

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ХИМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ ИДЕАЛЬНО КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СТЕНКИ

М. С. Бенилов, Г. А. Тирский

(Москва)

Рассматривается постановка и асимптотическое решение задачи об отклонении от ионизационного равновесия вблизи идеально каталитической стенки в слабоионизованном газе. Малыми параметрами задачи считаются отношения невозмущенной рекомбинационной длины к масштабу изменения температуры газа и характерной температуры газа к потенциалу ионизации. Методом срачиваемых асимптотических разложений по малому параметру проведен подробный анализ неравновесного слоя. Обсуждается физический смысл полученных результатов.

Исследование химически неравновесных течений газа проводилось в литературе неоднократно как в связи с расчетом вольт-амперных характеристик приэлектродных пограничных слоев, так и в связи с задачами внешней аэродинамики (см., например, [1-4]). Большинство опубликованных работ содержит преимущественно результаты численных расчетов. Имеются также работы, посвященные асимптотической теории неравновесных течений с малыми числами Дамкелера [5,6]. В данной работе рассматривается асимптотическая теория противоположного предельного случая больших чисел Дамкелера, когда во внешней части газодинамического пограничного слоя течение газа является химически равновесным.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим следующую простую модель. Плоская идеально каталитическая поверхность граничит со слабоионизованным газом, содержащим нейтральный основной компонент, атомы и ионы легкоионизирующейся присадки и электроны. Ионизация атомов присадки осуществляется электронным ударом; при рекомбинации третьим телом является электрон. Во всем объеме газа предполагается выполненным условие квазинейтральности. Для простоты изложения будем считать, что газ в целом покоится. Распределение температуры газа будем полагать заданной достаточно гладкой функцией координаты  $y$  (ось  $y$  направлена по нормали от стенки); при удалении от стенки температура газа стремится к постоянной величине.

В рамках сделанных предположений для определения квазинейтральной молярной концентрации заряженных частиц  $x$  имеем следующую нелинейную краевую задачу [1,7]

$$(1.1) \quad \frac{d}{dy} \left( nD \frac{dx}{dy} \right) = k_r n^3 x (x^2 - x_r^2); \quad x = \frac{n_e}{n}, \quad x_r = \frac{n_{er}}{n}$$

$$y = 0, x = 0; \quad y \rightarrow \infty, x \rightarrow x_{r\infty}$$

Здесь  $n_e$  — квазинейтральная концентрация заряженных частиц,  $n$  — полная концентрация частиц газа,  $n_{er}$  — локальная химически равновес-

ная квазинейтральная концентрация заряженных частиц,  $D$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $k_r$  — константа скорости рекомбинации. Индексом  $\infty$  здесь и ниже отмечены значения соответствующих величин вдали от стенки.

Переходя к нормированным переменным  $\eta = y/L$ ,  $z = x/x_{r\infty}$  ( $L$  — характерный масштаб изменения температуры газа), перепишем задачу (1.1) в следующем виде:

$$(1.2) \quad \chi (az')' = bz (z^2 - r^2)$$

$$(1.3) \quad \eta = 0, z = 0; \eta \rightarrow \infty, z \rightarrow 1$$

$$\chi = \frac{d_\infty}{2L^2}, \quad d = \left( \frac{2D}{k_r n_{er}^2} \right)^{1/2}, \quad a = \frac{nD}{n_\infty D_\infty}, \quad b = \frac{k_r n^3}{k_{r\infty} n_\infty^3}, \quad r = \frac{x_r}{x_{r\infty}}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $\eta$ , величина  $d$  имеет смысл локальной рекомбинационной длины.

Полагая для простоты давление газа и молярную концентрацию атомов присадки постоянными, для функции  $r$  в соответствии с уравнением Саха имеем

$$r = \theta^{5/4} e^{-t}, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad t = mq, \quad m = \frac{I}{2kT_\infty}, \quad q = \frac{1-\theta}{\theta}$$

Здесь  $T$  — температура газа,  $k$  — постоянная Больцмана,  $I$  — потенциал ионизации атомов присадки.

Безразмерная температура газа  $\theta$  предполагается заданной монотонно возрастающей функцией координаты  $\eta$ . Величины  $a$ ,  $b$  — известные функции температуры газа и также будут предполагаться заданными функциями координаты  $\eta$ . Таким образом, задача (1.2), (1.3) содержит в качестве коэффициентов заданные функции  $a(\eta)$ ,  $b(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$  и заданные параметры  $\chi$ ,  $m$ .

