

О СВОБОДНОМ РАСШИРЕНИИ ДВУМЕРНЫХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

А. Н. Крайко, В. В. Шеломовский

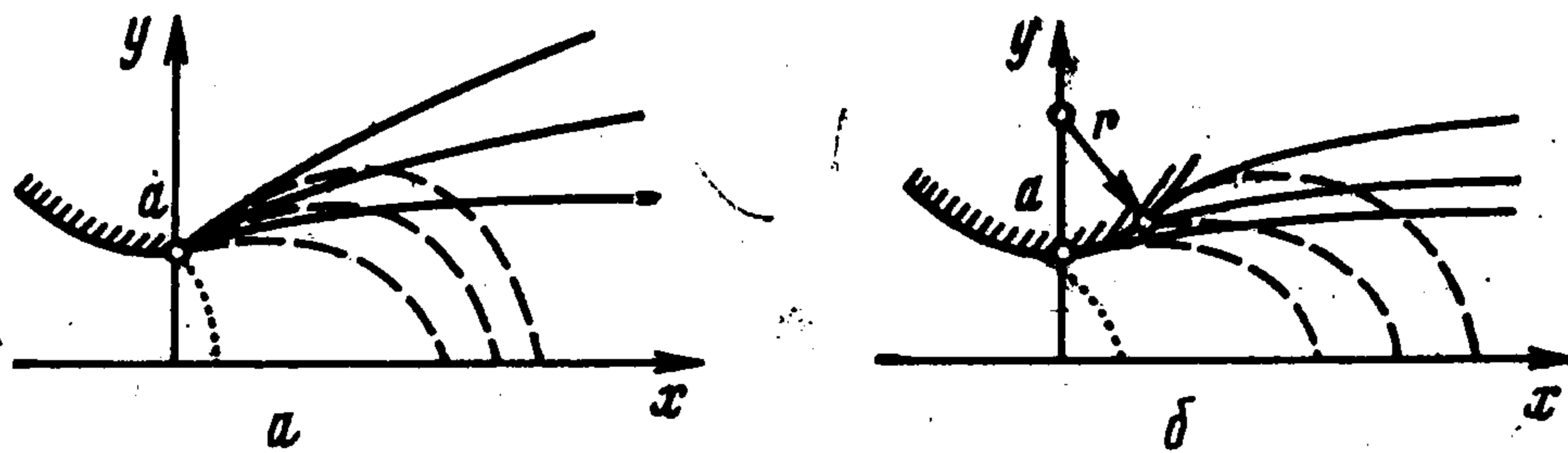
(Москва)

В рамках модели сплошной среды изучаются закономерности свободного расширения плоских и осесимметричных струй идеального газа, которое реализуется при их истечении в вакуум, на начальных участках струй, истекающих в область малого, но конечного давления, а также на разгонных участках сопел. Установлено, что если показатель адиабаты κ не превышает 2 в плоском случае и $3/2$ в осесимметричном, то вывод М. Д. Ладыженского [1-6] о прямолинейности линий тока в «дальнем поле» струи, а вместе с ним и выражения [1-6] для параметров течения нуждаются в уточнении. В плоском случае такое уточнение с использованием переменных годографа позволило получить выражения для параметров потока, обеспечивающие хорошую точность не только при больших, но и при умеренных числах Маха. Увеличивая число членов этих выражений или расширяя начальную область «ближнего поля», рассчитываемую численно (коэффициенты выражений находятся из условий стыковки внутри и на границе этой области), можно неограниченно повышать точность формул, справедливых при как угодно больших удалениях от начального сечения струи. Аналогичные формулы получены и в осесимметричном случае. Здесь, однако, анализ не столь строг, поскольку переходу в плоскость годографа предшествует упрощение уравнения неразрывности, справедливое лишь вблизи оси симметрии. Правильность полученных формул как для плоского, так и для осесимметричного случая подтвердило сопоставление вытекающих из них закономерностей с аналогичными закономерностями, которые обнаруживают результаты обширных численных расчетов, выполненных методом характеристик.

1. Рассмотрим осесимметричную или плоскую струю идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа, свободно истекающую из сужающегося или из сужающегося-расширяющегося насадка (сопла). Ось x декартовой (xuz) или цилиндрической (xuf) систем координат направим по потоку (слева направо), а плоскость $x = 0$ совместим с плоскостью минимального (или, если это будет специально оговорено, выходного) сечения насадка. В плоском случае ограничимся насадками, имеющими плоскость симметрии, хотя на самом деле данное ограничение непринципиально. Отождествив ее с плоскостью xz , будем, как и в осесимметричном случае, рассматривать лишь значения $y \geq 0$. По определению, параметры исследуемых течений зависят только от x и y , однако вектор скорости \mathbf{q} может иметь отличными от нуля все три компоненты u , v и w . Под свободным расширением далее понимается истечение в вакуум, реализующееся при обтекании либо излома стенки в точке a , если величина излома превосходит некоторое предельное значение, либо стенки, угол наклона которой к оси

x , непрерывно возрастая при $x > x_a = 0$, обеспечивает расширение газа до нулевого давления. Обе возможности демонстрирует фигура 1, на которой стенка насадка заштрихована, а пунктиром дана звуковая линия. Фигура 1, а отвечает излому, а б — стенке, образованной окружностью радиуса r . При $r = 0$ второй случай сводится к первому.

Важным для дальнейшего свойством течений свободного расширения является так называемое «параболическое вырождение», на которое, по видимому, впервые обратил внимание М. Д. Ладъженский [1]. Это свойство состоит в следующем. Исследуемое течение наряду с линиями тока, вдоль которых сохраняются полная энтальпия, энтропия и «циркуляция»



Фиг. 1

$\Gamma \equiv y^{\nu} w$ с $\nu = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях, при сверхзвуковой «меридиональной» компоненте V вектора \mathbf{q} имеет два семейства действительных характеристик (c^+ - и c^- -характеристик или характеристик первого и второго семейств). Вдоль них

