

**ДИФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ТОНКОМ КЛИНЕ,
ДВИЖУЩЕМСЯ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЕЕ ФРОНТА,
ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОМ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ**

Л. Е. Пекуровский

(Москва)

Изучается течение, возникающее при движении тонкого клина через фронт плоской ударной волны произвольной интенсивности. Фронт ударной волны образует с кромкой клина некоторый угол скольжения, а с плоскостью симметрии клина — угол, мало отличающийся от прямого. Относительно газа перед ударной волной скорость движения клина сверхзвуковая. Взаимодействие ударной волны со слабым скачком уплотнения, присоединенным к движущемуся клину, предполагается нерегулярным. Указаны диапазоны исходных параметров (угла скольжения и чисел Маха ударной волны и клина), соответствующие всем возможным при этом схемам течения. Полученное автором [1] решение плоской задачи о дифракции ударной волны на тонком клине обобщается на рассматриваемый случай пространственного течения.

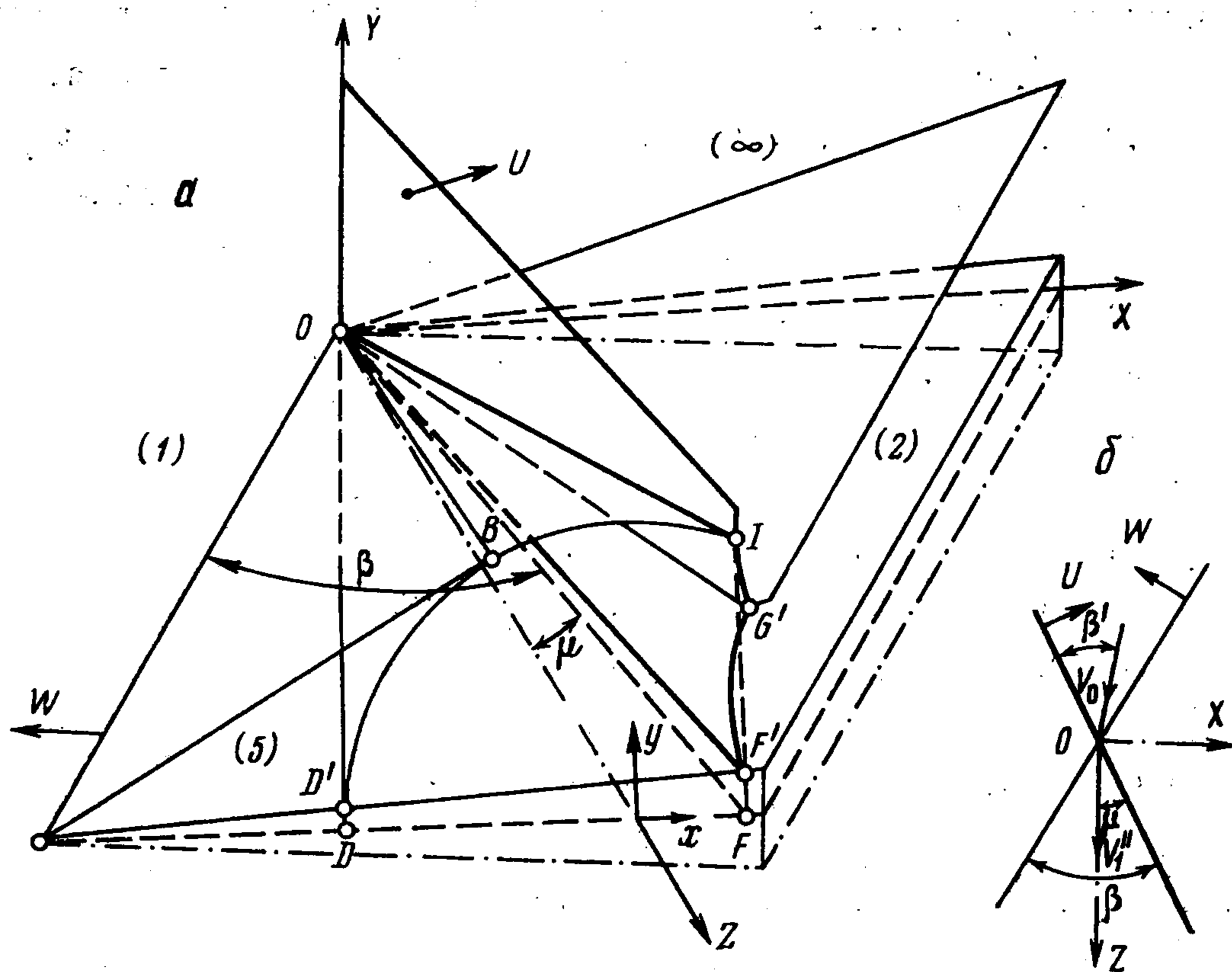
Впервые подобное обобщение решения задачи о дифракции ударной волны на неподвижном тонком клине [2] было проведено Честером [3]. Решение такой же задачи, как и рассматриваемая в предлагаемой работе, но при регулярном ударном взаимодействии, получено Смирлом [4].

