$$\Delta P(x, y) + k^2 P(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, \pm a+0) = \frac{\partial}{\partial y} P(x, \pm a-0) \tag{1.2}$$

$$LP(x, y) = m_1\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial y} P(x, \pm a) + \tag{1.3}$$

$$+ m_2\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[P(x, \pm a+0) - P(x, \pm a-0)] = 0 \quad (x > 0)$$

Условие (1.2) означает несжимаемость стенок и непрерывность вертикальных смещений на границе жидкости и экрана, условие (1.3) следует из уравнения динамики для пластин [2]. Операторы m_1, m_2 — полиномы аргумента $\partial^2 / \partial x^2$. Коэффициенты этих полиномов— функции механических параметров задачи и, вообще говоря, могут зависеть от волнового числа k. В соответствии с принципом предельного поглощения считаем $\operatorname{Im} k > 0$. Решение при $\operatorname{Im} k = 0$ получается предельным переходом $\operatorname{Im} k \to 0$ [2].

Важный пример граничного условия вида (1.3) получим, считая стенки волновода тонкими, способными лишь к изгибным колебаниям пластинками

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \chi^4\right)\frac{\partial}{\partial y} P(x, \pm a) + \nu[P(x, \pm a+0) - P(x, \pm a-0)] = 0 \tag{1.4}$$

$$\chi = \chi_0 \sqrt{k}, \quad \chi_0^4 = 12(1-\sigma^2)\rho_0 c^2 E^{-1}$$

$$\nu = \nu_0 k^2, \quad \nu_0 = 12(1-\sigma^2)\rho c^2 E^{-1}$$

Здесь σ — модуль Пуассона, E — модуль Юнга, ρ_0 — плотность пластин, ρ — плотность жидкости. Величины x, y, k, a безразмерны, характерным размером служит толщина пластины h. Другой пример граничного условия (1.3) будем иметь, считая стенки волновода мембранами

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{a^2}\right)\frac{\partial}{\partial y} P(x, \pm a) - \frac{\rho\omega^2}{a^2}[P(x, \pm a+0) - P(x, \pm a-0)] = 0$$

$$a^2 = \frac{T}{\rho_0}$$

Здесь T — натяжение мембраны, ρ_0 — ее плотность.

В постановке (1.1) — (1.3) решение задачи не единственно, ибо не задан режим на кромках стенок волновода. Для выделения единственного решения необходимо сформулировать гранично-контактные условия, определяющие режим на кромках стенок (см. п. 4).

2. Построение решения. Из граничных условий (1.2), (1.3) видно, что на стенке волновода давление $P(x, y)$ испытывает скачок, а его нормальная производная непрерывна. Представим $P(x, y)$ как потенциал двойного слоя и введем скачки давления на стенках: $f_1(x)$ — на стенке $y = +a$, $f_2(x)$ — на стенке $y = -a$. Используя функцию Грина плоской задачи для уравнения Гельмгольца

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \pi i H_0^{(1)}(kr), \quad r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля, имеем для рассеянного поля

$$P_p(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x')\frac{\partial}{\partial y}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1') + f_2(x')\frac{\partial}{\partial y}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2')\right]dx'$$

Здесь $\mathbf{r}_1'(x', a)$ и $\mathbf{r}_2'(x', -a)$ — радиусы-векторы точек на верхней и нижней стенках. Применив теорему о преобразовании Фурье свертки функций, получим

$$P_p(x,y) = -\frac{i}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\lambda x)}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}[F_1(\lambda)\exp(i\sqrt{k^2-\lambda^2}|y-a|+$$
$$+F_2(\lambda)\exp(i\sqrt{k^2-\lambda^2}|y+a|)]\,d\lambda$$