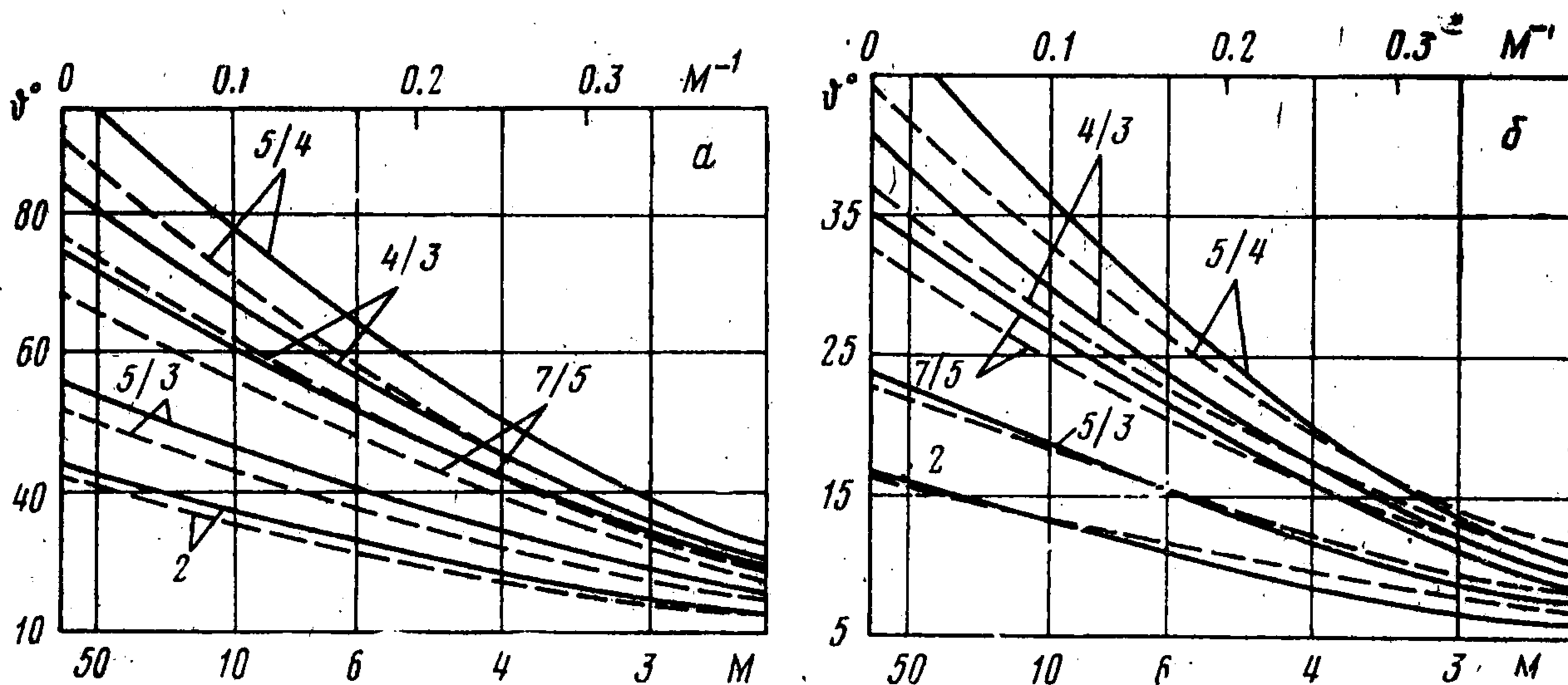
$$(1.1) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha), \quad \frac{d\vartheta}{dy} \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\rho V^2} \frac{dp}{dy} \pm \pm \frac{y}{y} \left[\frac{(a^2 + w^2) \sin \vartheta \sin \alpha}{a^2 \sin(\vartheta \pm \alpha)} - \frac{w^2 \operatorname{ctg} \alpha}{V^2} \right] = 0$$

Здесь верхние (нижние) знаки отвечают c^+ (c^-)-характеристикам, ϑ — угол наклона V к оси x , $V = |\mathbf{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$, угол Маха α определен по меридиональному числу Маха $M = V/a$, где a — скорость звука, ρ — плотность и p — давление. В (1.1) и далее все переменные безразмерные: величины с размерностью длины отнесены к y_*° — размерной ординате стенки в минимальном сечении, а величины с размерностями скорости, плотности и давления отнесены к a_*° , ρ_*° и $\rho_*^\circ a_*^{\circ 2}$, где a_*° и ρ_*° — некоторые константы с размерностями скорости и плотности. При расчетах изоэнергетических и изэнтропических течений в качестве a_*° и ρ_*° брались критические скорость и плотность.

При свободном расширении в изломе или вдоль стенки (при $r > 0$) угол ϑ непрерывно растет, а α уменьшается, стремясь к нулю. Следовательно, может найтись c^- -характеристика, угол наклона которой к стенке будет так мал, что она, пересекая линии тока, достигнет оси x лишь при $x \rightarrow \infty$. Тогда последующие c^- -характеристики вообще не придут на ось x . Как видно из результатов, приводимых ниже, описанная ситуация действительно реализуется, если κ не очень близко к единице. Пусть $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$ — идущие от стенки к оси x отрезки изобар, начальные точки которых совпадают с начальными точками указанных характеристик. На Фиг. 1 $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$ даны штрихами, а c^- -характеристики — тонкими ли-

ниями. В силу сказанного область определенности Ω_i каждого отрезка Σ_i простирается по x , а для Σ_1, \dots , и по y в бесконечность, причем параметры в Ω_i определяются условием симметрии $\vartheta = 0$ при $y = 0$ и начальными данными на Σ_i . Схожесть описанной ситуации с наблюдающейся для уравнений параболического типа и объясняет термин «параболическое вырождение».

