Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 533 : 538

ДИФФУЗИОННАЯ И МНОГОСКОРОСТНАЯ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. В. Гогосов, В. А. Налетова, Г. А. Шапошникова

(Москва)

Рассматривается движение жидкости с пузырьками газа или несжимаемыми частицами в электрическом поле. Конструируется новая модель дисперсной среды, когда для каждой фазы выписывается свое уравнение движения, а наличие других фаз учитывается добавлением в уравнения слагаемых, связанных с обменом импульсом между фазами — «многоскоростное» приближение. Выводятся выражения для вызываемых несовпадением диэлектрических проницаемостей и проводимостей фаз сил, действующих со стороны электрического поля на каждую из фаз, а также выражения для феноменологических коэффициентов в уравнениях «диффузионной» и «многоскоростной» моделей. Приводится вывод уравнения энергии смеси в случае многоскоростной разнотемпературной среды. Разъясняется физический смысл входящих в уравнения слагаемых. Обсуждается структура уравнения, описывающего влияние электрического поля на изменение объема пузырей.

Исследуется новое явление, вызванное добавлением в уравнение движения силы, действующей на диспергированную фазу, связанной с поляризацией среды. Эта сила играет роль дополнительного «градиента давления», придавая смеси двух несжимаемых фаз свойства и характеристики сжимаемой среды. Сжимаемость среды проявляется, в частности, в том, что существует конечная, определяемая электрическим полем скорость распространения слабых возмущений, в которых изменяется объемная концентрация диспергированной фазы, а вместе с ней диэлектрическая проницаемость смеси, электрическое поле и другие параметры.

Находятся скорости распространения слабых разрывов в случае многоскоростной и диффузионной моделей. Показано, что упрощение или усложнение системы уравнений, а также добавление в уравнения слагаемых, описывающих взаимодействие электрического поля с поляризующейся средой, может привести к изменению типа уравнений, что должно учитываться при постановке и решении конкретных задач.

Основы гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред изложены в монографии [1]. Вывод уравнений, описывающих движение многокомпонентных и дисперсных систем в диффузионном приближении, когда каждая компонента или фаза поляризуются, вообще говоря, по своему закону, приведен в работах [2-4].

1. Уравнения движения жидкости с пузырьками газа в электрическом поле. Диффузионное приближение. Рассмотрим движение жидкости с пузырьками газа. Будем считать жидкость несжимаемой, а газ, заполняющий пузырьки, совершенным.

Для рассматриваемой в данной работе двухфазной среды в предположении, что температуры фаз одинаковы, химических реакций нет, свободные заряды отсутствуют, вязкостью смеси можно пренебречь и диэлектрическая проницаемость смеси зависит только от объемной концентрации пузырьков, уравнения движения, выведенные без перечисленных ограничений в работах [3,4], имеют вид (диффузионное приближение, перекрестными эффектами пренебрегается)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\Gamma}{dt} + (\Gamma - 1)\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{J}}{\rho_1^\circ}, \quad \mathbf{J} = \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) \tag{1.1}$$

$$\rho_1^\circ = \mathrm{const}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \rho_1^\circ(1 - \Gamma), \quad \rho_2 = \rho_2^\circ \Gamma$$

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{E_i D_k}{4\pi} - \left(\varepsilon - \Gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma}\right)\frac{E^2}{8\pi}\delta_{ik}\right\} + \rho g_i \tag{1.2}$$

$$\rho \mathbf{u} = \rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{J} = TL\left\{\nabla(\xi_{01} - \xi_{02}) + \frac{1}{\rho_2^\circ}\nabla p_{02} + \left(\frac{1}{\rho_1^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ}\right)\nabla p + \frac{1}{\rho_2^\circ}\nabla \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma}\frac{E^2}{8\pi}\right\} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho U\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\rho u_i\left(\frac{u^2}{2} + U\right) + \right. \tag{1.4}$$

$$\left. + u_i\left[p - \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon + \Gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma}\right)\right] + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]_i - \varkappa \nabla_i T - \mathbf{J}_i l\right\}$$

$$U = \sum_1^2 c_\alpha U_{0\alpha} + \varepsilon(\Gamma)\frac{E^2}{8\pi\rho}, \quad U_{0\alpha} = c_{v\alpha} T$$

$$\rho_2 \frac{d_2}{dt}\frac{\Gamma}{\rho_2} = L_\Gamma\left(p_{02} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma}\frac{E^2}{8\pi} - p\right), \quad p_{02} = \rho_2^\circ R_2 T \tag{1.5}$$

$$\xi_{01} = U_{01} - s_{01} T = f_1(T), \quad \xi_{02} = U_{02} - s_{02} T + \frac{p_{02}}{\rho_2^\circ} = f_2(T, \rho_2^\circ) \tag{1.6}$$

$$s_{01} = c_{v1} \ln T, \quad s_{02} = c_{v2} \ln T - R_2 \ln \rho_2^\circ$$

$$l = \xi_{01} - \xi_{02} + \frac{p_{02}}{\rho_2^\circ} + \left(\frac{1}{\rho_1^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ}\right)p + \frac{1}{\rho_2^\circ}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma}\frac{E^2}{8\pi}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon(\Gamma)\mathbf{E} \tag{1.7}$$