где $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$ — преобразования Фурье скачков $f_1(x)$, $f_2(x)$. В таком виде для $P_p(x, y)$ выполнен принцип предельного поглощения, удовлетворяется уравнение (1.1), $P(x, y)$ имеет скачок на стенках, а производная $P_y'(x, y)$ непрерывна при $y = \pm a$. Рассеянное поле непрерывно в окрестности кромок стенок волновода. Для обеспечения непрерывности $P(x, y)$ достаточно потребовать

$$F_1(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon}),\quad F_2(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon}),\quad 0<\varepsilon<1/2,\quad \lambda\to\pm\infty$$

Разложим полное поле $P(x, y)$ на части: симметричную по y $P_s(x, y)$ и антисимметричную $P_a(x, y)$

$$P(x, y) = P_s(x, y) + P_a(x, y);\qquad 2P_s(x, y) = P(x, y) +$$
$$+P(x, -y)$$

Ниже подробно рассмотрим построение решения для симметричной части поля. Для антисимметричной части будем приводить лишь результаты, ибо вычисления одинаковы. Имеем

$$P_s(x, y) = A\exp(i\mu x)\cos(\sqrt{k^2-\mu^2}y) -$$
$$-\frac{i}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\lambda x)}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}F_s(\lambda)[\exp(i\sqrt{k^2-\lambda^2}|y-a|)-$$
$$-\exp(i\sqrt{k^2-\lambda^2}|y+a|)]\,d\lambda$$
$$2F_s(\lambda) = F_1(\lambda) - F_2(\lambda)$$

Запишем граничное условие (1.3) для поля $P_s(x, y)$

$$-A\exp(i\mu x)m_1(\mu^2)\sqrt{k^2-\mu^2}\sin(\sqrt{k^2-\mu^2}a)+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_s(\lambda)\exp(i\lambda x)\,l_s(\lambda)\,d\lambda = 0$$
$$l_s(\lambda) = i\sqrt{k^2-\lambda^2}m_1(\lambda^2)[1-\exp(2ai\sqrt{k^2-\lambda^2})] + 2m_2(\lambda^2)$$

Учитывая, что при $x>0$

$$\exp(i\mu x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\lambda x)}{\lambda-\mu}\,d\lambda$$

получим интегральное уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda x)\Big[F_s(\lambda)\,l_s(\lambda)+ \tag{2.1}$$
$$+2Aim_1(\mu^2)\sin(a\sqrt{k^2-\mu^2})\sqrt{k^2-\mu^2}\frac{1}{\lambda-\mu}\Big]\,d\lambda = 0,\quad x>0$$

Скачок акустического давления вне пластин равен нулю, поэтому второе интегральное уравнение будет иметь вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x) F_s(\lambda)\, d\lambda = 0 \quad (x < 0) \tag{2.2}$$

Корни дисперсионного уравнения

$$l_s(\lambda) = 0 \tag{2.3}$$

дают волновые числа собственных, симметричных по y колебаний волновода. Будем считать, что алгебраический порядок $2S_1$ полинома $m_1(\lambda^2)$ не ниже степени $2S_2$ полинома $m_2(\lambda^2)$, а уравнение (2.3) при $\operatorname{Im} k > 0$ не имеет вещественных корней на основном листе двулистной римановой поверхности функции $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$. Выбор основного листа радикала $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ осуществим следующим образом. Из точки $\lambda = k$ проводим разрез, который при $|\lambda| \to \infty$ должен асимптотически приближаться к линии $\operatorname{Im} \sqrt{k^2 - \lambda^2} = 0$. Точнее о виде разреза скажем ниже. Второй разрез из точки $\lambda = -k$ проводим симметрично с первым относительно точки $\lambda = 0$. Будем считать, что на основном листе $\lim \operatorname{Im} \sqrt{k^2 - \lambda^2} = +\infty$ при $\lambda \to \pm\infty$.