Отсутствие каких-либо условий на верхних границах Ω_i существенно упрощает построение решения, что и будет использовано ниже. Однако прежде, чем сделать это, приведем результаты расчетов, имеющих прямое отношение к обсуждаемому вопросу



Фиг. 2

и касающихся изоэнергетических изэнтропических и незакрученных ($w \equiv 0$) струй с $\vartheta \equiv 0$ и $M \equiv M_0 \simeq 1$ в сечении $x = 0$. Если, кроме того, $v = 0$, а $r = 0$, то, согласно (1.1), связь, которую c^- -характеристики, соединяющие соответствующие точки оси x и пучка характеристик в a , устанавливают между числом Маха M на оси струи и углом ϑ в пучке, дается равенством

$$(1.2) \quad \vartheta = \theta(M, M_0) = \frac{1}{2} [\Phi(M) - \Phi(M_0)], \quad \Phi(M) = \int_{p(M)}^{p(1)} \varphi(p) dp, \quad \varphi(p) = \frac{\text{ctg } \alpha}{\rho V^2}$$

Здесь зависимости φ от p и p от M получаются с учетом уравнений состояния газа из условий, изоэнергетичности и изэнтропичности потока. Для совершенного газа $\Phi(M)$, как известно, выражается через элементарные функции формулой

$$(1.3) \quad \Phi(M) = \varepsilon^{-1/2} \arctg \sqrt{\varepsilon(M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1} = \pi (\varepsilon^{-1/2} - 1) / 2 - 1 / M (\kappa - 1) + O(M^{-3}), \quad \varepsilon = (\kappa - 1) / (\kappa + 1)$$

Для $M_0 = 1$ первое слагаемое в разложении $\Phi(M)$ дает 2θ в точке излома для c^- -характеристики, приходящей на ось x при $x \rightarrow \infty$. Кривые, рассчитанные по (1.2) и (1.3) для разных κ и $M_0 = 1.002$, даны на фиг. 2, а сплошными линиями (цифры около кривых — значения κ). Аналогичные кривые, полученные для того же M_0 , но для r и v , не равных одновременно нулю, численным интегрированием (1.1) методом характеристик, приведены на фиг. 2, а штрихами ($v = 0, r = 5$) и на фиг. 2, б ($v = 1$, сплошные линии $r = 0$, штриховые $r = 5$). Разумеется, расчеты методом характеристик велись до конечных чисел Маха (в зависимости от κ до M от 30 до 50). Однако, согласно приведенным результатам, соответствующие кривые при $M \gg 1$ оказались, как и для $v = r = 0$, практически линейными по M^{-1} . Это позволяет продолжить их вплоть до $M^{-1} = 0$, т. е. до $M = \infty$, и таким путем найти $\theta(\infty, 1.002)$. Отметим, что во всех рассчитанных примерах при фиксированных $M \gg 1, \kappa, r$ и $M_0 \simeq 1$ в осесимметричном случае θ весьма близко к половине величины, получающейся для $v = 0$.

Ограничимся далее изоэнергетическими и изэнтропическими сверхзвуковыми течениями с $w \equiv 0$, для которых все термодинамические переменные — известные функции только V , а V и ϑ подчиняются двум квазилинейным уравнениям в частных производных. Перейдем затем, как и в [1-6], от V к новой переменной η согласно равенству $V = (1 - \eta) V_m$, где V_m — максимальная скорость потока. Переменная η характеризует относительное отличие V от своего максимального значения, уменьшаясь в Ω_i от $\eta = \Delta_i$ на Σ_i до нуля при $M \rightarrow \infty$, причем $\Delta_i > \Delta_{i+1}$ при $i = 0, 1, \dots$. Для совершенного газа в исследуемых течениях $M = (1 - \eta) \times \times [(\kappa - 1)\eta(2 - \eta)/2]^{-1/2}$, и поэтому при $M \gg (\kappa - 1)^{-1/2}$

$$(1.4) \quad \eta = \frac{1}{(\kappa - 1)M^2} \left[1 - \frac{9}{4(\kappa - 1)M^2} + \dots \right] \approx \frac{1}{(\kappa - 1)M^2}$$

2. В силу параболического вырождения, имеющего место для $0 < \eta \leq \leq \Delta_i \leq \Delta_0$, течение в Ω_i полностью определяется, если из расчета ближнего поля струи построен отрезок изобары Σ_i , на котором $\eta = \Delta_i \leq \Delta_0$, а $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{wi}$, где ϑ_{wi} — значение ϑ в верхней точке Σ_i . Отсюда и из того, что при $v = 0$ в уравнения не входит не только x , но и y , очевидна целесообразность перемены ролей независимых и зависимых переменных, т. е. перехода в плоскость, годографа $\eta\vartheta$. При этом (см., например, [7]) задача сводится к нахождению потенциала Лежандра Φ , через производные от которого по переменным годографа выражаются x и y . Для совершенного газа с η и ϑ в качестве независимых переменных уравнение для $\Phi = \Phi(\eta, \vartheta)$ и формулы для x и y при $v = 0$ принимают вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \eta\chi(\eta, \kappa) \Phi_{\eta\eta} - \Phi_{\vartheta\vartheta} + (1 - \eta) \Phi_{\eta} &= 0 \\ x &= -\Phi_{\eta} \cos \vartheta - (\Phi_{\vartheta} \sin \vartheta)/(1 - \eta), \quad y = -\Phi_{\eta} \sin \vartheta + \\ &+ (\Phi_{\vartheta} \cos \vartheta)/(1 - \eta) \\ \chi(\eta, \kappa) &= \frac{(\kappa - 1)(2 - \eta)(1 - \eta)^2}{2(1 - \eta)^2 + (\kappa - 1)(\eta - 2)\eta} = \\ &= (1 - \kappa) \left[1 + \left(\kappa - \frac{3}{2} \right) \eta + O(\eta^2) \right] \end{aligned}$$

Здесь индексы η и ϑ приписываются соответствующим частным производным от $\Phi(\eta, \vartheta)$. Первое уравнение системы (2.1) и его упрощенная форма, получающаяся при малых η и демонстрирующая из-за стремления к нулю коэффициента при $\Phi_{\eta\eta}$ описанное выше параболическое вырождение, по-видимому, впервые привлекались для объяснения последнего еще в [1]. Покажем, что (2.1) позволяет получить более полную информацию о решении в Ω_i .

Дополним (2.1) граничными условиями. Последние получаются из того, что $x(\eta, \vartheta) = X_i(\vartheta)$, а $y(\eta, \vartheta) = Y_i(\vartheta)$ при $\eta = \Delta_i$ и $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{wi}$ с известными функциями $X_i(\vartheta)$ и $Y_i(\vartheta)$, найденными из расчета ближнего поля и, кроме того, $y(\eta, 0) = 0$ для $0 \leq \eta \leq \Delta_i$. Опуская далее, как правило, индекс « i » и учитывая (2.1), перепишем эти условия в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi_{\eta}(\Delta, \vartheta) &= f_1(\vartheta), \quad \Phi_{\vartheta}(\Delta, \vartheta) = f_2(\vartheta) \quad \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_w \\ \Phi_{\vartheta}(\eta, 0) &= 0 \quad \text{при } 0 \leq \eta \leq \Delta \end{aligned}$$

где $f_j(\vartheta)$ выражаются через $X(\vartheta)$ и $Y(\vartheta)$ согласно второму и третьему равенствам (2.1), причем $f_2(0) = 0$.