2. Асимптотическая постановка. В частном случае постоянной температуры газа (т. е. без учета охлаждающего влияния стенки)  $a \equiv b \equiv r \equiv 1$  задача (1.2), (1.3) имеет точное аналитическое решение [1,8]. В общем случае переменной температуры такое решение отсутствует.

Во многих практически интересных ситуациях параметр  $\chi$  мал и задача (1.2), (1.3) может быть отнесена к типу сингулярно возмущенных (например, для характерных условий в канале МГД-генератора при  $T_\infty = 2700\text{K}$ ,  $L = 1$  см, давлении 1 атм, молярной концентрации присадки (атомов калия) 1%,  $D_\infty = 1$  см<sup>2</sup>/с, находим  $\chi = 3.4 \cdot 10^{-6}$ ,  $m = 9.3$ ). Эффективным средством исследования задач такого типа является метод внешних и внутренних асимптотических разложений по малому параметру [9]. Первый член внешнего разложения решения задачи (1.2), (1.3) — хорошо известное решение, соответствующее химическому равновесию во всем слое. Внутренняя задача, насколько известно авторам, ранее в литературе не рассматривалась.

Асимптотическая постановка рассматриваемой задачи существенно зависит от величины температуры стенки. В случае «горячей» стенки, когда температура ее настолько велика, что соответствующая равновесная мо-

лярная концентрация заряженных частиц имеет тот же порядок величины, что и невозмущенная концентрация вдали от стенки (т. е.  $r_w = O(1)$ , индексом  $w$  отмечены значения соответствующих величин на стенке), параметр  $\chi$  — единственный малый параметр задачи. В случае «холодной» стенки, когда  $r_w \ll 1$  (например, для указанных выше условий, полагая  $T_w = 800\text{K}$ , находим  $r_w = 5.6 \cdot 10^{-11}$ ), в асимптотическую постановку задачи наряду с параметром  $\chi$  необходимо ввести еще один малый параметр, связанный с величиной  $r_w$ . В качестве такого параметра наиболее естественно использовать параметр  $m^{-1}$ . Отметим, что малый параметр такого типа является основным в теории горения [10].

Анализ двух указанных предельных случаев позволяет исследовать весь диапазон изменения температуры стенки.

3. Предел горячей стенки ( $\chi \rightarrow 0$ ). Внешнее асимптотическое разложение решения задачи (1.2), (1.3) будем искать в виде

$$(3.1) \quad z(\eta; \chi) = z_1(\eta) + \dots$$

Подставляя разложение (3.1) в уравнение (1.2), находим  $z_1 = r(\eta)$ . Внутреннее разложение имеет следующий вид:

$$z(\eta; \chi) = z_2(\eta_2) + \dots; \quad \eta_2 = \eta / \sqrt{\chi}$$

Подставляя это разложение в уравнение (1.2), получаем уравнение

$$(3.2) \quad a_w d^2 z_2 / d\eta_2^2 = b_w z_2 (z_2^2 - r_w^2)$$

Граничное условие для этого уравнения на стенке совпадает с первым условием (1.3), граничным условием на бесконечности служит условие сращивания с внешним разложением (3.1)

$$(3.3) \quad \eta_2 = 0, \quad z_2 = 0; \quad \eta_2 \rightarrow \infty, \quad z_2 \rightarrow r_w$$

Решение задачи (3.2), (3.3) в исходных переменных имеет вид [1, 8]

$$(3.4) \quad x = x_{rw} \operatorname{th}(y / d_w)$$

Для вычисления вольт-амперных характеристик электрических зондов в плазме и электродов определяющее значение имеет величина производной на стенке от квазинейтральной молярной концентрации заряженных частиц [7, 11]. Дифференцируя выражение (3.4), находим

$$(3.5) \quad (dx / dy)_w = x_{rw} / d_w$$

4. Предел холодной стенки ( $\chi \rightarrow 0$ ,  $m^{-1} \rightarrow 0$ ). В зависимости от отношения порядка между малыми параметрами  $\chi$  и  $m^{-1}$  рассмотрим три предельных случая:

$$m / \ln \gamma^{-1} \rightarrow k_1, \quad m / \ln \gamma^{-1} \rightarrow 0, \quad m / \ln \gamma^{-1} \rightarrow \infty$$