Корни уравнения (2.3) распадаются на две группы. Корни одной группы (их конечное число) приближаются при раздвижении стенок волновода ($ka \to \infty$) к корням дисперсионного уравнения

$$l(\lambda) = i\sqrt{k^2 - \lambda^2}\, m_1(\lambda^2) + 2m_2(\lambda^2) = 0 \tag{2.4}$$

одиночной упругой пластины, погруженной в жидкость. Алгебраический порядок функции $l(\lambda)$ равен $2S_1 + 1$, поэтому на римановой поверхности уравнение (2.4) имеет $2(2S_1 + 1)$ корней. Соответствующие корни уравнения (2.3) назовем пластинными. Корни второй группы (их счетное множество) приближаются при увеличении плотности материала стенок ($\rho_0 \to \infty$) к волновым числам $\zeta_N = \sqrt{k^2 - (\pi N / a)^2}$ нормальных волн волновода с идеально жесткими стенками, дисперсионное уравнение для которого имеет вид

$$1 - \exp(2ai\sqrt{k^2 - \lambda^2}) = 0$$

Такие корни условимся называть волноводными. Отметим, что если уравнение (2.3) переписать в виде

$$1 - \exp(2ai\sqrt{k^2 - \lambda^2}) = \frac{2i}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \frac{m_2(\lambda^2)}{m_1(\lambda^2)} \tag{2.5}$$

то при $|\lambda| \to \infty$ правая часть уравнения (2.5) будет порядка $1 / \lambda^{(1+2S_1-2S_2)}$, поэтому при $N \to \infty$ для волноводных корней справедлива асимптотика

$$\zeta_N \sim i\sqrt{(\pi N / a)^2 - k^2}$$

и корни с ростом N асимптотически приближаются к линии

$$\operatorname{Im} \sqrt{k^2 - \lambda^2} = 0$$

Проведем теперь разрез на комплексной плоскости λ от точки $\lambda = k$ так, чтобы он проходил через волноводные корни уравнения (2.3), не задевая пластинных корней.

Уравнения (2.1), (2.2) будут удовлетворяться при выполнении следующих условий:

$$F_s(\lambda)\, l_s(\lambda) + \frac{2Ai}{\lambda-\mu} m_1(\mu^2)\sqrt{k^2-\mu^2}\sin(a\sqrt{k^2-\mu^2}) = u^+(\lambda) \tag{2.6}$$

$$F_s(\lambda) = u^-(\lambda)$$

где u^+ (u^-) — функция, аналитическая выше (ниже) контура интегрирования.

Исключая $F_s(\lambda)$ из условий (2.6), придем к неоднородной краевой задаче Римана [3], которая состоит в отыскании двух функций $u^+(\lambda)$, $u^-(\lambda)$ по линейному соотношению между ними, выполненному на вещественной оси.

Следуя методу решения подобной задачи Римана, приведенному в [2], имеем

$$F_s(\lambda) = \frac{1}{l_s^-(\lambda)}\left[g_s(\lambda) + \frac{2Aim_1(\mu^2)}{(\mu-\lambda)\, l_s^+(\mu)}\sqrt{k^2-\mu^2}\sin(a\sqrt{k^2-\mu^2})\right] \tag{2.7}$$

$$l_s(\lambda) = l_s^+(\lambda)\, l_s^-(\lambda), \quad l_s^\pm(\lambda) = O(\lambda^{s_1+1/2}), \quad |\lambda| \to \infty$$

Здесь $g_s(\lambda)$ — полином степени $S_1 - 1$ с S_1 произвольными коэффициентами, определяемыми далее; $l_s^\pm(\lambda)$ — результат факторизации функции $l_s(\lambda)$, причем функция $l_s^+(\lambda)$ ($l_s^-(\lambda)$) аналитична в верхней (нижней) полуплоскости.

Аналогичные рассуждения для антисимметричной части поля дают

$$F_a(\lambda) = \frac{1}{l_a^-(\lambda)}\left[g_a(\lambda) - \frac{2Am_1(\mu^2)}{(\mu-\lambda)\, l_a^+(\mu)}\sqrt{k^2-\mu^2}\cos(a\sqrt{k^2-\mu^2})\right]$$

$$l_a(\lambda) = i\sqrt{k^2-\lambda^2}\, m_1(\lambda^2)[1 + \exp(2ai\sqrt{k^2-\lambda^2})] + 2m_2(\lambda^2)$$

где $l_a^\pm(\lambda)$ — результат факторизации функции $l_a(\lambda)$.