Решение данной задачи содержит в виде частных случаев решения плоских задач о дифракции ударной волны на движущемся ей навстречу тонком клине (при нулевом угле скольжения) и на догнавшем ее тонком клине (когда в данной общей задаче угол скольжения равен π).

1. Постановка задачи. Пусть тонкий клин движется с постоянной сверхзвуковой скоростью в покоящемся идеальном газе, по которому независимо от этого распространяется, также с постоянной скоростью, плоская ударная волна произвольной интенсивности. Их относительное перемещение в пространстве зависит от направлений и величин скоростей движения клина $W = a_\infty M_\infty$ и фронта ударной волны $U = a_\infty M$ по покоящемуся газу. Ударная волна вызывает за своим фронтом поток газа постоянной скорости $a_1 M_1$ (a_∞ и a_1 — скорости звука в газе перед и за фронтом ударной волны). Частный случай встречного движения, когда фронт ударной волны параллелен кромке клина, изучен в работах [1, 4]. Ниже между фронтом ударной волны и кромкой клина допускается произвольный угол. Когда этот угол не равен 0 или π , кромка клина пересекается с фронтом ударной волны в точке O (фиг. 1), движущейся как вдоль кромки, так и в плоскости фронта. Поэтому часть кромки по одну сторону от точки O перемещается по газу, вовлеченному в движение ударной волной, а другая часть — по неподвижному газу, так что сказанное выше 0 движении клина

и ударной волны будет относиться теперь лишь к той части пространства, движение в которой еще не осложнено прохождением кромки клина через плоскость фронта ударной волны.

Основными параметрами, характеризующими течение, считаются: числа M и M_∞ и угол скольжения β , определенный как угол между плоскостью фронта невозмущенной ударной волны и частью кромки клина, которая движется по газу, вовлеченному в движение ударной волной (фиг. 1). Как и в работе [1], рассматриваются лишь такие течения, в кото-



Фиг. 1

рых невозмущенный фронт ударной волны составляет с плоскостью симметрии клина угол $\chi = \pi / 2 - \delta$, мало отличающийся от прямого. Относительно газа за ударной волной клин при этом оказывается движущимся со скольжением и под малым углом атаки δ . Угол полураствора клина ε имеет порядок малости, одинаковый с δ .

В системе отсчета, связанной с точкой O , течение стационарно, а невозмущенную ударную волну можно рассматривать как косой скачок уплотнения, присоединенный к некоторому клину, щека которого проходит через вектор скорости газа за этим косым скачком. Изучаемое течение предполагается мало отличающимся от движения газа через такой косой скачок уплотнения. В этом движении частицы газа перед ударной волной перемещаются в перпендикулярных к ее фронту плоскостях (фиг. 1, б) со скоростью V_0 , образующей с фронтом ударной волны угол β' и равной по величине V_0 . После прохождения ударной волны скорость частиц газа становится равной величине V_1'' , а угол между вектором скорости V_1'' и фронтом — величине μ . Формулы для величин V_0 , β' , V_1'' , μ приведены в работе [4].