Здесь  $k_1$  — некоторая заданная положительная постоянная, малый параметр  $\gamma = \gamma(\chi)$  следующим образом связан с параметром  $\chi$ :

$$\gamma = \chi^{1/2} \ln \gamma^{-1}$$

Решение этого нелинейного алгебраического уравнения имеет вид

$$\gamma = \chi^{1/2} \ln \chi^{-1/2} \left[ 1 + O \left( \frac{\ln \ln \chi^{-1/2}}{\ln \chi^{-1/2}} \right) \right]$$

4.1.  $m / \ln \gamma^{-1} \rightarrow k_1$ . Внешнее разложение может быть вычислено непосредственно

$$(4.1) \quad z(\eta; \chi, m) = r \left\{ 1 + \frac{a}{2b\theta^{3/2}} (k_1 q')^2 \exp[-2(\ln \gamma^{-1} - m q)] + \dots \right\}$$

$$r = r(\eta; m) = \theta^{3/2} e^{-m q}$$

Очевидно, область применимости этого разложения ограничена условием

$$(4.2) \quad \ln \gamma^{-1} - m q \rightarrow \infty$$

поскольку при невыполнении этого условия нарушается положенное в основу вывода разложения (4.1) предположение о том, что второй член этого разложения мал по сравнению с первым. Отсюда следует, что структура решения задачи существенно зависит от значения величины  $k_1 q_w$ . В случае  $k_1 q_w < 1$  условие (4.2) выполняется при всех  $\eta \geq 0$ ; разложение (4.1) применимо при  $\eta > 0$ . В случае  $k_1 q_w = 1$  условие (4.2) выполняется при  $\eta > 0$ ; разложение (4.1) применимо при  $\eta > 0$ . В случае  $k_1 q_w > 1$  условие (4.2) выполняется при  $\eta > \eta_s$ , где  $\eta_s$  — решение уравнения  $k_1 q(\eta_s) = 1$ ; разложение (4.1) применимо при  $\eta > \eta_s$ .

4.1.1.  $k_1 q_w < 1$ . Внутреннее разложение имеет вид

$$z(\eta; \chi, m) = \exp(-m q_w) z_3(\eta_s)^+ \dots; \quad \eta_s = \eta \ln \gamma^{-1} \exp(\ln \gamma^{-1} - m q_w)$$

Для функции  $z_3$  получаем краевую задачу, аналогичную задаче (3.2), (3.3). В исходных переменных вновь получаем выражения (3.4), (3.5).

4.1.2.  $k_1 q_w = 1$ . Введем параметр  $f(\chi, m) = \ln \gamma^{-1} - m q_w$ . Очевидно,  $f = o(m)$ . В зависимости от поведения малых параметров  $\chi$  и  $m^{-1}$  рассмотрим следующие случаи: а)  $f \rightarrow +\infty$ , б)  $f \rightarrow k_2$ , в)  $f \rightarrow -\infty$  ( $k_2$  — некоторая заданная постоянная).

4.1.2 (а).  $f \rightarrow +\infty$ . Этот случай полностью аналогичен случаю 4.1.1, и все сказанное в п. 4.1.1 остается справедливым.

4.1.2 (б).  $f \rightarrow k_2$ . Внутреннее разложение имеет вид

$$(4.3) \quad z(\eta; \chi, m) = \exp(-m q_w) z_4(\eta_4) + \dots; \quad \eta_4 = \eta \ln \gamma^{-1}$$

Уравнение (1.2) в первом приближении принимает вид

$$(4.4) \quad \exp(-2k_2) a_w d^2 z_4 / d\eta_4^2 = b_w z_4 [z_4^2 - \theta_w^{3/2} \exp(-2k_1 q_w' \eta_4)]$$

Отметим, что это уравнение можно получить также формальным применением к уравнению (1.2) метода разложения экспонента, известного в теории горения [10].