Здесь $\rho_\alpha^\circ, c_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, U_{0\alpha}$ и $s_{0\alpha}$ — истинная плотность, массовая концентрация, скорость, внутренняя энергия и энтропия единицы массы (в отсутствие поля) α-й фазы, $\alpha = 1$ — жидкость, $\alpha = 2$ — газ, Γ — объемная концентрация пузырьков, $\mathbf{u}$ — среднемассовая скорость смеси, T — температура смеси, p — давление в несущей среде, обозначаемое в работе [3] буквой $p^{inc} / (1 - \Gamma)$, c_{v2}, c_{p2} — теплоемкости газа при постоянном объеме и давлении соответственно, $R_2 = c_{p2} - c_{v2}$ — газовая постоянная, c_{v1} — теплоемкость жидкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{D}$ — электрическая индукция, ε — диэлектрическая проницаемость смеси, L и L_Γ — коэффициенты кинетических уравнений, обозначаемые в работе [3] буквами $T^{-2}L_{2,2}$ и $\varphi_{10,10}T$ соответственно.

Зависимость диэлектрической проницаемости смеси только от доли объема, занимаемой диспергированной фазой, имеет место, например, в случае, когда диэлектрические проницаемости жидкости и пузырьков можно считать постоянными. Уравнения для случая, когда диэлектрическая проницаемость зависит от температуры среды, электрического поля и других параметров, выведены в [2–4] и отличаются от (1.2) — (1.7).

Уравнения (1.1) — (1.7) получены с использованием общих принципов механики сплошной среды и термодинамики необратимых процессов.

Разрыв электрических характеристик на границе пузырек—жидкость моделируется зависимостью диэлектрической проницаемости смеси ε от объемной концентрации Γ и от констант, характеризующих электрические свойства обеих сред. Именно с этим связано возникновение в правой части уравнения движения (1.2) наряду с производными от тензора максвелловских напряжений $\partial (E_i D_k / 4\pi - \varepsilon E^2 \delta_{ik} / 8\pi) / \partial x_k$ слагаемого стрикционного типа $\partial [\Gamma (\partial\varepsilon / \partial\Gamma) E^2 / 8\pi] / \partial x_i$. Сумма этих двух слагаемых равна $\Gamma\partial [(\partial\varepsilon / \partial\Gamma) E^2 / 8\pi] / \partial x_i$ и, вообще говоря, не может быть представлена в виде градиента какой-либо скалярной величины.

Последнее слагаемое в фигурных скобках в уравнении диффузии (1.3) описывает движение пузырьков (частиц) относительно жидкости в неоднородном электрическом поле. Сила, вызывающая такое движение, также связана с наличием скачка электрических характеристик сред на границе пузырек — жидкость.

Наличие в уравнениях движения и диффузии сил, связанных с поляризацией среды в целом, вообще говоря, может иметь место и в случае, когда поляризацией каждой из фаз можно пренебречь — диэлектрические проницаемости фаз ε_1 и ε_2 равны единице. Эффективная поляризация смеси в этом случае может вызываться, например, различием проводимостей фаз и другими факторами.

Уравнение (1.5) служит для определения объемной концентрации пузырьков и связывает давление в пузырьках с давлением жидкости и изменением объема пузырьков с учетом наличия электрического поля и скачка электрических свойств среды на границе пузырек — жидкость.

В рассматриваемом случае среда в целом сжимаема, $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$. Однако, когда несущая фаза несжимаема, давление p, как и в несжимаемой среде, определяется из решения системы (1.1) — (1.7) и условия $\rho_1{}^\circ = \text{const}$.

2. Связь уравнений движения в диффузионной и многоскоростной моделях. Выведенная в п. 1 система уравнений, состоящая из уравнений движения и энергии для смеси в целом и диффузионных соотношений, заменяющих уравнения движения и энергии для каждой фазы, в ряде случаев недостаточно полно описывает протекающие в таких средах явления. Это связано, например, с пренебрежением в уравнении диффузии инерционными слагаемыми и т. д.

Уравнения неразрывности и импульса для каждой фазы (многоскоростная модель) имеют вид (для определенности полагается $T = \text{const}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\Gamma) + \operatorname{div}(1-\Gamma)\mathbf{v}_1 = 0, \quad \rho_1 = \rho_1{}^\circ(1-\Gamma), \quad \rho_1{}^\circ = \text{const}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_2{}^\circ\Gamma + \operatorname{div}\rho_2{}^\circ\Gamma\mathbf{v}_2 = 0$$

$$\rho_1\frac{d_1 v_{1i}}{dt} = -(1-\Gamma)\nabla_i p + f_{1,2}^i + F_{1i}^E + \rho_1{}^\circ(1-\Gamma)g_i + \nabla_k \Pi^{ik} \tag{2.2}$$

$$\rho_2\frac{d_2 v_{2i}}{dt} = -\Gamma\nabla_i p - f_{1,2}^i + F_{2i}^E + \rho_2{}^\circ\Gamma g_i, \quad \mathbf{f}_{1,2} = L_f(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

Первое уравнение (2.2) — уравнение движения несущей фазы, а второе — уравнение движения диспергированной фазы; $\mathbf{f}_{1,2}$ — обмен импульсом — «сила трения» между фазами; $\mathbf{F}_1{}^E$, $\mathbf{F}_2{}^E$ — силы, действующие на несущую и диспергированную фазы со стороны электрического поля.