Решение первого уравнения (2.1) при граничных условиях (2.2) можно искать методом разделения переменных в форме

$$(2.3) \quad \Phi(\eta, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{1m}(\eta) \Phi_{2m}(\vartheta)$$

Отсутствие в задаче каких-либо условий на верхней границе Ω позволяет выбирать в качестве $\Phi_{2m}(\vartheta)$ любую полную систему функций, каждая из которых удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, получающемуся после подстановки (2.3) в (2.1), и третьему условию (2.2). В частности, такой системой оказывается последовательность: $1, \cos \vartheta, \cos 2\vartheta, \dots$. Для функций $\Phi_{1m}(\eta)$ получаются также обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, но не с постоянными, как для $\Phi_{2m}(\vartheta)$, а с переменными коэффициентами. Точка $\eta = 0$ для них является правильной особой точкой, решение в окрестности которой в общем случае можно представить в виде суммы двух обобщенных степенных рядов [8]. Показатели этих рядов $\gamma_{1,2}$ вне зависимости от m есть $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = \gamma = (\kappa - 2) / (\kappa - 1) = 1 - \lambda$, где выражение γ через $\lambda = (\kappa - 1)^{-1}$ дано для упрощения последующих записей. Из приведенных рассуждений следует, что при $\gamma \neq 0$, т. е. при $\kappa \neq 2$, а также при γ , отличных от любого целого числа (для $\kappa > 1$ им отвечают $\kappa = 1 + n^{-1}$ с $n = 2, 3, \dots$), решение имеет вид

$$(2.4) \quad \Phi(\eta, \vartheta) = \chi_1(\eta, \vartheta) + \eta^\gamma \chi_2(\eta, \vartheta)$$

Здесь и далее под $\chi_j(\eta, \vartheta)$, если не оговорено особо, понимаются аналитические функции η . При написании этих функций обычно будут опускаться аргументы η и ϑ . Функции χ_1 и χ_2 аналитичны также и по ϑ , что, правда, в данном случае несущественно, поскольку для их определения с использованием условий (2.2) нет необходимости в разложении χ_j по ϑ . В силу последнего условия (2.2): $\chi_{1\vartheta}(\eta, 0) = \chi_{2\vartheta}(\eta, 0) = 0$. На случае $\kappa = 1 + n^{-1}$ с $n = 1, 2, \dots$ мы кратко остановимся позже.

Согласно (2.1) и (2.4), имеем

$$(2.5) \quad \eta^\lambda x = -\gamma \chi_2 \cos \vartheta + \eta \chi_3 + \eta^\lambda \chi_4, \quad \eta^\lambda y = -\gamma \chi_2 \sin \vartheta + \eta \chi_5 + \eta^\lambda \chi_6$$

где $\chi_3 \div \chi_6$ выражаются через производные по η и ϑ от χ_1 и χ_2 , причем $\chi_5(\eta, 0) = \chi_6(\eta, 0) = 0$. Исключив из этих уравнений $\gamma \chi_2$, придем к равенству

$$(2.6) \quad y = x \operatorname{tg} \vartheta + \eta^{-\gamma} \chi_7 + \chi_8$$

в котором χ_7 и χ_8 , как и χ_5 и χ_6 , исчезают при $\vartheta = 0$. Последнее соотношение позволяет, в частности, найти $\partial \vartheta / \partial \eta$ вдоль линии тока, а затем оценить и изменение ϑ при движении вдоль нее от Σ до $x \rightarrow \infty$. С этой целью, взяв от обеих частей (2.6) полные производные по η , учтя, что на линии тока $dy / dx = \operatorname{tg} \vartheta$, исключив из получившегося равенства x при помощи (2.5) и выразив из результирующего уравнения искомую произ-

водную, получим

$$(2.7) \quad d\vartheta / d\eta = (\chi_9 + \eta^\lambda \chi_{10}) / (\chi_{11} + \eta^\lambda \chi_{12})$$

Следовательно, $\vartheta = \vartheta_\infty + \alpha\eta + o(\eta)$, где ϑ_∞ — значение, к которому на рассматриваемой линии тока стремится ϑ при $x \rightarrow \infty$, а α — константа, и полное изменение ϑ имеет порядок $O(\Delta)$, что согласуется с аналогичным выводом [1-6]. Отсюда, однако, отнюдь не вытекает утверждение [1-6] о прямолинейности линий тока. Дело в том, что при интегрировании по достаточно большому интервалу x уравнения линий тока $dy/dx = \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta_\infty + \beta\eta + o(\eta)$, в котором $\beta = \alpha / \cos^2 \vartheta_\infty$, малая добавка $\beta\eta$ может дать любой вклад. То, что при $\gamma < 0$ или при $\kappa < 2$ это так, следует из (2.6). Действительно, согласно (2.6) и (2.5)

$$(2.8) \quad y = x \operatorname{tg} \vartheta_\infty + (x + \chi_{13})^{2-\kappa} \chi_{14} + \chi_{15}$$

причем $\chi_{14}(\eta, 0) = \chi_{15}(\eta, 0) = 0$. Таким образом, если $\kappa < 2$, то не совпадающие с осью x линии тока при $x \rightarrow \infty$ как угодно сильно удаляются от прямых $y = x \operatorname{tg} \vartheta_\infty + \operatorname{const}$. Утверждение о прямолинейности линий тока лежит в основе решения, построенного в [1-6]. Поэтому нарушение данного свойства ведет к отличию этого решения от найденного выше. Покажем это для $M \gg (\kappa - 1)^{-1/2}$, когда, согласно (1.4), $\eta \sim M^{-2}$ и, кроме того, $\eta^\lambda = \eta^{1/(\kappa-1)} \sim \rho V$. Учтя отмеченные обстоятельства, оставим в $\chi_2 \div \chi_6$ из (2.5) только нулевые члены разложения по η . Тогда после очевидных переобозначений равенства (2.5) примут вид