Система прямоугольных физических координат X, Y, Z вводится так, что началом ее служит точка O , ось Z направляется вдоль проекции век-

тора скорости газа за ударной волной на плоскость, перпендикулярную плоскости фронта невозмущенной ударной волны, а ось Y — перпендикулярно ей в плоскости ударного фронта (фиг. 1, a).

Отсутствие характерного размера в задаче позволяет считать течение коническим. Рассматривается только такой диапазон исходных параметров задачи, когда однородный невозмущенный поток за ударной волной в выбранной системе отсчета оказывается сверхзвуковым, т. е. когда $V_1'' > a_1$.

Область неоднородного потока оказывается ограниченной поверхностью конуса Маха $OIBD'$, стенкой и частью $OF'G'I$ ударного фронта. Вершина конуса находится в точке O , а ось направлена вдоль вектора V_1'' , т. е. вдоль оси Z . Формула для угла α между образующей конуса и его осью приведена в работе [4]. Плоскость, проходящая через кромку клина и касающаяся конуса возмущений, представляет собой фронт слабой волны сжатия или разрежения. Между ней, конусом и поверхностью клина находится область (5) однородного потока, мало отличающегося своими параметрами от невозмущенного потока за ударной волной в области (1), расположенной над поверхностью $ONBI$.

Фронт слабого скачка уплотнения, присоединенного к части кромки клина, находящейся перед ударной волной, отделяет область однородного потока (2), параллельного поверхности тонкого клина, от области невозмущенного однородного потока (∞) перед ударной волной. При этом в области (2) для размерных величин скорости звука a_2 , давления p_2 и вектора скорости V_2 справедливы следующие формулы [4,5] (κ — показатель адиабаты):

$$a_2 = a_\infty \left(1 + \varepsilon \frac{\kappa - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right), \quad p_2 = p_\infty \left(1 + \varepsilon \frac{\kappa - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right)$$

$$V_2 = V_0 + \varepsilon \frac{a_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} = \left\{ -\frac{\cos(\beta - \mu)}{M_\infty}; \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{M_\infty}; -\frac{\sin(\beta - \mu)}{M_\infty} \right\}$$