Введем функцию  $\alpha$  по формуле

$$\alpha = - \frac{t'}{r} \left( \frac{a\chi}{b} \right)^{1/2} = \frac{d}{\sqrt{2}} \left( - \frac{dt}{dy} \right)$$

Эта функция характеризует отношение локальной рекомбинационной длины к локальному масштабу изменения величины  $t$ . Заметим, что в рассматриваемом предельном случае  $\alpha_w = O(1)$ . Уравнение (4.4) имеет канонический вид

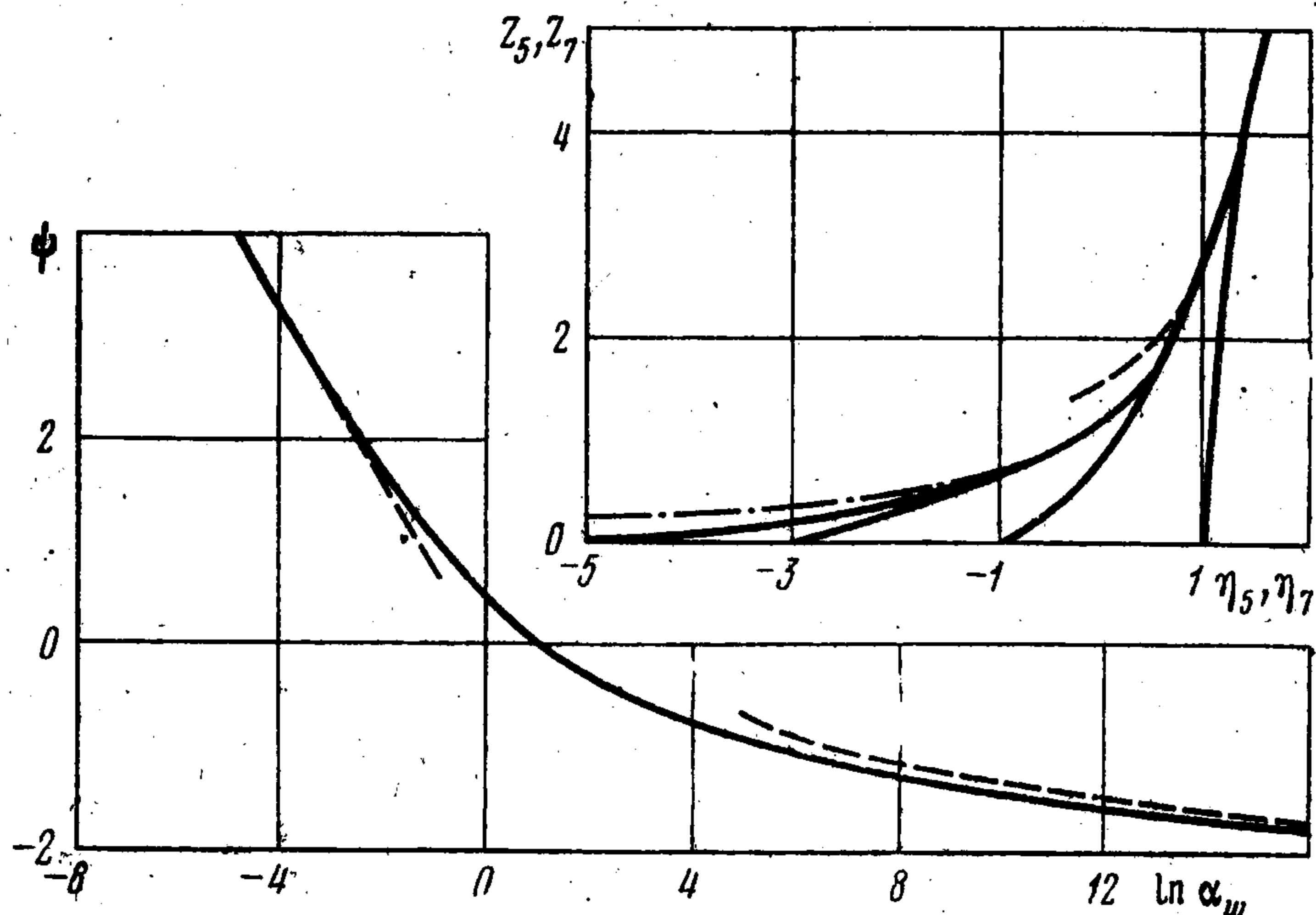
нический вид

$$(4.5) \quad \begin{aligned} d^2 z_5 / d\eta_5^2 &= z_5 [z_5^2 - \exp(2\eta_5)] \\ \eta_5 &= -k_1 q_w' \eta_4 - \ln \alpha_w, \quad z_5 = \alpha_w^{-1} \theta_w^{-5/4} z_4 \\ \alpha_w &= -k_1 q_w' \theta_w^{-5/4} (a_w / b_w)^{1/2} \exp(-k_2) \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнения (4.5)

$$(4.6) \quad \eta_5 = -\ln \alpha_w, \quad z_5 = 0; \quad \eta_5 \rightarrow \infty, \quad z_5 \sim \exp \eta_5 + \exp(-\eta_5) / 2 + \dots$$