3. Факторизация $l_s(\lambda)$. Для построения факторизационной формулы воспользуемся методом, изложенным в [4]. В соответствии с п. 2 функция $l_s(\lambda)$ в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < \tau$, $\tau < \operatorname{Im} k$ не имеет нулей. Видно, что существует такая комплексная постоянная, что

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty} l_s(\lambda)/(Q\gamma^{2S_1+1}) = 1, \quad |\operatorname{Im}\lambda| < \tau, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2-k^2} =$$

$$= -i\sqrt{k^2-\lambda^2}$$

Как было отмечено, $l_s(\lambda)$ имеет конечное число пластинных корней, лежащих вне полосы $|\operatorname{Im}\lambda| > \tau$ на дневном листе римановой поверхности, и счетное множество волноводных корней, лежащих на разрезе.

Построим функцию

$$F(\lambda) = \ln[l_s(\lambda)/(Q\gamma^{2S_1+1})]$$

Для разности

$$F(\lambda) - F(0) = \ln l_s(\lambda) - \ln l_s(0) - (S_1 + 1/2)\ln(1 - \lambda^2/k^2) \tag{3.1}$$

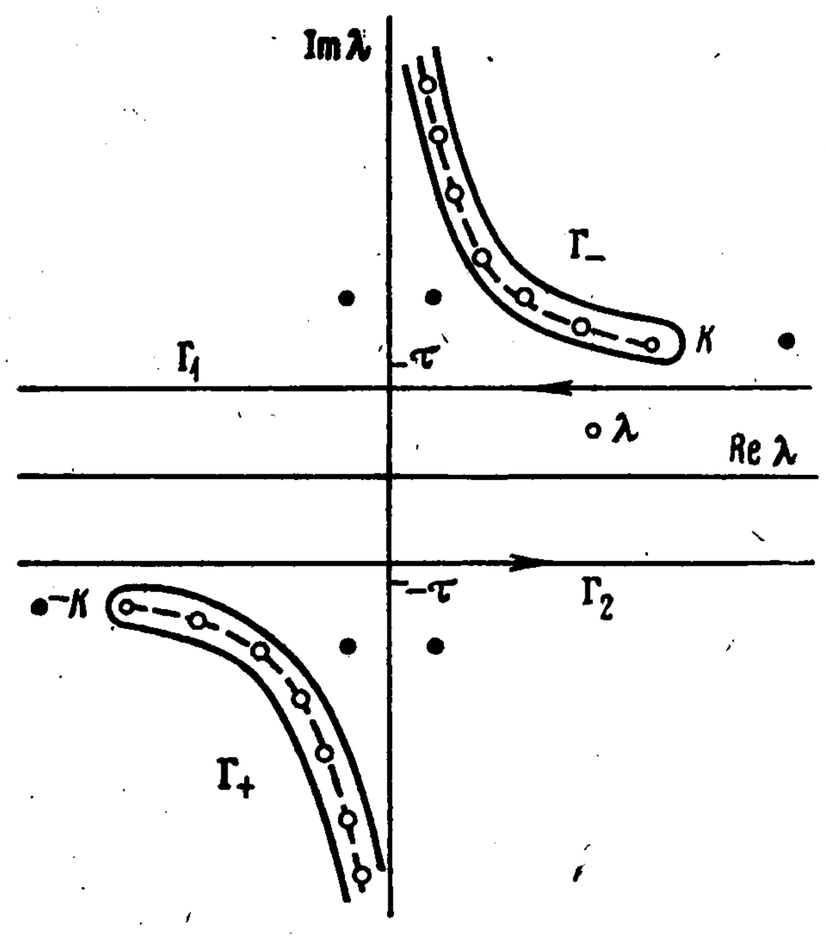
интеграл типа Коши равен

$$F(\lambda) - F(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{\lambda F(z)}{z(z-\lambda)}\, dz \tag{3.2}$$