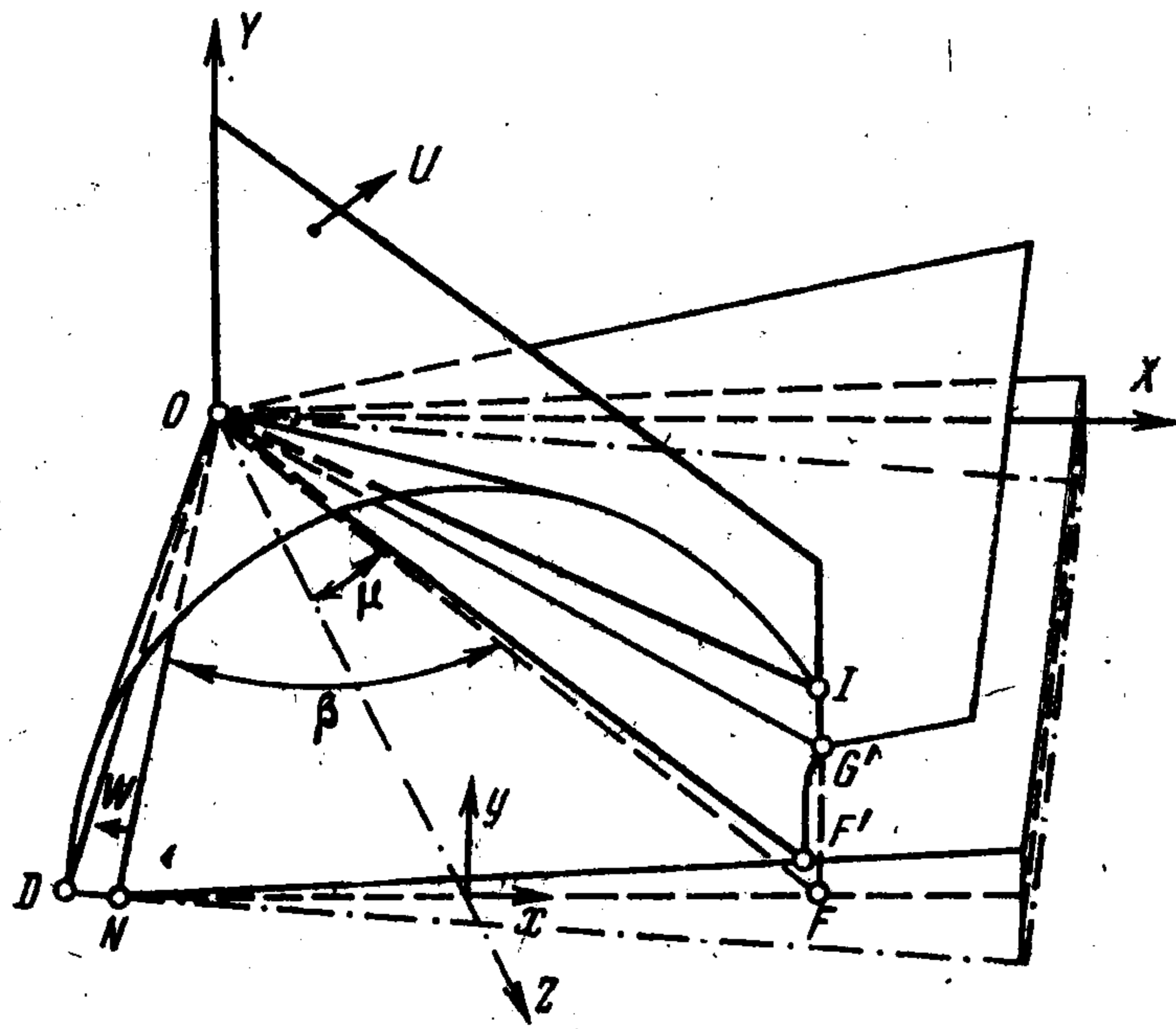
$$V_0 = V_0 \{-\sin(\beta' - \mu); 0; \cos(\beta' - \mu)\}$$

Упомянутые выше точки N, B, I, F', D' принадлежат плоскости, перпендикулярной оси Z , а фиг. 1, a соответствует случаю, когда точка N пересечения этой плоскости с кромкой находится за ударной волной, т. е. когда угол $\beta - \mu$ между вектором скорости V_1'' и частью кромки, находящейся за ударной волной, меньше $\pi/2$ и, кроме того, когда скорость движения клина относительно газа за ударной волной $V_w = a_1 M_1 \cos \beta + a_\infty M_\infty$ сверхзвуковая. Возможны и другие картины течения. Они изображены на фиг. 2, 3. Соответствующие им диапазоны чисел M и M_∞ в зависимости от величины угла β рассматриваются в п. 3.

При достаточно большой интенсивности ударной волны из-за увеличения скорости звука в газе за ней, при углах скольжения $\beta \in [\beta_1,$

$\pi/2$] (β_1 зависит от κ) скорость клина V_w относительно этого газа может стать дозвуковой. Тогда область (5) отсутствует, часть передней кромки ON , находящейся за ударной волной, попадает внутрь конуса Маха (фиг. 2), а течения над и под клином перестают быть независимыми.

Когда угол $\beta > \pi/2$, при достаточно больших значениях числа M_∞ клина может оказаться, что угол $\beta - \mu > \pi/2$. При этом точка N пересечения плоскости, перпендикулярной вектору V_1'' , с кромкой клина находится перед ударной волной. На фиг. 3 изображена соответствующая схема течения для случаев, когда слабый скачок, вызванный сверхзвуковым движением клина по газу за ударной волной и отделяющий область (5) от области (1), касается изображенной части поверхности конуса Маха $OD'B'I$, а не ее продолжения за линию OI . В противном случае в результате его взаимодействия с ударной волной возникнет отраженный скачок OLB_1 (прямая OL принадлежит плоскости фронта ударной волны, а ее угол с прямой OF (фиг. 3) будет больше угла между OI и OF), касающийся конуса Маха. Между ним, ударной волной и поверхностью конуса возникнет еще одна область (6) однородного потока. Во всех случаях, когда $\beta - \mu > \pi/2$, рассматриваются лишь такие значения исходных параметров, когда скорость V_w сверхзвуковая.