Складывая уравнения (2.2), получим

$$\rho\frac{du_i}{dt} + \nabla_k v_{12}^{ik} = -\nabla_i p + F_{1i}^E + F_{2i}^E + \rho g_i + \nabla_k \Pi^{ik} \tag{2.3}$$

$$v_{12}^{ik} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}(v_1{}^i - v_2{}^i)(v_1{}^k - v_2{}^k)$$

Можно ввести, как это делается в гидродинамике многокомпонентных сред [5], параметры p^* и $\Pi_{ik}{}^*$ формулой

$$-p^*\delta_{ik} + \Pi_{ik}{}^* = -p\delta_{ik} + \Pi_{ik} - v_{12}{}^{ik}$$

Параметры p, p^* и Π_{ik}, $\Pi_{ik}{}^*$ — давление и тензор вязких напряжений в системах координат, движущихся со скоростью несущей среды и со скоростью смеси, соответственно; подробно физический смысл p, p^* и Π_{ik}, $\Pi_{ik}{}^*$ изложен в работе [5].

Вычитая второе уравнение (2.2), поделенное на плотность ρ_2, из первого уравнения, поделенного на плотность ρ_1, получим

$$\frac{d_1 v_{1i}}{dt} - \frac{d_2 v_{2i}}{dt} = \left(\frac{1}{\rho_2{}^\circ} - \frac{1}{\rho_1{}^\circ}\right)\nabla_i p + f_{12}^i \frac{\rho}{\rho_1\rho_2} + \frac{F_{1i}^E}{\rho_1} - \frac{F_{2i}^E}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\nabla_k \Pi^{ik} \tag{2.4}$$

Пренебрегая в уравнении (2.3) вторым слагаемым в левой части и вязкими силами $\nabla_k \Pi^{ik}$, а в уравнении (2.4) вязкими силами $\nabla_k \Pi^{ik} / \rho_1$ и конвективными слагаемыми в левой части уравнения по сравнению со слагаемыми, пропорциональными силе трения между фазами (соответствующие оценки легко выписываются), с учетом равенства $\mathbf{f}_{12} = L_f(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = L_f\rho(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) / \rho_1$ получим

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{F}_1{}^E + \mathbf{F}_2{}^E + \rho\mathbf{g} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{J} = \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = \frac{\rho_1{}^2\rho_2{}^2}{\rho^2 L_f}\left\{\left(\frac{1}{\rho_1{}^c} - \frac{1}{\rho_2{}^\circ}\right)\nabla p + \frac{\mathbf{F}_2^E}{\rho_2} - \frac{\mathbf{F}_1^E}{\rho_1}\right\}$$

Для сравнения моделей диффузионного и многоскоростного приближений выпишем уравнения движения для смеси (1.2) и уравнение диффузии (1.3) в изотермическом случае

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \Gamma\nabla\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi} + \rho\mathbf{g} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{J} = LT\left\{\left(\frac{1}{\rho_1{}^\circ} - \frac{1}{\rho_2{}^\circ}\right)\nabla p + \frac{1}{\rho_2{}^\circ}\nabla\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}\right\}$$

Из сравнения уравнений (2.5) и (2.6) находятся выражения для $\mathbf{F}_1{}^E$ и $\mathbf{F}_2{}^E$ и связь коэффициентов L и L_f

$$\mathbf{F}_1{}^E = 0, \quad \mathbf{F}_2{}^E = \Gamma\nabla\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}, \quad L = \frac{\rho_1{}^2\rho_2{}^2}{\rho^2 T} L_f^{-1} \tag{2.7}$$

Чтобы найти выражения для коэффициентов L_f и L, предположим, что частицы или пузыри одинаковые, а сила трения между жидкостью и диспергированными частицами, рассчитанная на единицу объема среды, равна сумме сил трения между жидкостью и каждой частицей в единице объема, определяемых формулой Стокса. При этом коэффициент $L_f = 6\pi\mu_1 an$ (μ_1 — динамическая вязкость несущей жидкости, a — радиус частицы или пузыря, n — число частиц или пузырей в единице объема смеси). Выражение для коэффициента L в этом случае будет иметь вид

$$L = \frac{\rho_1{}^2\rho_2{}^2}{6\pi\mu_1 an\rho^2 T} \tag{2.8}$$

Отметим, что для пузырей формула Стокса для силы трения, действующей на пузырь, верна только в том случае, если пузырь ведет себя как частица с твердой границей, что возможно при наличии, например, поверхностно-активных веществ в жидкости или зарядов, распределенных на поверхности. Формула (2.8) в случае малой объемной концентрации пузырей $\Gamma \ll 1$ и малой истинной плотности пузырей $\rho_2^\circ \ll \rho_1^\circ$ запишется в виде (m — масса пузыря)

$$L = T^{-1} \frac{(\rho_2^\circ)^{4/3} \Gamma m}{6\pi\mu_1 (3m / 4\pi)^{1/3}} \tag{2.9}$$

Из формул (2.7) следует, что сила со стороны электрического поля, связанная с поляризацией среды в целом, действует только на диспергированную фазу, $\mathbf{F}_1^E = 0$. Этот факт является следствием предположения о виде диссипативной функции, сделанного при построении модели поляризующихся многофазных сред в работах [2-4]. Отметим, что в приближении несжимаемости жидкости давление p, входящее в уравнение движения для обеих фаз, определяется из решения задачи и может содержать слагаемые, связанные с поляризацией среды. Такие слагаемые могут входить также в выражение для тензора вязких напряжений несущей фазы через химические потенциалы [3,4].