Контур $\Gamma_1 + \Gamma_2$ получается «раздуванием» замкнутой петли, охватывающей точки $z = 0$ и $z = \lambda$ (см. фиг. 2, где светлыми точками обозначены

волноводные корни уравнения (2.3), темными точками — пластинные; штриховые линии — разрезы комплексной плоскости). Интегралы по бесконечно удаленным участкам контура, параллельным мнимой оси, равны нулю. Выражая $l_s(\lambda)$ из (3.1) и (3.2), имеем

$$l_s(\lambda)=l_s(0)\left(1-\frac{\lambda^2}{k^2}\right)^{(S_1+1/2)}\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2}\frac{\lambda F(z)}{z(z-\lambda)}dz\right] \tag{3.3}$$



Фиг. 2

Каждый множитель в (3.3) факторизуется просто, поэтому

$$l_s^+(\lambda)=l_s^-(-\lambda)=\sqrt{l_s(0)}\,(1+\lambda/k)^{S_1+1/2}\exp E_+(\lambda) \tag{3.4}$$

$$E_+(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\lambda F(z)}{z(z-\lambda)}dz \tag{3.5}$$

Функция $E_+(\lambda)$ ограничена при $|\lambda|\to\infty$, поэтому

$$l_s^+(\lambda)\sim\lambda^{S_1+1/2},\quad |\lambda|\to\infty$$
$$\operatorname{Im}\lambda>-\tau$$

Проинтегрировав в (3.5) по частям и заменив z на $-z$, получим

$$E_+(\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\left[\frac{2S_1+1}{k^2-z^2}z+\frac{l_s'(z)}{l_s(z)}\right]\ln\left(1+\frac{\lambda}{z}\right)dz$$

Деформируя теперь контур Γ_1 в кривую Γ_-, охватывающую разрез, и учитывая вычеты функции $l_s'(z)/l_s(z)$ в пластинных нулях ξ_i функции $l_s(z)$, лежащих в верхней полуплоскости дневного листа, получим

$$l_s^+(\lambda)=\sqrt{l_s(0)}\,(1+\lambda/k)^{S_1+1/2}\prod_{\operatorname{Im}\xi_i>0}\left(1+\frac{\lambda}{\xi_i}\right)\times \tag{3.6}$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-}\left[\frac{2S_1+1}{k^2-z^2}z+\frac{l_s'(z)}{l_s(z)}\right]\ln\left(1+\frac{\lambda}{z}\right)dz\right\}$$

Преобразуем факторизационную формулу (3.6) так, чтобы выделить вклад волноводных полюсов функции $l_s'(k)/l_s(z)$. Введем новую переменную $w=\sqrt{k^2-z^2}$. Тогда $z=\sqrt{k^2-w^2}$, где ветвь квадратного корня выбрана так, что $\operatorname{Im}\sqrt{k^2-w^2}>0$. Интеграл в (3.6) примет вид

$$Q_+(\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-}\left[\frac{2S_1+1}{w}-B_s(w)\right]\ln\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{k^2-w^2}}\right)dw$$