Фиг. 2

Дифракция ударной волны на клине осложняется во всех рассматриваемых случаях взаимодействием ее со слабым скачком, вызванным сверхзвуковым движением клина по газу перед ударной волной. Если в плоскости, проходящей через линию пересечения фронтов и вектор скорости V_1'' , спроектировать последний на нормаль к линии пересечения OG' , то в зависимости от того, больше или меньше эта проекция скорости звука, взаимодействие волн будет регулярным или нерегулярным. В первом случае в результате взаимодействия возникнет преломленный слабый скачок, касающийся поверхности конуса Маха. Решение соответствующей краевой задачи для давления, когда, кроме того, скорость движения клина относительно газа за ударной волной сверхзвуковая и угол $\beta < \pi/2$, получено в работе [4].

Ниже изучаются случаи нерегулярного взаимодействия волн. При этом линия пересечения скачков OG' принадлежит возмущенной части фронта ударной волны OIF' . Поверхность слабого тангенциального разрыва разделяет частицы газа, прошедшие через часть OIG' фронта ударной волны, от частиц, прошедших сначала через фронт слабого скачка уплотне-

Сечения всех описанных пространственных схем течения плоскостями, перпендикулярными оси Z , изображены на фиг. 4. В силу малости ε и δ участок возмущенного ударного фронта IF' заменен там на отрезок IF прямой, параллельной оси y , а участок $D'F'$ — на отрезок DF .

Координаты характерных точек $I(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $F(x_0, 0)$, $G(x_0, y_G)$ следующим образом зависят от основных параметров течения:

$$(2.2) \quad x_0 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \alpha} = m \frac{\cos \alpha}{\cos \mu}, \quad x_1 = - \frac{\cos(\beta - \mu)}{\cos \alpha (M_1 \cos \beta + M_\infty a_\infty / a_1)}$$

$$y_i = \sqrt{1 - x_i^2} \quad (i = 0; 1)$$

$$y_G = \frac{\operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg}(\beta - \mu) \cos(\beta - \mu)}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\cos(\beta - \mu)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{a_\infty}{a_1} \frac{M \cos \beta + M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \mu}$$

$$m = \{[2 + (\kappa - 1) M^2] / [2\kappa M^2 - (\kappa - 1)]\}^{1/2}$$

Эти же формулы справедливы и в задаче с регулярным взаимодействием волн, рассмотренной в работе [4], однако приведенные там формулы для y_G и x_1 ошибочны: в знаменателе выражения для величины y_G (обозначенной в работе [4] через y_3) содержится лишний множитель $\cos^2(\beta - \mu)$, а выражение для x_1 целиком неверно.

Выражение для y_G можно разрешить относительно M_∞ получив, тем самым, уравнение семейства кривых в координатной плоскости M, M_∞ в зависимости от параметра β , соответствующих заданному значению координаты y_G . В частном случае, когда точка G совпадает с точкой I , т. е. когда $y_G = y_0$, такая кривая (при заданном значении угла β) разделяет область изменения параметров M, M_∞ на две. Одна из них соответствует рассматриваемым здесь нерегулярным взаимодействиям (при этом $y_G < y_0$); другая — регулярным взаимодействиям, когда справедливо решение, полученное в работе [4] ($y_G > y_0$). Уравнение семейства таких кривых (границ регулярности) имеет вид

$$M_\infty = M_\infty^{(0)} = \frac{M + c \sqrt{M^2 + c^2 - 1}}{c^2 - 1} \cos \beta, \quad \beta \neq \pi / 2,$$