Предполагая, что сила, действующая на пузыри со стороны электрического поля, равна сумме одинаковых сил $\mathbf{f}^E$, действующих на один пузырь радиуса a, $\mathbf{F}_2^E = n\mathbf{f}^E$, используя вторую формулу (2.7), можно записать выражение для силы $\mathbf{f}^E$

$$\mathbf{f}^E = \frac{4}{3} \pi a^3 \nabla \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma} \frac{E^2}{8\pi} \tag{2.10}$$

В случае, когда газ, заполняющий пузыри, и несущая жидкость непроводящие, диэлектрические проницаемости жидкости ε_1 и газа ε_2 можно считать постоянными и $\Gamma \ll 1$, верна формула

$$\partial\varepsilon / \partial\Gamma = 3\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) / (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \Gamma \partial\varepsilon / \partial\Gamma \tag{2.11}$$

При этом сила $\mathbf{f}^E$, действующая на один пузырь, запишется в виде (это выражение совпадает с формулой, предложенной в работе [6])

$$\mathbf{f}^E = \frac{1}{2} a^3 \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \nabla E^2$$

3. Уравнение изменения объема пузырей. Уравнение (1.5) заменяет обычно используемое при описании движения жидкости с пузырями газа уравнение Релея, которое неприменимо в случае поляризующихся сред. Для понимания происходящих в изучаемой среде явлений важно выявить физический смысл входящих в уравнение (1.5) слагаемых.

3.1. Скорость жидкости на границе пузыря $v_f(a)$ в отсутствие испарения и конденсации равна скорости изменения радиуса сферического пузыря $a^\cdot$. В случае одинаковых пузырей

$$v_f(a) = a^\cdot = \frac{\rho_2}{4\pi a^2 n} \frac{d_2 (\Gamma / \rho_2)}{dt} \tag{3.1}$$

В отсутствие электрического поля условие непрерывности потока импульса на границе пузырь — жидкость в пренебрежении вязкостью газа [1] с учетом формулы (3.1) можно записать в виде (p_f, p_g — давление жидкости и газа около границы жидкость — газ)

(3.2) $$p_g - p_f = \frac{4\mu_1}{a} v_f(a) = \frac{4\mu_1\rho_2}{3\Gamma} \frac{d_2(\Gamma / \rho_2)}{dt}$$

Если пузырек достаточно мал, давление в нем можно считать однородным и равным p_g; в пренебрежении радиальным движением жидкости давление вокруг одиночного пузыря в жидкости также однородно и равно p_f. В случае, когда пузырьков в смеси достаточно мало, $\Gamma \ll 1$, можно пренебречь влиянием одного пузыря на другой как непосредственным, так и опосредованным через влияние на несущую жидкость. При этом можно считать, что давление в газе $p_{02} = p_g$, в жидкости $p = p_f$ и использовать для связи давления в газе и жидкости уравнение

(3.3) $$\frac{3\Gamma}{4\mu_1}(p_{02} - p) = \rho_2 \frac{d_2(\Gamma / \rho_2)}{dt}$$

Сравнивая уравнение (3.3) с уравнением (1.5), предложенным в данной работе, в отсутствие электрического поля для коэффициента L_Γ получим следующее выражение:

(3.4) $$L_\Gamma = 3\Gamma / (4\mu_1)$$

Из сказанного следует, что кинетическое уравнение (1.5) для изменения удельного объема пузырьков, выведенное в работах [2–4], можно трактовать как условие на поверхности разрыва для некоторых средних давлений жидкости и газа с учетом тензора вязких напряжений в жидкости. Слагаемое $L_\Gamma^{-1}\rho_2 d_2(\Gamma/\rho_2)/dt$, входящее в уравнение (1.5), пропорционально скорости жидкости на границе пузыря и учитывает вязкость несущей фазы.

Отметим, что формула (3.4) получена в предположении изобаричности пузырей, малости их объемной концентрации, в пренебрежении вязкостью газа и кинетической энергией жидкости, связанной с пульсацией пузыря. Если нарушено хоть одно из этих условий, формула (3.4) может быть неверна.

3.2. Слагаемое $(\partial\varepsilon / \partial\Gamma)E^2 / (8\pi)$ в уравнении (1.5) описывает влияние электрического поля на изменение объема пузыря. Это слагаемое, когда $\partial\varepsilon / \partial\Gamma$ определяется формулой (2.11), равно средней по поверхности сферического пузыря разности потока импульса, связанного с электрическим полем, в жидкости и газе. Таким образом, уравнение (1.5) и в присутствии электрического поля имеет смысл усредненного условия непрерывности потока импульса на границе пузырь — жидкость.