$$B_s(w)=\frac{1}{l_s(w)}\frac{dl_s(\sqrt{k^2-w^2})}{dw}$$

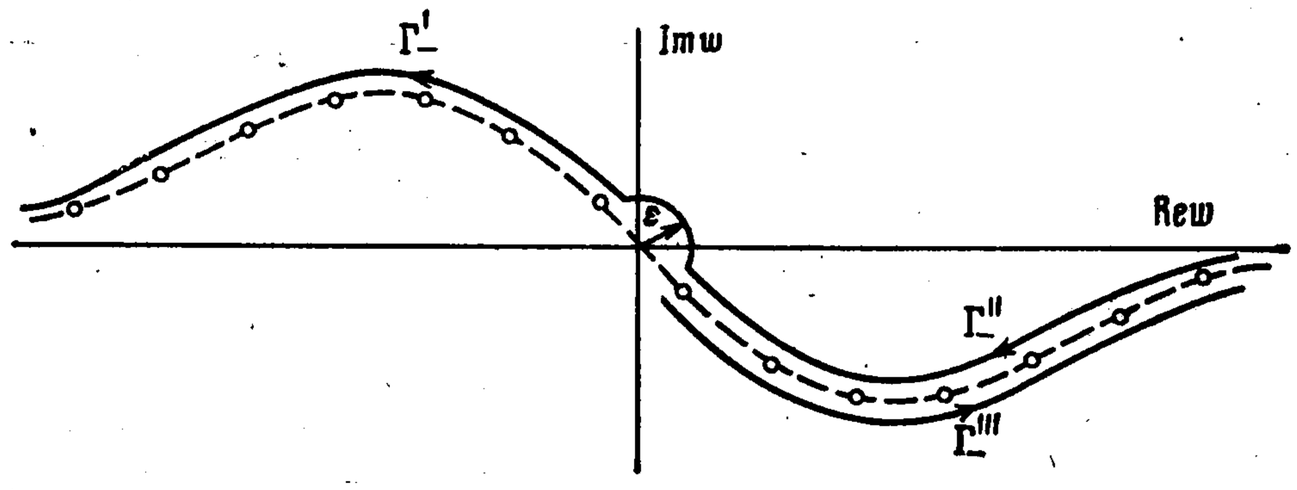
Контур Γ_- на w-плоскости указан на фиг. 3 и состоит из ветвей Γ_-' и Γ_-''. Следуя [4], вычислим интеграл по полуокружности малого радиуса, огибающей точку $w=0$. Если обозначить S_0 вычет функции $B_s(w)$ в

$w = 0$, то интеграл будет равен $(S_0 / 2 - S_1 - {}^1/_2) \ln (1 + \lambda / k)$. Интеграл по ветви Γ_-' заменой $w \to -w$ сводится к интегралу по дуге Γ_-''', в результате имеем

$$(3.7)\qquad Q_+(\lambda) = (S_0 / 2 - S_1 - {}^1/_2) \ln (1 + \lambda / k) + \\ + \lim_{M\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\lambda}{\zeta_n}\right) + \int_0^{\zeta_m} K_s(w) \ln\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - w^2}}\right) dw \right]$$

$$K_s(w) = -\frac{1}{2\pi i} [B_s(w) + B_s(-w)]$$

где первое слагаемое под знаком предела — сумма вычетов функции $B_s(w)$ в волноводных нулях ζ_n функции $l_s(\lambda)$, второе слагаемое — интеграл по разрезу вплоть до корня ζ_m.



Фиг. 3

Можно показать, что

$$(3.8)\qquad K_s(w) = -a / \pi + K_{1s}(w)$$

$$K_{1s}(w) = \\ = -\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2(aw) [\sqrt{k^2 - w^2} m_1 m_2 + w^2 (m_1 m_2' - m_1' m_2)] - a \sqrt{k^2 - w^2} m_2^2}{\sqrt{k^2 - w^2} [w^2 \sin^2(aw) m_1^2 + w \sin(2aw) m_1 m_2 + m_2^2]}$$

$$K_{1s}(w) = O\left(w^{-2(1+S_1-S_2)}\right), \quad |w| \to \infty$$

В выражении (3.8), таким образом, явно выделено слагаемое $(-a / \pi)$, отвечающее идеально жесткому волноводу. Отметим, что в выражении (3.7) интеграл от функции

$$-\frac{a}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - w^2}}\right)$$

по разрезу можно заменить интегралом по участку вещественной оси от $w = 0$ до $w = M\pi / a$. Подставляя возникающий предел, вычисленный в [4], а также соотношения (3.8), (3.7) в (3.6), получим окончательно (C — постоянная Эйлера)

$$(3.9)\qquad l_s^+(\lambda) = l_s^-(-\lambda) = \sqrt{l_s(0)} (1 + \lambda / k)^{S_0/2} \prod_{\operatorname{Im}\xi_i > 0} \left(1 + \frac{\lambda}{\xi_i}\right) \times \\ \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\zeta_n}\right) \exp\left(\frac{ia\lambda}{\pi n}\right) \exp\left[\frac{ia\lambda}{\pi}\left(1 - C + \ln\left(\frac{2\pi}{ka}\right) + i\frac{\pi}{2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{ia\gamma}{\pi} \ln\left(\frac{\lambda - \gamma}{k}\right)\right)\right] \exp\left[\int_0^{\infty} K_{1s}(w) \ln\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - w^2}}\right) dw\right]$$