$$c = \frac{a_1}{a_\infty} \sqrt{1 - m^2}$$

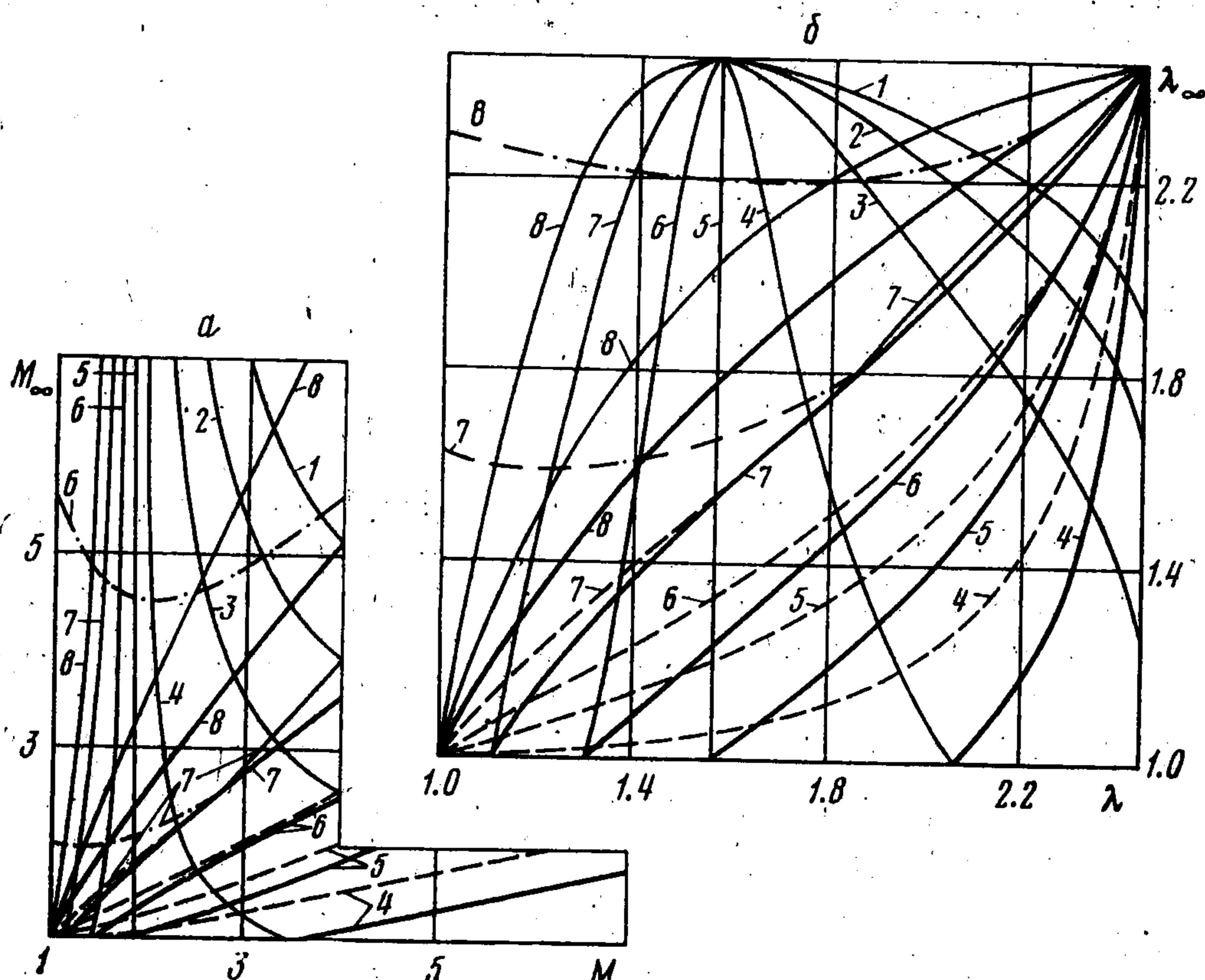
$$M = \{1 + [(\kappa + 1) / (\kappa - 1)]^{1/2}\}^{1/2}, \quad \beta = \pi / 2$$