Для доказательства рассмотрим сферический пузырь непроводящего газа с диэлектрической проницаемостью ε_2 в непроводящей жидкости с диэлектрической проницаемостью ε_1 в однородном на бесконечности поле E_∞. Покажем, что средняя по поверхности пузыря разность проекций тензора максвелловских напряжений T_{ij} вне и внутри пузыря на нормаль к его поверхности равна

$$\langle\langle \{T_{ij}n^i n^j\} \rangle\rangle = \frac{3\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \cdot \frac{E_\infty^2}{8\pi} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E_\infty^2}{8\pi}, \qquad T_{ij} = \frac{E_i^M D_j^M}{4\pi} - \frac{\mathbf{E}^M \mathbf{D}^M}{8\pi}\delta_{ij}$$

Здесь E_i^M, D_j^M — компоненты истинных электрического поля и индукции.

Разность проекций тензора максвелловских напряжений на нормаль к поверхности, разделяющей газ и жидкость, равна

(3.5) $$\{T_{ij}n^i n^j\} = \frac{(D_n^M)^2}{8\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\} - \frac{(E_\tau^M)^2}{8\pi}\{\varepsilon\}$$

Здесь предполагается, что нормальная составляющая электрической индукции $D_n{}^M$ и тангенциальная составляющая электрического поля $E_\tau{}^M$ непрерывны на границе пузыря, введено обозначение $\{A\} = A_1 - A_2$; A_1, A_2 — значения величины A в жидкости и газе.

Электрическое поле $\mathbf{E}_{int}^M$ внутри газового пузыря в диэлектрической жидкости и в однородном на бесконечности поле $\mathbf{E}_\infty$ однородно и определяется формулой

$$\mathbf{E}_{\mathrm{int}}^M = 3\varepsilon_1 \mathbf{E}_\infty / (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tag{3.6}$$

Величины $D_n{}^M$ и $E_\tau{}^M$ на поверхности пузыря с учетом (3.6) равны (здесь θ, α — сферические координаты точки на поверхности пузыря, ось z направлена вдоль вектора $\mathbf{E}_\infty$)

$$D_n{}^M = \frac{3\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} E_\infty \sin\theta, \quad E_\tau{}^M = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} E_\infty \cos\theta \tag{3.7}$$

Осредняя формулу (3.5) по поверхности пузыря, с учетом (3.7) получим

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \{T_{ij}n^i n^j\}\cos\theta d\alpha d\theta = \frac{3\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)E_\infty^2}{8\pi(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \tag{3.8}$$
$$= \frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E_\infty^2}{8\pi} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}$$

Последнее равенство в формуле (3.8) верно, если поле вдали от частиц $\mathbf{E}_\infty$ можно считать равным среднему электрическому полю $\mathbf{E}$, описываемому уравнениями Максвелла (1.7).

4. Уравнения энергии в многоскоростной модели. Используя уравнения неразрывности и движения (2.1), (2.2) уравнение энергии для электромагнитного поля в случае непроводящей среды (приближение электрогидродинамики)

$$\frac{\mathbf{E}}{4\pi}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = -\operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\right\} \tag{4.1}$$

а также тождества Гиббса для внутренней энергии каждой фазы в отсутствие поля $U_{0\alpha}$ ($s_{0\alpha}$ — энтропия α-й фазы в отсутствие электрического поля)

$$dU_{01} = T_1\, ds_{01}, \quad dU_{02} = T_2\, ds_{02} + \frac{p_{02}}{(\rho_2{}^\circ)^2} d\rho_2{}^\circ \tag{4.2}$$

с учетом выражения для силы $\mathbf{F}_1{}^E$, $\mathbf{F}_2{}^E$ (2.7), следуя работам [2-4], получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1 U_{01} + \rho_2 U_{02} + \rho_1\frac{v_1{}^2}{2} + \rho_2\frac{v_2{}^2}{2} + \varepsilon(\Gamma)\frac{E^2}{8\pi}\right) = \tag{4.3}$$
$$= -\operatorname{div}\left\{\rho_1\mathbf{v}_1\left(U_{01} + \frac{v_1{}^2}{2} + \frac{p}{\rho_1{}^\circ}\right) + \rho_2\mathbf{v}_2\left(U_{02} + \frac{v_2{}^2}{2} + \frac{p}{\rho_2{}^\circ}\right) - \right.$$
$$\left. - \Gamma\mathbf{v}_2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\cdot\frac{E^2}{8\pi} + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] + \mathbf{q}\right\} + T_1\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 s_{01} + \rho_2 s_{02}) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{div}(\rho_1 s_{01}\mathbf{v}_1 + \rho_2 s_{02}\mathbf{v}_2)\right] + \rho_2\frac{d_2 s_{02}}{dt}(T_2 - T_1) + \mathbf{f}_{12}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) +$$
$$+ \rho_2\frac{d_2(\Gamma/\rho_2)}{dt}\left(p - p_{02} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}\right) + \operatorname{div}\mathbf{q} = 0$$

Отметим, что равенство (4.3) выведено в предположении, что диэлектрическая проницаемость смеси ε зависит только от объемной концентрации Γ.