Интеграл в (3.9) берется по разрезу. Формула для $l_a^+(\lambda)$ записывается аналогично с заменой $K_{1s}(w)$ на

$$K_{1a}(w) = -\frac{1}{\pi}\frac{\cos^2(aw)\left[\sqrt{k^2-w^2}m_1m_2 + w^2(m_1m_2' - m_1'm_2)\right] - a\sqrt{k^2-w^2}m_2^2}{\sqrt{k^2-w^2}\left[w^2\cos^2(aw)\,m_1^2 - w\sin(2aw)\,m_1m_2 + m_2^2\right]}$$

4. Гранично-контактные условия. Отметим, что S_1 коэффициентов полинома $g_s(\lambda)$ — пока произвольные постоянные, для определения которых необходимо S_1 гранично-контактных условий, задающих режим на кромках стенок волновода. Общий вид гранично-контактных условий таков:

$$R_jP(+0,a) = \lim_{x\to+0}\left\{S_{1j}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}P(x,a) + S_{2j}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[P(x,a+0) - P(x,a-0)\right]\right\} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, S_1 \tag{4.1}$$

Для частного случая изгибных колебаний (1.4) тонкой пластины со свободной кромкой имеем $S_1 = 2$ и гранично-контактные условия имеют вид

$$\lim_{x\to+0}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y}P(x,a) = 0, \quad k = 2, 3$$

Физический смысл этих условий состоит в отсутствии на кромках пластин сосредоточенных сил и моментов. Гранично-контактные условия для симметричной по y части поля $P_s(x, y)$ таковы:

$$R_jP_s(x,y) = -AS_{1j}(\mu)\sqrt{k^2-\mu^2}\sin\left(a\sqrt{k^2-\mu^2}\right) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+i0\lambda)F_s(\lambda)r_j(\lambda)\,d\lambda = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, S_1 \tag{4.2}$$

Здесь

$$r_j(\lambda) = iS_{1j}(\lambda)\sqrt{k^2-\lambda^2}\left[1 - \exp\left(2ai\sqrt{k^2-\lambda^2}\right)\right] + 2S_{2j}(\lambda)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+i0\lambda)f(\lambda)\,d\lambda = \lim_{x\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda x)f(\lambda)\,d\lambda$$

Написав явное разложение полинома $g_s(\lambda)$ по степеням λ

$$g_s(\lambda) = C_0 + C_1\lambda + \ldots + C_{s_1-1}\lambda^{s_1-1}$$

и подставив в (4.1) выражение для $F_s(\lambda)$ из (2.7), получим систему из S_1 уравнений с S_1 неизвестными $C_n(k)$

$$\sum_{n=0}^{S_1-1}C_nI_{jn} = 4\pi AS_{1j}(\mu)\sqrt{k^2-\mu^2}\sin\left(a\sqrt{k^2-\mu^2}\right) - \frac{2Am_1(\mu^2)\sqrt{k^2-\mu^2}\sin\left(a\sqrt{k^2-\mu^2}\right)}{l_s^+(\mu)}J_j, \quad j = 1, 2, \ldots, S_1$$

$$I_{nj}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+i0\lambda)\frac{l_s^+(\lambda)}{l_s(\lambda)}\lambda^n r_j(\lambda)\,d\lambda, \quad n = 0, 1, \ldots, S_1-1 \tag{4.3}$$

$$J_j(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+i0\lambda)\frac{l_s^+(\lambda)}{l_s(\lambda)}\frac{1}{\lambda-\mu}r_j(\lambda)\,d\lambda \tag{4.4}$$

Интегралы (4.3), (4.4), вообще говоря, расходящиеся. Для их регуляризации [2] будем деформировать контур интегрирования к разрезу в верхней полуплоскости λ.