Удобно также рассматривать эти линии в координатах λ, λ_∞ , представляющих собой отношения скоростей U и W к критической скорости звука в невозмущенном газе перед ударной волной. На фиг. 5 указанные границы регулярности представлены сплошными линиями средней толщины. Кривым 1—8 соответствуют углы $\beta = 0, 40, 60, 80, 90, 100, 120, 180^\circ$. В координатах λ, λ_∞ все они выходят из одной точки (фиг. 5, б), а в координатах M, M_∞ имеют вертикальную асимптоту $M = \{1 + [(\kappa + 1) / (\kappa - 1)]^{1/2}\}^{1/2}$ (фиг. 5, а). Области, соответствующие нерегулярным взаимодействиям, находятся справа от этих кривых.

Увеличение угла скольжения вызывает значительное расширение области нерегулярного взаимодействия.

3. Диапазоны исходных параметров для возможных типов течений. В зависимости от значений исходных параметров M, M_∞, β могут осу-

ществляться различные режимы течений (фиг. 1—3). Каждому из них в координатных плоскостях M, M_∞ и λ, λ_∞ соответствует некоторая область, зависящая от β как от параметра. Построенные в п. 2 границы регулярности позволяют определить, какие из этих режимов сопровождаются регулярным, а какие нерегулярным ударным взаимодействием.



Фиг. 5

Проводимое рассмотрение ограничено условием $V_1'' > a_1$, обеспечивающим существование конуса Маха. Это условие может быть записано в виде следующего неравенства:

$$(3.1) \quad M_\infty > M_\infty^{(1)} = c \sin \beta - M \cos \beta$$

Можно показать также, что

а) скорость движения клина относительно газа за ударной волной будет сверхзвуковой т. е. $V_w > a_1$, если

$$(3.2) \quad M_\infty > M_\infty^{(2)} = (1 - M_1 \cos \beta) a_1 / a_\infty$$

б) когда $\beta > \pi/2$, угол $\beta - \mu$ между вектором V_1'' и кромкой меньше $\pi/2$, если

$$(3.3) \quad M_\infty < M_\infty^{(3)} = [2(M^2 - 1) \sin^2 \beta - (\kappa + 1) M^2] / [(\kappa + 1) M \cos \beta]$$

в) для случаев, когда $\beta - \mu > \pi/2$, т. е. когда $M_\infty > M_\infty^{(3)}$, условие $x_1 < x_0$ выполнено, если

$$(3.4) \quad M_\infty > M_\infty^{(4)} = -(2M^2 - 1) \cos \beta / M$$

Последнее условие означает, что слабый скачок, вызванный сверхзвуковым движением клина по газу в области (1), касается части $OD'I$ поверхности конуса Маха (фиг. 3).

Если сравнить (3.1) и (3.2), то оказывается, что $M_\infty^{(1)} \leq M_\infty^{(2)}$, причем равенство достигается лишь при $M = M_*$, где

$$(3.5) \quad M_* = \{[2 - (\kappa - 1) \cos^2 \beta] / [2\kappa \cos^2 \beta - (\kappa - 1)]\}^{1/2}$$

С другой стороны, одновременное равенство величин V_1'' и V_w скорости звука a_1 может произойти, лишь когда вектор V_1'' перпендикулярен кромке, т. е. когда $\beta - \mu = \pi/2$. Это значит, что $M_\infty^{(1)} = M_\infty^{(2)} = M_\infty^{(3)}$ при $M = M_*$; кроме того, из соотношения (3.4) следует, что в этом случае с ними совпадает и величина $M_\infty^{(4)}$, т. е.

$$M_\infty^{(1)} = M_\infty^{(2)} = M_\infty^{(3)} = M_\infty^{(4)} = (2M^2 - 1) m / M \quad \text{при } M = M_*$$

Величина M_* изменяется от 1 до ∞ с ростом β при

$$(3.6) \quad \pi - \operatorname{arctg} [(\kappa + 1) / (\kappa - 1)]^{1/2} < \beta < \pi$$