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \rho V x &= A(\vartheta) \cos \vartheta + \eta^{1/(\kappa-1)} C(\vartheta) + \eta B(\vartheta) + o(\eta, \eta^{1/(\kappa-1)}) = \\ &= A(\vartheta) \cos \vartheta + \rho V X(\vartheta) + (\rho V)^{\kappa-1} B^\circ(\vartheta) + o(M^{-2}, M^{-2/(\kappa-1)}) \\ \rho V y &= A(\vartheta) \sin \vartheta + \eta^{1/(\kappa-1)} H(\vartheta) + \eta D(\vartheta) + o(\eta, \eta^{1/(\kappa-1)}) = \\ &= A(\vartheta) \sin \vartheta + \rho V Y(\vartheta) + (\rho V)^{\kappa-1} D^\circ(\vartheta) + o(M^{-2}, M^{-2/(\kappa-1)}) \end{aligned}$$

где в силу симметрии по ϑ функции $A(\vartheta)$, $B(\vartheta)$, $C(\vartheta)$, $X(\vartheta)$ и $B^\circ(\vartheta)$ — четные, а остальные — нечетные.

Уравнения линий тока получаются отсюда с той же точностью после замены ϑ либо на ϑ_∞ , либо на ϑ_i — значение ϑ в точке выхода линии тока с кривой Σ_i . Первые пары слагаемых в правых частях (2.9) дают решение [1-6]. При этом, однако, вторые слагаемые являются доминирующими по отношению к последующим лишь для $\kappa > 2$, в то время как для $\kappa < 2$ таковыми оказываются отсутствующие в [1-6] третьи слагаемые (случай $\kappa > 5/3$ представляют интерес в некоторых не чисто газодинамических приложениях, например в теории мелкой воды, отвечающей $\kappa = 2$). Подчеркнем, что, согласно приводимым ниже результатам, пренебрежение в (2.9) и вторым и третьим слагаемыми допустимо обычно (и то не при записи уравнений линий тока) лишь при числах M , превышающих несколько десятков. Укажем, наконец, что формулы для $\kappa = 2$, согласно рассуждениям, аналогичным тем, которые приводятся для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [8]), отличаются от полученных выше заменой: в левых частях (2.5) η^λ на η , а в правых частях (2.5) и в (2.7) — на $\eta \ln \eta$; в (2.6) $\eta^{-\gamma}$ на $\ln \eta$; в (2.8) комплекса в степени $2 - \kappa$ — на $\ln x$; и, наконец, $\eta^{1/(\kappa-1)}$, $M^{-2/(\kappa-1)}$ и $(\rho V)^{\kappa-1}$ в (2.9) — соответственно на $\eta \ln \eta$, $M^{-2} \ln M$ и $\rho V \ln(\rho V)$. Кроме того, если $\kappa = 2$, то χ_{14} и χ_{15} конечные, но не аналитические функции η в окрестности точки $\eta = 0$. При $\kappa = 1 + n^{-1}$ с $n \geq 2$ аналогичные замены касаются в полученных формулах все более и более старших слагаемых, в силу чего эти формулы в главных порядках сохраняются.

Требуемая точность определения параметров дальнего поля при использовании полученных выше соотношений может, как уже отмечалось, достигаться двумя путями. Первый из них состоит в расширении ближнего поля при ограничении разложений (2.5) по η фиксированным числом k слагаемых, например двумя или тремя. Хотя этот путь представляется наиболее естественным, формулы (2.5) позволяют получать любую требуемую точность и при фиксированных размерах ближнего поля (под ближним полем понимается любая рассчитываемая численно часть течения) за счет увеличения k . И в том и в другом случае $2k$ зависящих от ϑ коэффициентов можно найти, выделив в ближнем поле k изолиний: $\eta = \Delta_i \leq \Delta_0$, т. е. построив $2k$ функций $X_i(\vartheta)$ и $Y_i(\vartheta)$ $i = 1, \dots, k$. Записав на этих линиях соответствующие отрезки разложений (2.5), получим $2k$ линейных алгебраических уравнений для определения такого же числа искоемых коэффициентов, зависящих от ϑ .

В действительности при реализации описанной выше процедуры вычисления коэффициентов отнюдь не обязательно использовать только изобары, имеющие разомкнутые области определенности, т. е. лежащие правее Σ_0 . Пригодными для этой цели могут оказаться и изобары, расположенные слева от Σ_0 , при условии их принадлежности к той же аналитически однородной области течения, что и лежащая справа от Σ_0 . Во многих случаях требуемая гладкость сохраняется, если и не до дозвуковых, то до весьма умеренных сверхзвуковых скоростей (например, при $r \equiv \text{const}$ и при плоской переходной поверхности до $M = 1$). Сказанное не только позволяет по крайней мере пытаться использовать умеренно сверхзвуковые изобары, но и рассчитывать в общем случае на справедливость полученных выражений слева от Σ_0 , хотя, возможно, и не до $M = 1$.

3. Естественно, что преобразование Лежандра приводит к прежним формулам для x и y из (2.1) и в осесимметричном случае. Тем не менее уравнение для $\Phi(\eta, \vartheta)$ оказывается здесь не столь простым. Это связано с тем, что теперь в уравнении неразрывности

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + v \frac{\rho v}{y} = 0$$

имеется свободный член, содержащий y и поэтому не допускающий линеаризации в переменных годографа. Тем не менее, по крайней мере вблизи оси симметрии, где $\rho v / y \simeq \partial(\rho v) / \partial y$, данную трудность удастся обойти. Заметим, кстати, что область, в которой такая замена справедлива, оставаясь, как и Ω_0 , узкой в смысле отношения размеров по y и x , может при $x \rightarrow \infty$ расширяться как угодно сильно. При $v = 1$ первое уравнение (2.1) заменится в указанной области на

$$(3.1) \quad 2\eta\chi(\eta, \kappa) \Phi_{\eta\eta} - \Phi_{\vartheta\vartheta} + (1 - \eta) \Phi_{\eta} - \chi^\circ(\eta, \kappa) \sin 2\vartheta [(1 - \eta) \Phi_{\eta\vartheta} + \Phi_\vartheta] = 0$$

$$\chi^\circ(\eta, \kappa) = [1 + \kappa\eta(\eta - 2)] / [2(1 - \eta)^2 + (\kappa - 1)\eta(\eta - 2)]$$