При этом будут пересечены полюса подынтегрального выражения, расположенные в пластинных корнях $l_s^-(\lambda)$

$$I_{nj}(k) = 2\pi i \sum_m \frac{\lambda^n r_j(\lambda)\, l_s^+(\lambda)}{l_s'(\lambda)}\Bigg|_{\lambda=\xi_m} + \int\limits_{\Gamma_-} \frac{\exp(+i0\lambda)\,\lambda^n r_j(\lambda)}{l_s^-(\lambda)}\,d\lambda \tag{4.5}$$

Суммирование в (4.5) идет по пластинным корням ξ_m уравнения (2.3), лежащим в верхней полуплоскости λ. Учитывая соотношения обхода для функций $l_s^-(\lambda)$, полученные в [2]

$$l_s^-(\lambda)\Big|_{\lambda\in\Gamma_-''} = \frac{l_s^\circ(\lambda)}{l_s(\lambda)}\, l_s^-(\lambda)\Big|_{\lambda\in\Gamma_-'}$$

$$l_s^\circ(\lambda) = -\sqrt{k^2-\lambda^2}\, m_1(\lambda^2)\,[1-\exp(-2ai\sqrt{k^2-\lambda^2})] + 2m_2(\lambda^2)$$

Значения функции $l_s^\circ(\lambda)$ на основном листе совпадают со значениями $l_s(\lambda)$ на втором листе.

Теперь интеграл по Γ_- можно заменить интегралом по берегу Γ_-''

$$I_{nj}(k) = 2\pi i \sum_m \frac{\lambda^n r_j(\lambda)\, l_s^+(\lambda)}{l_s'(\lambda)}\Bigg|_{\lambda=\xi_m} + \tag{4.6}$$

$$+ 8i \int\limits_{\Gamma_-''} \exp(+i0\lambda)\, \frac{\lambda^n \sqrt{k^2-\lambda^2}\sin^2(a\sqrt{k^2-\lambda^2})}{l_s^-(\lambda)\, l_s^\circ(\lambda)}\,[m_2 S_{1j} - m_1 S_{2j}]\,d\lambda]$$

Для сходимости интеграла в (4.6) наложим на функцию $r_j(\lambda)$ ограничение

$$[m_2(\lambda^2)\, S_{1j}(\lambda) - m_1(\lambda^2)\, S_{2j}(\lambda)] = o(\lambda^{2S_1}),\ |\lambda| \to \infty \tag{4.7}$$

т. е. функция в левой части (4.7) растет на бесконечности медленнее, чем $|\lambda|^{2S_1}$. Как отмечено в [2], ограничение вида (4.7) на $r_j(\lambda)$ означает необходимую, вытекающую из физики явления связь между гранично-контактными операторами R_j и граничным оператором L. Для интегралов J_j аналогичным путем получаем выражение

$$J_j(k) = 2\pi i \sum_m \frac{r_j(\lambda)\, l_s^+(\lambda)}{(\lambda-\mu)\, l_s'(\lambda)}\Bigg|_{\lambda=\xi_m} + 2\pi i\, \frac{r_j(\mu)}{l_s^-(\mu)} +$$

$$+ 8i \int\limits_{\Gamma_-''} \frac{\sqrt{k^2-\lambda^2}\sin^2(a\sqrt{k^2-\lambda^2})\,[m_2 S_{1j} - m_1 S_{2j}]}{l_s^-(\lambda)\, l_s^\circ(\lambda)}\,d\lambda$$

Выражения для гранично-контактных интегралов для антисимметричной по y части поля $P_a(x, y)$ получаются сходным путем.

Автор благодарит Д. П. Коузова и Б. П. Белинского за полезное обсуждение.

Поступила 28 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М., «Сов. радио», 1966.
2. *Коузов Д. П.* Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., «Наука», 1977.
4. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., «Мир», 1974.