Последнее граничное условие есть условие сращивания внутреннего разложения (4.3) и внешнего разложения (4.1).



На фигуре сплошными линиями представлен график функции  $z_5(\eta_5)$  для различных значений параметра  $\alpha_w$  ( $\ln \alpha_w = 5, 3, 1, -1$ ), полученной точным численным решением нелинейной краевой задачи (4.5), (4.6). Штриховой линией нанесена асимптотика функции  $z_5$  при  $\eta_5 \rightarrow \infty$ , определяемая вторым выражением (4.6).

В исходных переменных имеем

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x &= x_{rw} \alpha_w z_5 [(-dt/dy)_{wy} - \ln \alpha_w] \\ (dx/dy)_w &= \sqrt{2\alpha_w^2 \psi} x_{rw} / d_w, \quad \psi = (dz_5/d\eta_5)_w \end{aligned}$$

График функции  $\psi = \psi(\alpha_w)$  также приведен на фигуре. Штриховыми линиями нанесены зависимости, определяемые асимптотическими выражениями при больших и малых значениях параметра  $\alpha_w$ . Можно показать, что эти выражения имеют вид

$$(4.8) \quad \psi = 2^{-1/2} \alpha_w^{-2}, \quad \alpha_w \rightarrow 0; \quad \psi = \sqrt{2} K^2 (2^{-1/2}) \ln^{-2} \alpha_w, \quad \alpha_w \rightarrow \infty$$

где  $K(2^{-1/2}) = 1.8541$  — полный эллиптический интеграл первого рода в нормальной форме Лежандра [12].

4.1.2 (в).  $f \rightarrow -\infty$ . В этом случае область неравномерности не может быть описана в рамках единственного асимптотического разложения, хотя и является асимптотически тонкой. Необходимо рассматривать два разложения, одно из которых справедливо в непосредственно примыкающем к стенке рекомбинационном слое, а другое — в переходном слое, находя-

щемся между рекомбинационным слоем и химически равновесной областью. Разложение переходного слоя имеет вид

$$z(\eta; \chi, m) = \gamma z_6(\eta_6) + \dots; \quad \eta_6 = (\eta - \delta) \ln \gamma^{-1}$$

Здесь через  $\delta$  обозначен корень алгебраического уравнения  $\alpha(\delta) = 1$ .

Поскольку  $\alpha \rightarrow \infty$  при  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \infty$  и  $\alpha' < 0$ , решение этого уравнения существует и единственно; можно показать, что  $\delta = O(f/m) = o(1)$ . Заметим, что величина в правой части этого уравнения может быть принята равной не только единице, но также и любой другой постоянной величине. Выбор этой постоянной отличной от единицы приведет лишь к сдвигу начала отсчета координаты  $\eta_6$ .

Уравнение (1.2) в первом приближении после замены переменных

$$\eta_6 = \eta_7 / (-k_1 q_w'), \quad z_6 = -k_1 q_w' (a_w / b_w)^{1/2} z_7$$

приводится к каноническому виду, совпадающему с (4.5) (вместо индекса 5. будет индекс 7). При  $\eta_7 \rightarrow \infty$  граничное условие для функции  $z_7$  совпадает со вторым условием (4.6). Другим граничным условием является условие отсутствия особенностей при  $\eta_7 \rightarrow -\infty$ .

График функции  $z_7(\eta_7)$  представлен на фигуре штрихпунктирной линией. Можно показать, что асимптотика этой функции при  $\eta_7 \rightarrow -\infty$  имеет вид  $z_7 = -\sqrt{2} / \eta_7$ .