где функция $\chi(\eta, \vartheta)$ та же, что и в (2.1). Решения (3.1), как и в случае (2.1), будем искать в виде суммы двух решений вида $\eta^{\gamma_i} \chi_i(\eta, \vartheta)$ с заранее неизвестными показателями γ_i и аналитическими в окрестности точки $\eta = \vartheta = 0$ функциями χ_i . Поскольку разложение $\sin \vartheta$ начинается с первой степени ϑ , то уравнение для γ_i , получающееся приравнованием в каждом решении коэффициентов при минимальной степени η и ϑ , т. е. при $\eta^{\gamma_i-1} \vartheta^0 \equiv \eta^{\gamma_i-1}$, дает $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = \gamma = 1 - \lambda$ с $\lambda = 1 / [2(\kappa - 1)]$. Таким образом, при $\lambda \neq 1, -1, -2, \dots$, что отвечает $\kappa \neq 1 + 1/(2n)$, решение (3.1) имеет вид (2.4). При $\kappa = 3/2$ множитель η^γ во втором слагаемом из

(2.4) следует, как и в плоском случае, заменить на $\eta \ln \eta$. Все сказанное сохраняется и при замене в (3.1) $\chi^\circ \sin 2\vartheta$ на любую аналитическую в окрестности точки $\eta = \vartheta = 0$ функцию η и ϑ . В последнем нетрудно убедиться, если учесть, что в силу третьего уравнения (2.1) $\chi_{i\eta\vartheta} = \chi_{i\vartheta} = 0$ при $\vartheta = 0$. Данное замечание открывает путь к обоснованию справедливости результатов п. 3 всюду в Ω_i , а не только вблизи оси x . Так, если в согласии с этими результатами, переписанными вблизи $\eta = 0$ с точностью до ϑ^2 в форме $\rho VR^2 = A_0^2 (1 + \delta\vartheta^2)$, где A_0 и δ — константы, а R — расстояние от начала координат, найти $\rho v / y$, то получим

$$\frac{\rho v}{y} = \frac{1}{1 - (3 - \delta) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

Изменения, которые в таком случае следует внести в (3.1), не отражаются на величинах γ_1 и γ_2 , в то время как влияние на функции $\chi_i(\eta, \vartheta)$ для дальнейшего несущественны. В пользу справедливости решения (2.4) с найденным выше значением γ и с аналитическими в окрестности точки $\eta = \vartheta = 0$ функциями χ_1 и χ_2 не только в малой окрестности оси x говорят также результаты расчетов, приводимых в п. 4, и то, что указанное решение формально удовлетворяет и полному нелинейному уравнению для $\Phi(\eta, \vartheta)$.

Не вникая в детали анализа, вполне аналогичного выполненному для $\nu = 0$, остановимся лишь на окончательных соотношениях. Формулы (2.5) — (2.7) переносятся на осесимметричный случай без изменений, хотя теперь λ равно $1 / [2(\kappa - 1)]$, а не вдвое большей величине, как при $\nu = 0$. С учетом отличия в λ и в $\gamma = 1 - \lambda$ аналог уравнения (2.8) примет вид

$$y = x \operatorname{tg} \vartheta_\infty + (x + \chi_{13})^{3-2\kappa} \chi_{14} + \chi_{15}$$

а формулы (2.9) заменятся на

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \sqrt{\rho V} x &= A(\vartheta) \cos \vartheta + \eta^{1/[2(\kappa-1)]} C(\vartheta) + \eta B(\vartheta) + o(\eta, \eta^{1/[2(\kappa-1)]}) = \\ &= A(\vartheta) \cos \vartheta + \sqrt{\rho V} X(\vartheta) + (\rho V)^{\kappa-1} B^\circ(\vartheta) + o(M^{-2}, M^{-1/[2(\kappa-1)]}) \\ \sqrt{\rho V} y &= A(\vartheta) \sin \vartheta + \eta^{1/[2(\kappa-1)]} \dot{H}(\vartheta) + \eta D(\vartheta) + \\ &+ o(\eta, \eta^{1/[2(\kappa-1)]}) = A(\vartheta) \sin \vartheta + \sqrt{\rho V} Y(\vartheta) + (\rho V)^{\kappa-1} D^\circ(\vartheta) + \\ &+ o(M^{-2}, M^{-1/[2(\kappa-1)]}) \end{aligned}$$

При $\kappa = 3/2$ степенные члены в соответствующих формулах заменяются на $\eta \ln \eta$, $\ln \eta$, $\ln x$, $M^{-2} \ln M$ и $\rho V \ln(\rho V)$ по правилам, которые аналогичны приведенным в п. 2.

Согласно установленным соотношениям, линии тока как угодно близки к прямым, а формулы (3.2) для каждой из них, т. е. для фиксированного ϑ , в главных порядках сводятся к течению от сферического источника интенсивности $A(\vartheta)$ с полюсом в точке $x = X(\vartheta)$, $y = Y(\vartheta)$ лишь при $\kappa > 3/2$. В противном случае вопреки [1-6] линии тока при $x \rightarrow \infty$ как угодно сильно удаляются от прямых: $y = x \operatorname{tg} \vartheta_\infty + \operatorname{const}$, а главными в (3.2) по сравнению со слагаемыми, дающими перенос полюса, оказываются члены, пропорциональные $B(\vartheta)$ и $D(\vartheta)$ или $B^\circ(\vartheta)$ и $D^\circ(\vartheta)$. Следует, однако, подчеркнуть, что для большинства практически интересных κ отличие $\kappa - 1$ от $1/2$ не столь велико, как от единицы. Поэтому для $\nu = 1$ относительная доминирующая роль вторых или третьих слагаемых (соответственно при $\kappa > 3/2$ и при $\kappa \leq 3/2$) не столь заметна, как в плоском случае. В подобных ситуациях, используя формулы (3.3), в их правых частях целесообразно оставлять все три первых слагаемых.

4. Для выяснения того, насколько аккуратно установленные выше закономерности описывают течения свободного расширения, были выполнены обширные расчеты плоских и осесимметричных струй, часть результатов которых уже использовалась при построении фиг. 2. Расчеты выполнялись при помощи специальной программы, опирающейся на так называемую «прямую» схему метода характеристик и являющейся модификацией программы, составленной ранее [9]. Указанная модификация обеспечила весьма быстрый и точный расчет сверх- и гиперзвуковых струй. Так, при $M_0 = 1.002$ и $\kappa = 1.25$ расчет на БЭСМ-6 разгонного участка плоской струи до $M = 30$ или до $x = 2.7 \cdot 10^7$ требует 18 мин при интегральных ошибках по расходу и импульсу, не превышающих 1%.