Предположим, что уравнение энергии для среды и поля имеет вид

$$
\begin{aligned}
(4.4)\qquad & \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1 U_{01}+\rho_2 U_{02}+\rho_1\frac{v_1^2}{2}+\rho_2\frac{v_2^2}{2}+\varepsilon(\Gamma)\frac{E^2}{8\pi}\right)=\\
& =-\operatorname{div}\left\{\rho_1\mathbf{v}_1\left(U_{01}+\frac{v_1^2}{2}+\frac{p}{\rho_1^\circ}\right)+\rho_2\mathbf{v}_2\left(U_{02}+\frac{v_2^2}{2}+\frac{p}{\rho_2^\circ}\right)-\right.\\
& \left.-\Gamma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}\mathbf{v}_2+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]+\mathbf{q}\right\}
\end{aligned}
$$

Введем энтропию смеси формулой $\rho S=\rho_1 s_{01}+\rho_2 s_{02}$. При этом, как и в работах [2–4], в случае $\varepsilon=\varepsilon(\Gamma)$ энтропия смеси S равна S_0 — энтропии смеси в отсутствие поля.

Уравнение для изменения энтропии S запишется в виде

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad & \frac{\partial}{\partial t}\rho S+\operatorname{div}\left(\rho_1 s_{01}\mathbf{v}_1+\rho_2 s_{02}\mathbf{v}_2+\frac{\mathbf{q}}{T_1}\right)=\frac{\rho_2}{T_1}\frac{d_2 s_{02}}{dt}(T_1-T_2)+\\
& +\mathbf{f}_{12}T_1^{-1}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)-\frac{\rho_2}{T_1}\frac{d_2(\Gamma/\rho_2)}{dt}\left(p-p_{02}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}\right)-\mathbf{q}\frac{\nabla T_1}{T_1^2}
\end{aligned}
$$

Будем считать, что обратимый поток энтропии равен $\rho_1 s_{01}\mathbf{v}_1+\rho_2 s_{02}\mathbf{v}_2+$ $+\mathbf{q}/T_1$, при этом диссипативная функция σ запишется в виде

$$
\begin{aligned}
(4.6)\qquad & \sigma=\rho_2\frac{d_2 s_{02}}{dt}\frac{T_1-T_2}{T_1}+\frac{\mathbf{f}_{1,2}}{T_1}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)-\\
& -\frac{\rho_2}{T_1}\frac{d_2(\Gamma/\rho_2)}{dt}\left(p-p_{02}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}\right)-\mathbf{q}\frac{\nabla T_1}{T_1^2}
\end{aligned}
$$

Используя принцип Онзагера, можно получить замыкающие систему уравнений многоскоростной модели кинетические соотношения (перекрестными эффектами для упрощения записи пренебрегается)

$$
\begin{aligned}
(4.7)\qquad & \frac{\rho_2}{T_1}\frac{d_2 s_{02}}{dt}=\varphi_1(T_1-T_2),\quad \rho_2\frac{d_2(\Gamma/\rho_2)}{dt}=L_\Gamma\left(p_{02}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Gamma}\frac{E^2}{8\pi}-p\right)\\
& \mathbf{f}_{12}=L_f(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1),\quad \mathbf{q}=-\varkappa\nabla T_1
\end{aligned}
$$

5. Характеристики систем уравнений, описывающих в различных приближениях поляризующиеся дисперсные смеси. При постановке различных задач важно знать скорости распространения слабых разрывов и тип рассматриваемых уравнений. Упрощение или усложнение системы уравнений может, вообще говоря, привести к изменению типа уравнений. Ниже в изотермическом случае рассматривается многоскоростная модель и различные приближения.

1°. Рассмотрим многоскоростную модель смеси жидкости с пузырьками газа в изотермическом случае при линейной зависимости ε от Γ ($\partial\varepsilon/\partial\Gamma=$ $=\mathrm{const}$). Определяющие уравнения в безразмерной форме имеют вид

$$(5.1)\qquad \partial\Gamma/\partial t^*-(1-\Gamma)\nabla^*\mathbf{v}_1^*+\mathbf{v}_1^*\nabla\Gamma=0$$

$$
\begin{aligned}
(5.2)\qquad & \Gamma\partial\rho_2^{\circ*}/\partial t^*+\rho_2^{\circ*}\partial\Gamma/\partial t^*+\Gamma\mathbf{v}_2^*\nabla\rho_2^{\circ*}+\mathbf{v}_2^*\rho_2^{\circ*}\nabla\Gamma+\\
& +\rho_2^{\circ*}\Gamma\nabla^*\mathbf{v}_2^*=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5.3)\qquad & \rho_1^{\circ*}(1-\Gamma)\partial\mathbf{v}_1^*/\partial t^*+\rho_1^{\circ*}(1-\Gamma)(\mathbf{v}_1^*\nabla^*)\mathbf{v}_1^*=\\
& =-(1-\Gamma)\nabla^*p^*-St^{-1}\Gamma(\rho_2^{\circ*})^{2/3}(\mathbf{v}_1^*-\mathbf{v}_2^*)+(1-\Gamma)\rho_1^{\circ*}Fr^{-2}\mathbf{g}/g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5.4)\qquad & \rho_2^{\circ*}\Gamma\partial\mathbf{v}_2^*/\partial t^*+\rho_2^{\circ*}\Gamma(\mathbf{v}_2^*\nabla^*)\mathbf{v}_2^*=-\Gamma\nabla^*p^*+St^{-1}\Gamma(\rho_2^{\circ*})^{2/3}\times\\
& \times(\mathbf{v}_1^*-\mathbf{v}_2^*)+\Gamma\rho_2^{\circ*}Fr^{-2}\mathbf{g}/g+(\partial\varepsilon^*/\partial\Gamma)\Gamma\nabla^*E^{*2}
\end{aligned}
$$