В исходных переменных для молярной концентрации в переходном слое находим

$$(4.9) \quad x = x_{r\delta} z_7 [\sqrt{2} (y - y_\delta) / d_\delta]$$

Разложение рекомбинационного слоя имеет вид

$$z(\eta; \chi, m) = \sqrt{\chi} \delta^{-1} z_8(\eta_8) + \dots; \quad \eta_8 = \eta / \delta < 1$$

Уравнение (1.2) в первом приближении принимает вид

$$(4.10) \quad a_w d^2 z_8 / d\eta_8^2 = b_w z_8^3$$

Граничное условие для этого уравнения при  $\eta_8 = 0$  совпадает с первым условием (1.3), граничное условие при  $\eta_8 \rightarrow 1$  получается из условия сращивания с разложением переходного слоя

$$(4.11) \quad \eta_8 = 0, z_8 = 0; \quad \eta_8 \rightarrow 1, z_8 \sim (2a_w / b_w)^{1/2} (1 - \eta_8)^{-1} + \dots$$

Решая задачу (4.10), (4.11), для молярной концентрации в рекомбинационном слое и производной молярной концентрации на стенке в исходных переменных находим (сн — эллиптическая функция Якоби [12])

$$(4.12) \quad x = x_{r\delta} K(2^{-1/2}) \frac{d_\delta}{y_\delta} \left\{ \frac{2}{1 + \operatorname{cn}[2K(2^{-1/2})y/y_\delta, 2^{-1/2}]} - 1 \right\}^{1/2}$$

$$(4.13) \quad (dx/dy)_w = K^2(2^{-1/2}) (d_\delta / y_\delta) x_{r\delta} / y_\delta$$

4.1.3.  $k_1 q_w > 1$ . Как указывалось выше, в этом предельном случае внешнее разложение (4.1) применимо при  $\eta > \eta_s$ . Область неравномерности содержит асимптотически тонкий переходный слой и рекомбинационный слой толщины  $\eta_s = O(1)$ . Разложение переходного слоя имеет вид

$$z(\eta; \chi, m) = \gamma z_9(\eta_9) + \dots; \quad \eta_9 = (\eta - \eta_{s1}) \ln \gamma^{-1}$$

Здесь через  $\eta_{s1}$  обозначен корень алгебраического уравнения  $\alpha(\eta_{s1}) = 1$ ; можно показать, что  $\eta_{s1} = \eta_s + o(1)$ . Для функции  $z_9$  получаем задачу, аналогичную задаче для функции  $z_7$ . В исходных переменных вновь получаем выражение (4.9), если в этом последнем индекс  $\delta$  заменить на индекс  $s1$ .

Разложение рекомбинационного слоя, применимое при  $\eta < \eta_s$ , имеет вид

$$z(\eta; \chi, m) = \sqrt{\chi} z_{10}(\eta) + \dots$$

Для функции  $z_{10}$  получаем задачу

$$\begin{aligned} (d/d\eta)(adz_{10}/d\eta) &= bz_{10}^3 \\ \eta = 0, z_{10} = 0; \eta \rightarrow \eta_s, z_{10} &\sim (2a_s/b_s)^{1/2}(\eta_s - \eta)^{-1} + \dots \end{aligned}$$

В общем случае эта нелинейная краевая задача с переменными коэффициентами не имеет аналитического решения и должна решаться численно.

4.2.  $m / \ln \gamma^{-1} \rightarrow 0$ . Решение в этом случае полностью аналогично решению, обсуждавшемуся в п. 4.1.1.

4.3.  $m / \ln \gamma^{-1} \rightarrow \infty$ . В этом случае решение задачи существенно зависит от характера затухания функции  $q(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . В данной работе рассмотрение ограничено случаем экспоненциального затухания

$$\eta \rightarrow \infty, \quad q(\eta) \sim k_3 \exp(-k_4\eta) + \dots$$

где  $k_3, k_4$  — произвольные положительные постоянные.