Поскольку дальнейшие результаты приводятся для оси x , то выпишем формулы, которые получаются для $\vartheta = 0$ после некоторых переобозначений и отбрасывания членов более высокого порядка из правых частей первых равенств (2.9) и (3.2). Согласно (2.9), при $v = 0$ на оси x имеем

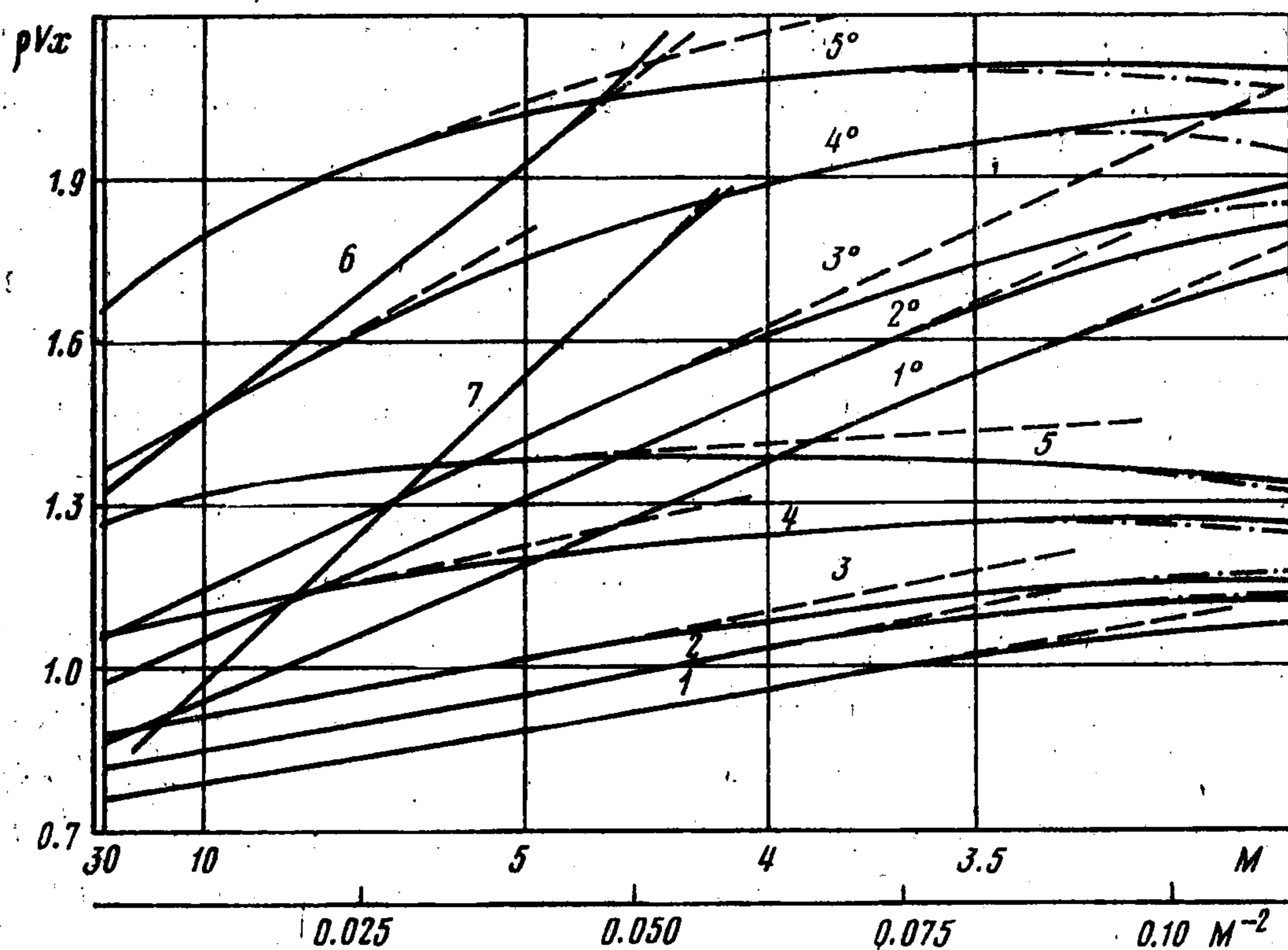
$$(4.1) \quad \rho Vx = A + CM^{-2/(\kappa-1)} + \begin{cases} BM^{-2} & \text{при } \kappa \neq 2 \\ BM^{-2} \ln M & \text{при } \kappa = 2 \end{cases}$$

Здесь и ниже A , B и C — функции v , κ , M_0 и r . Для осесимметричного случая аналогичные соотношения принимают вид