$$(5.5)\qquad \partial\Gamma/\partial t^*+\nabla^*\Gamma\mathbf{v}_2^*=-L_\Gamma(p^*-R^*\rho_2^{\circ*}-(\partial\varepsilon^*/\partial\Gamma)E^{*2})$$

$$\text{(5.6)}\qquad \operatorname{rot}^*\mathbf{E}^* = 0,\quad \nabla^*\mathbf{D}^* = 0,\quad \mathbf{D}^* = \varepsilon^*\mathbf{E}^*$$

$$\text{(5.7)}\qquad \rho_1{}^{\circ *} = \rho_1{}^\circ / \rho_0,\quad \rho_2{}^{\circ *} = \rho_2{}^\circ / \rho_0,\quad \mathbf{v}_1{}^* = \mathbf{v}_1 / v_0,\quad \mathbf{v}_2{}^* = \mathbf{v}_2 / v_0$$

$$p^* = p / (\rho_0 v_0{}^2)$$

$$E^{*2} = \varepsilon_1 E^2 / (8\pi\rho_0 v_0{}^2),\quad R^* = R_2 T / v_0{}^2,\quad \varepsilon^* = \varepsilon / \varepsilon_1$$

$$\operatorname{rot}^* = \operatorname{rot}\cdot h,\quad \nabla^* = \nabla\cdot h,\quad t^* = t v_0 / h,\quad L_\Gamma{}^* = L_\Gamma \rho_0 v_0 h$$

$$St^{-1} = \frac{6\pi\mu_1}{m^{2/3}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}\frac{h}{\rho_0{}^{1/3} v_0},\quad Fr^{-2} = gh / v_0{}^2$$

Здесь ρ_0, v_0 — характерные значения истинной плотности и скорости частиц, h — характерный размер задачи. Система уравнений (5.1) — (5.7) следует из системы (2.1), (2.2), (1.5) и (1.7) с использованием формул (2.7) и (2.9).

Уравнения для смеси жидкости с твердыми частицами при тех же предположениях состоят из уравнений неразрывности (5.1), (5.2), уравнений движения (5.3), (5.4), в которых надо положить $\rho_2{}^{\circ *} = 1$ ($\rho_0 = \rho_2{}^\circ = \mathrm{const}$), и уравнений Максвелла (5.6); в формулах (5.7) следует положить $\rho_0 = \rho_2{}^\circ$.

Скорость распространения слабых разрывов λ в среде, описываемой уравнениями (5.1) — (5.7), в одномерном нестационарном случае равна (звездочки здесь и далее опускаются, все параметры считаются безразмерными)

$$\text{(5.8)}\qquad \lambda_1 = v_2,\quad \lambda_{2,3} = (v_1\Gamma\rho_1{}^\circ + v_2(1-\Gamma)\rho_2{}^\circ \pm \Delta^{1/2}) / $$

$$/[\rho_1{}^\circ\Gamma + \rho_2{}^\circ(1-\Gamma)]$$

$$\Delta = (1-\Gamma)\Gamma\{[\rho_1{}^\circ\Gamma + \rho_2{}^\circ(1-\Gamma)]2D^2(\partial\varepsilon / \partial\Gamma)^2\varepsilon^{-3} -$$

$$-\rho_1{}^\circ\rho_2{}^\circ(v_1 - v_2)^2\},\quad D = \mathrm{const}$$

Видно, что в отсутствие электрического поля $D = 0$, $\Delta < 0$ и существует только одна скорость распространения слабых разрывов $\lambda_1 = v_2$. При наличии электрического поля и $\Delta \geqslant 0$ скоростей может быть две ($\Delta = 0$) или три ($\Delta > 0$).

2°. Рассмотрим систему уравнений, описывающую движение пузырьков, когда ускорением жидкости можно пренебречь, — уравнения (5.2) — (5.6), в которых полагается $d_1 v_1 / dt = 0$. Скорости распространения слабых разрывов равны

$$\text{(5.9)}\qquad \lambda_1 = v_2,\quad \lambda_{2,3} = v_2 \pm [2D^2(\partial\varepsilon / \partial\Gamma)^2\Gamma / (\rho_2{}^\circ\varepsilon^3)]^{1/2}.$$

В отличие от формул (5.8) $\lambda_{1,2,3}$ в данном случае всегда действительны. В присутствии поля характеристик три, в отсутствие поля — одна.

3°. Рассмотрим систему уравнений (5.1) — (5.7), в которой вместо уравнений движения (5.3), (5.4) взяты: уравнение движения для смеси — сумма уравнений (5.3) и (5.4) и разность уравнения (5.3), поделенного на $\rho_1{}^\circ(1-\Gamma)$, и уравнения (5.4), поделенного на $\rho_2{}^\circ\Gamma$. Пренебрежем разностью конвективных слагаемых по сравнению с силой трения в уравнении, полученном при вычитании (5.4) и (5.3).