Обозначим через  $\omega$  корень уравнения  $\alpha(\omega) = 1$ . Можно показать, что  $\omega^{-1} = o(1)$ . Будем для простоты предполагать, что выражение

$$m [q(\eta) - k_3 \exp(-k_4\eta)]$$

в пределе  $\chi \rightarrow 0, m^{-1} \rightarrow 0$  ( $\eta_{11} = \eta / \omega$  фиксировано) стремится к нулю. Для параметра  $\omega$  можно получить следующее выражение:

$$\omega = \frac{1}{k_4} \ln \frac{mk_3}{\ln \gamma^{-1}} + \frac{\ln k_4}{k_4 \ln \gamma^{-1}} [1 + o(1)]$$

Внешнее разложение может быть вычислено непосредственно:

$$z(\eta; \chi, m) = \exp\{\ln(k_4\gamma) \exp[k_4\omega(1 - \eta_{11})]\} + \dots$$

Это разложение справедливо при  $\eta_{11} > 1$ . Разложение переходного слоя имеет вид

$$z(\eta; \chi, m) = \gamma z_{12}'(\eta_{12}) + \dots; \quad \eta_{12} = (\eta - \omega) \ln \gamma^{-1}$$

Для функции  $z_{12}$  получаем задачу, аналогичную задаче для функции  $z_7$ . Имеем поэтому

$$z_{12} = k_4 z_7(k_4 \eta_{12})$$

В исходных переменных для молярной концентрации в переходном слое вновь получаем выражение (4.9), если в последнем индекс  $\delta$  заменить на индекс  $\omega$ .

Разложение рекомбинационного слоя, справедливое при  $\eta_{11} < 1$ , имеет вид

$$(4.14) \quad z(\eta; \chi, m) = \sqrt{\chi} \omega^{-1} z_{13}(\eta_{11}) + \dots$$

Уравнение (1.2) в первом приближении принимает вид

$$(4.15) \quad d^2 z_{13} / d\eta_{11}^2 = z_{13}^3$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию срачивания при  $\eta_{11} \rightarrow 1$  и обращающееся в нуль при  $\eta_{11} = 0$ , в исходных переменных вновь дается формулой (4.12) (вместо индекса  $\delta$  будет индекс  $\omega$ ).

Заметим, что при  $\eta_{11} = O(\omega^{-1})$  функции  $a$  и  $b$  в общем случае становятся отличными от единицы и уравнение (4.15) уже не является хорошим приближением к уравнению (1.2). Таким образом, между рекомбинационным слоем и стенкой в данном предельном случае существует промежуточная область (химически замороженный слой) толщиной  $O(1)$ . Разложение, пригодное в этой области, имеет вид

$$(4.16) \quad z(\eta; \chi, m) = \sqrt{\chi} \omega^{-2} z_{14}(\eta) + \dots$$

Для функции  $z_{14}$  получаем краевую задачу

$$(4.17) \quad \begin{aligned} (d/d\eta)(adz_{14}/d\eta) &= 0 \\ \eta = 0, z_{14} &= 0; \eta \rightarrow \infty, z_{14} \sim \sqrt{2}K^2(2^{-1/2})\eta + \dots \end{aligned}$$

(последнее условие получено из срачивания разложений (4.14) и (4.16)).

Решая задачу (4.17), для молярной концентрации в замороженном слое и производной молярной концентрации на стенке в исходных переменных находим

$$x = x_{r\omega} K^2 (2^{-1/2}) \frac{d_\omega}{y_\omega} \frac{1}{y_\omega} \int_0^y \frac{dy}{a}, \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_w = K^2 (2^{-1/2}) \frac{d_\omega}{y_\omega} \frac{1}{a_w} \frac{x_{r\omega}}{y_\omega}$$

**5. Обсуждение результатов.** Асимптотические решения, полученные в п. 3, 4, имеют вполне ясный физический смысл. Если температура стенки настолько высока, что соответствующая локальная рекомбинационная длина много меньше характерного масштаба изменения функции  $t$  вблизи стенки (т. е. параметр  $\alpha_w$  много меньше единицы), то вблизи стенки реализуется переходный слой, в котором происходит переход от химически равновесного при температуре стенки значения концентрации заряженных частиц на внешней границе слоя к нулевому значению на стенке. При этом химически равновесная концентрация заряженных частиц в слое в первом приближении постоянна, поскольку масштаб изменения этой концентрации совпадает с масштабом изменения функции  $t$ . Распределение концентрации заряженных частиц в этом переходном слое описывается функцией  $th$ . Члены, учитывающие ионизацию, рекомбинацию и диффузию, имеют в слое одинаковый порядок величины. Толщина слоя составляет несколько локальных рекомбинационных длин.