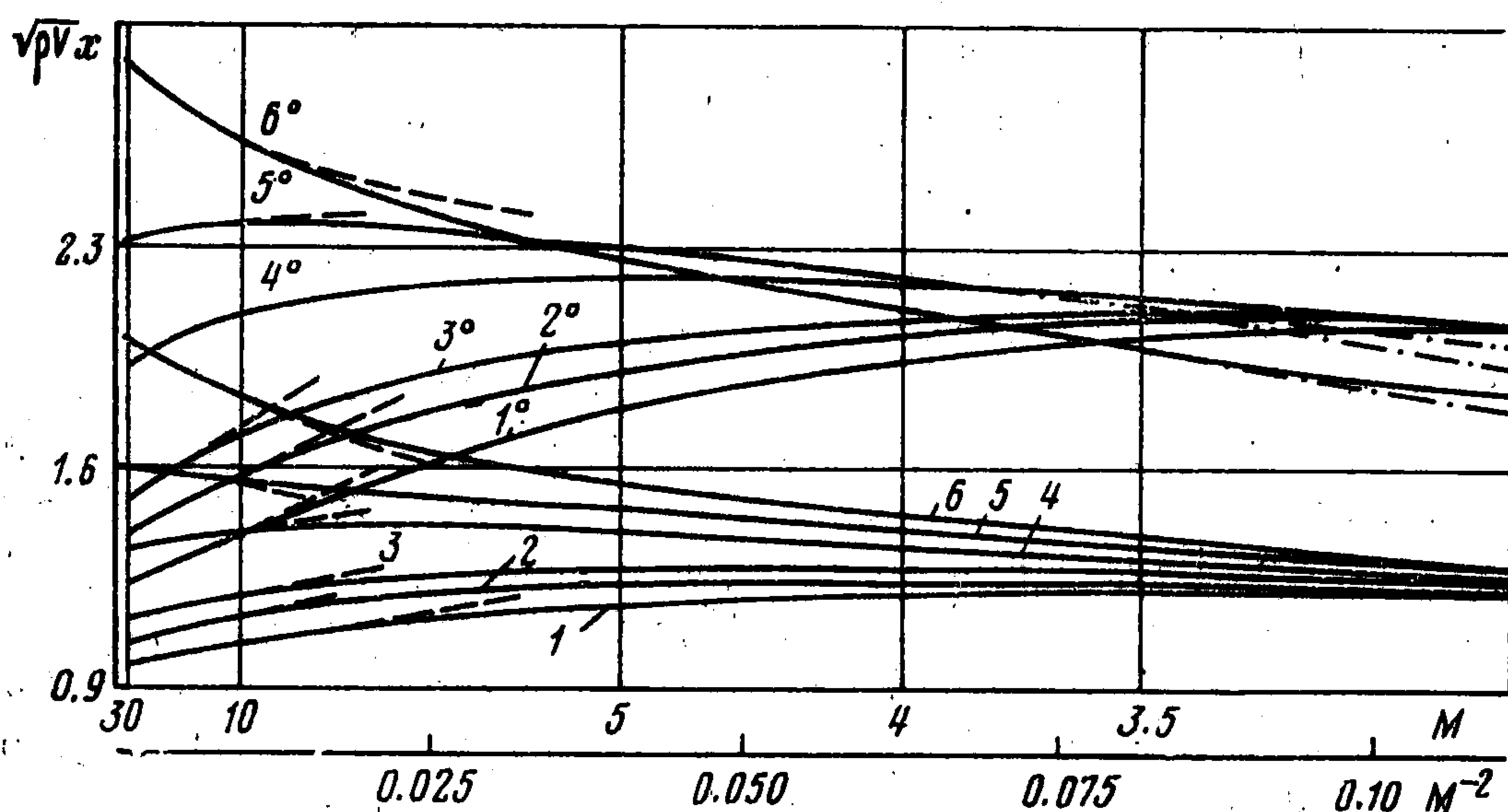
$$(4.2) \quad \sqrt{\rho} Vx = A + CM^{-1/(\kappa-1)} + \begin{cases} BM^{-2} & \text{при } \kappa \neq 3/2 \\ BM^{-2} \ln M & \text{при } \kappa = 3/2 \end{cases}$$

Результаты численных расчетов плоских струй нанесены на фиг. 3 сплошными линиями. Цифрами 1—5 помечены кривые, которые относятся к $M_0 = 1.002$, $r = 0$ и соответственно $\kappa = 1.25$, $4/3$, $7/5$, $5/3$ и 2. Кривые 1°—5° отвечают $r = 5$ и тем же M_0 и κ . Наряду со сплошными для каждого случая нарисовано по две аппроксимирующие линии: штриховые, при построении которых использовано два главных слагаемых, и штрихпунктирные, учитывающие все три слагаемых правой части (4.1). Для $\kappa = 1.25$ штрихпунктирная и сплошная кривые на фиг. 3 не различаются. Коэффициенты A , B и C при этом находились из условия совпадения со сплошными кривыми в точках $M = M_m$ и 10 для штриховых линий и $M = M_m$, 10 и 6 — для штрихпунктирных (M_m — максимальное рассчитанное для данного случая значение M). Кривые, помеченные цифрами 6 и 7, относятся к истечению для $\kappa = 1.4$ и $r = 0$ плоских струй с $M_0 = 3$ и 4. Здесь x отсчитывалось от сечения среза, хотя, как и всюду, относилось к полувысоте минимального сечения сопла (поток в этом сечении принимался равномерным, а $M \equiv 1$). Результаты аналогичных расчетов и сопоставлений с (4.2) для осесимметричных струй даны на фиг. 4, построенной в основном так же, как и фиг. 3. Отличие фиг. 4 от фиг. 3 состоит прежде всего в том, что на фиг. 4 кривые 6 и 6° теперь отвечают $M_0 = 1.002$ и $\kappa = 3$. Кроме того, на фиг. 4 нанесены не все, а наиболее отличающиеся от сплошных штрихпунктирные кривые. Фигуры 3 и 4, демонстрируя правильность установленных в п.2 и 3 закономерностей, одновременно показывают, как правило, крайне медленный переход при $M \rightarrow \infty$ к асимптотическим формулам, которые получаются, если в правых частях соответствующих выражений оставить только первые слагаемые.

Заметим, наконец, что, строго говоря, анализ п.3 обоснован лишь в узких разомкнутых зонах, которые начинаются при весьма больших M и в которых законно использованное в п.3 упрощение уравнения неразрывности. Несмотря на это, даже с учетом замечания в конце п.2 работоспособность формул (4.2), демонстрируемая фиг. 4, позволяет рассчитывать на справедливость закономерностей п.3 не только в таких зонах, но и в значительной части области свободного расширения.



Фиг. 3



Фиг. 4

Авторы выражают признательность Н. И. Тилляевой, программа которой использовалась ими в качестве прототипа, и А. М. Конкиной за помощь в работе.

Поступила 11 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженский М. Д. О некоторых свойствах гиперзвуковых течений. Тр. ЦАГИ, 1960, вып. 778.
2. Гусев В. Н., Ладыженский М. Д. Газодинамический расчет ударных труб и гиперзвуковых сопел в условиях равновесной диссоциации и ионизации воздуха. Тр. ЦАГИ, 1960, вып. 779.
3. Ладыженский М. Д. О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 2.
4. Ладыженский М. Д. Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
5. Ладыженский М. Д. О гиперзвуковых течениях в соплах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
6. Ладыженский М. Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М., «Машиностроение», 1968., с. 82—120.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. I. М., Физматгиз, 1962.
9. Тилляева Н. И. О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.