Отметим, что полученная упрощенная система отличается от уравнений в диффузионном приближении (1.1) — (1.7) уравнением движения для смеси (1.2), которое в случае 3° содержит дополнительное слагаемое $\nabla_k v_{12}{}^{ik}$. Этим слагаемым можно пренебречь, и случай 3° переходит при этом в диффузионное приближение, когда разность скоростей мала, например, по сравнению со среднемассовой скоростью.

Выражения для скорости распространения слабых разрывов в случае 3° имеют вид

$$(5.10)\qquad \lambda_1 = v_2,\quad \lambda_{2,3} = (v_2\rho_2{}^\circ - v_1\rho_1{}^\circ \pm \Delta_C{}^{1/2}) / (\rho_2{}^\circ - \rho_1{}^\circ)$$
$$\Delta_C = \rho_1{}^\circ\rho_2{}^\circ(v_1 - v_2)^2 + 2D^2\rho\,(\partial\varepsilon / \partial\Gamma)^2 / \varepsilon^3$$

Из формул (5.10) следует, что и в отсутствие поля для упрощенной системы уравнений — случай 3°, в отличие от многоскоростной модели всегда есть три характеристические скорости.

4°. Рассмотрим систему уравнений (1.1) — (1.7), описывающую движение жидкости с пузырьками газа в диффузионном приближении, которое является дальнейшим упрощением системы (5.1) — (5.7) в соответствии с изложенным в пп. 1, 2. Скорости распространения слабых разрывов определяются формулами

$$(5.11)\qquad \lambda_1 = v_2,\quad \lambda_{2,3} = u \pm [2D^2\,(\partial\varepsilon / \partial\Gamma)^2\rho / \varepsilon^3]^{1/2} / (\rho_2{}^\circ - \rho_1{}^\circ)$$

Скорости распространения слабых разрывов уравнений, описывающих движение жидкости с несжимаемыми частицами, в случаях 1°—4° определяются вторыми формулами соотношений (5.8) — (5.11) соответственно при $\rho_2{}^\circ \equiv 1$. Скорости, определяемые первыми равенствами формул (5.8)—(5.11), отсутствуют [1].

Наличие электрического поля существенным образом изменяет скорость распространения слабых разрывов. В случаях 1°, 2°, 4° меняется не только величина скорости, но и число скоростей распространения слабых разрывов, т. е. тип уравнений. Могут возникать новые скорости распространения разрывов вследствие поляризации фаз в электрическом поле. Существуют слабые возмущения, скорость которых совпадает со скоростями слабых разрывов.

Поясним физический смысл влияния электрического поля на скорость распространения слабых разрывов в несжимаемой жидкости с несжимаемыми частицами, диэлектрическая проницаемость которых отличается от проницаемости жидкости. Будем использовать многоскоростную модель, описывающую движение пузырьков, когда влиянием ускорения жидкости на их течение можно пренебречь — случай 2°.

В отсутствие электрического поля слабые разрывы переносятся со скоростью движения диспергированной фазы v_2. Это — возмущения типа энтропийной волны, в которых меняется концентрация частиц Г; остальные параметры сохраняются.

При наличии электрического поля локальное возмущение Г приводит к образованию локального градиента электрического поля ∇E^2 и силы, пропорциональной ∇E^2, которая действует на частицы с диэлектрической проницаемостью, отличной от диэлектрической проницаемости жидкости. Эта сила вызывает движение частиц, уменьшающее

[1] На эллиптичность уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости с твердыми частицами в отсутствие электрического поля, указано в отчете *Полянского В. А. и др.* «Некоторые вопросы гидродинамики взвешенных слоев» (отчет № 1691 Ин-та механики МГУ, 1975).

возмущение объемной концентрации Г, подобно тому как возмущение давления в сжимаемом газе вызывает движение молекул газа, уменьшающее возмущения плотности. Именно с этим связано распространение звуковых волн в сжимаемых средах. Роль градиента давления в поляризующейся дисперсной среде, состоящей из несжимаемых фаз, играет градиент электрического поля, вызываемый возмущениями объемной концентрации диспергированной фазы в соответствии с уравнением (5.6).

Таким образом, возмущения концентрации при наличии электрического поля распространяются со скоростью, определяемой скоростью частиц и интенсивностью электрического поля. В этих волнах меняется объемная концентрация частиц, скорость, электрическое поле.

Поступила 16 VIII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1—2. М., «Наука», 1976.
2. *Гогосов В. В.*, *Налетова В. А.*, *Шапошникова Г. А.* Гидродинамика дисперсных систем, взаимодействующих с электромагнитным полем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
3. *Гогосов В. В.*, *Налетова В. А.*, *Шапошникова Г. А.* О конструировании моделей поляризующихся дисперсных и многокомпонентных сред. ПММ, 1979, т. 43, вып. 3.
4. *Гогосов В. В.*, *Налетова В. А.*, *Шапошникова Г. А.* О некоторых моделях многофазных поляризующихся и намагничивающихся сред. В сб.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. Изд-во Московск. ун-та, 1978.
5. *Гогосов В. В.*, *Полянский В. А.* Электрогидродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения. В сб.: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. Т. 10. М., ВИНИТИ, 1976.
6. *Pohl H. A.* Nonuniform field of effects in poorly conducting media. J. Electrochem. Soc., 1960, vol. 107, No. 5, pp. 386—390.