С уменьшением температуры стенки соответствующая химически равновесная концентрация падает и локальная рекомбинационная длина растет. По мере того как эта длина становится сравнимой с характерным масштабом изменения функции  $t$  вблизи поверхности (т. е. параметр  $\alpha_w$  становится сравнимым с единицей), химически равновесная концентрация заряженных частиц в переходном слое уже не может более считаться постоянной и структура слоя меняется. Распределение концентрации заряженных частиц в слое описывается функцией  $z_5$ , зависящей параметрически от  $\alpha_w$ .

При дальнейшем уменьшении температуры стенки толщина переходного слоя продолжает увеличиваться, а когда параметр  $\alpha_w$  становится существенно большим единицы, переходный слой отходит от стенки, непосредственно вблизи которой образуется рекомбинационный слой. Переходный слой при этом располагается в окрестности точки  $y_{s1}$ , в которой локальная рекомбинационная длина равна локальному масштабу

изменения химически равновесной концентрации заряженных частиц. С физической точки зрения это условие вполне понятно: если локальная рекомбинационная длина становится сравнимой с наименьшим из характерных локальных масштабов, то ожидать равновесия нет оснований. Распределение концентрации заряженных частиц в переходном слое описывается универсальной функцией  $z_7$ . Как и в предыдущих случаях, толщина переходного слоя составляет несколько локальных рекомбинационных длин и много меньше характерного масштаба изменения температуры газа; члены, учитывающие ионизацию, рекомбинацию и диффузию, имеют в этом слое одинаковый порядок величины.

В рекомбинационном слое член, учитывающий ионизацию, является малым и в первом приближении может быть опущен. Толщина рекомбинационного слоя определяется положением точки  $y_{s1}$  и в зависимости от значений параметров  $\chi$  и  $m$ , а также от распределения температуры газа может быть малой, большой или иметь порядок единицы (по сравнению с характерным масштабом изменения температуры газа). В первых двух случаях уравнение рекомбинационного слоя может быть решено аналитически при произвольной зависимости коэффициентов амбиполярной диффузии и рекомбинации от температуры газа; в третьем случае требуется, вообще говоря, численное решение этого уравнения.

В случае когда толщина рекомбинационного слоя существенно превосходит характерный масштаб изменения температуры газа, необходимо, вообще говоря, ввести в рассмотрение химически замороженный слой, непосредственно прилегающий к стенке и имеющий толщину порядка характерного масштаба изменения температуры газа. Члены, учитывающие ионизацию и рекомбинацию, малы и в первом приближении могут быть опущены. Полученное в результате уравнение может быть решено аналитически при произвольной зависимости коэффициента амбиполярной диффузии от температуры.

Важно заметить, что полученные для разных предельных случаев асимптотические решения при соответствующих предельных переходах согласуются между собой. В частности, зависимость от параметра  $\alpha_w$  производной на стенке молярной концентрации заряженных частиц, определяемая выражением (4.7), при предельных переходах  $\alpha_w \rightarrow 0$  и  $\alpha_w \rightarrow \infty$  с учетом формул (4.8) согласуется с выражениями (3.5) и (4.13).

Поступила 3 VII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А., Михайлов В. Н. К анализу области возмущения плазмы вблизи электрода. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
2. Генкин А. Л., Лебедев А. Д. Диффузия заряженных частиц в приэлектродном пограничном слое. Магнитная гидродинамика, 1969, № 2.
3. Громов В. Г. Расчет вязкого обтекания сферы гиперзвуковым потоком газовой смеси, содержащей углекислый газ. Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1972, № 19.
4. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
5. Агафонов В. П., Кузнецов М. М., Полянский О. Ю. К асимптотической теории гиперзвуковых течений с неравновесной ионизацией в окрестности критической точки. Уч. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 1.
6. Маргевич А. С., Потапов А. В. Неравновесная ионизация в ламинарном гиперзвуковом пограничном слое. ПМТФ, 1979, № 1.
7. Бенилов М. С., Турский Г. А. О токах насыщения на зонд в плотной плазме. ПМТФ, 1979, № 6.
8. Лебедев А. Д. К вопросу о приэлектродных явлениях в газовом разряде. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, вып. 10.
9. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
10. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
11. Бенилов М. С., Турский Г. А. К расчету электрических эффектов в ионизованном многокомпонентном газе около электропроводящих тел. Метод расщепления. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
12. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1977.