На фиг. 5 условию равенства величины V_w скорости звука a_1 отвечает штриховая линия, уравнение которой $M_\infty = M_\infty^{(2)}(M)$, условию перпендикулярности вектора V_1'' кромке — штрихпунктирная линия $M_\infty = M_\infty^{(3)}(M)$, условию $x_0 = x_1$ — тонкая сплошная линия, выходящая из общей для всех кривых точки, $M_\infty = M_\infty^{(4)}(M)$. Жирной линией обозначена нижняя граница возможных значений M_∞ (или λ_∞) в случае, если она отлична от единицы. Кривые 1—8 соответствуют значениям углов $\beta = 0, 40, 60, 80, 90, 100, 120, 180^\circ$.

Если зафиксировать β , удовлетворяющее условию (3.6) (или $112.2^\circ < \beta < 180^\circ$ при $\kappa = 1.4$), то три кривые $M_\infty^{(1)}(M)$, $M_\infty^{(2)}(M)$, $M_\infty^{(3)}(M)$ имеют общую точку, причем первые две касаются (вторая, штриховая, всегда проходит над первой), а третья, штрихпунктирная, отвечающая условию $\beta - \mu = 90^\circ$, их пересекает (на фиг. 5 этому случаю соответствует угол $\beta = 120^\circ$). Поскольку при $\beta - \mu > 90^\circ$ (т. е. над штрихпунктирной линией) дозвуковые случаи не рассматриваются, то нижняя граница возможных значений чисел M_∞ (жирная линия) при $M > M_*$ описывается уравнением $M_\infty = M_\infty^{(2)}$, а при $M < M_*$, поскольку при этом $\beta - \mu < 90^\circ$ — уравнением $M_\infty = M_\infty^{(1)}$. При этом область между жирной и штриховой линиями соответствует дозвуковому случаю (фиг. 2), область между штриховой и штрихпунктирной — сверхзвуковому (фиг. 1, а), между штрихпунктирной и тонкой сплошной — случаю $\beta - \mu > 90^\circ$ (фиг. 3), между тонкой сплошной и жирной — отражению слабого скачка от ударной волны сзади (рис. 4, з).

По мере увеличения β общая точка этих кривых стремится к точке с координатами $M_\infty = M = 1$ ($\lambda_\infty = \lambda = 1$). При угле $\beta = 180^\circ$, отвечающем случаю плоской задачи о дифракции ударной волны на догнавшем ее тонком клине, вся жирная линия описывается уравнением $M_\infty = M_\infty^{(2)}$, т. е. относительно газа за ударной волной клин должен двигаться со сверхзвуковой скоростью. Область между жирной и тонкой линиями соответствует случаям отражения слабого скачка в области (1) от ударной волны сзади, а область слева от тонкой линии — течению без такого отражения.

Если угол β находится в интервале $(\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1)}; \pi/2)$, то для всех значений M выполнены неравенства, $M_\infty^{(4)} < M_\infty^{(1)} <$

$< M_\infty^{(2)} < M_\infty^{(3)}$. Поэтому вся жирная линия описывается уравнением $M_\infty = M_\infty^{(1)}$, а тонкая линия отсутствует, т. е. отражения слабого скачка от ударной волны сзади при этих значениях угла β не происходит (на фиг. 5 внутри этого интервала находится угол $\beta = 100^\circ$).

Если $\operatorname{arctg} \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1)} < \beta < \pi / 2$ (или $67.8^\circ < \beta < 90^\circ$ при $\kappa = 1.4$), то штрихпунктирная линия отсутствует, т. е. всегда $\beta - \mu < 90^\circ$.

Следует заметить, что во всех описанных до сих пор случаях сплошная линия средней толщины (граница регулярности) и жирная линия выходят из одной точки, отвечающей значению $M_\infty = 1$; причем всегда первая левее второй.

Если $\operatorname{arccos} \sqrt{\kappa(\kappa - 1) / 2} < \beta < \operatorname{arctg} \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1)}$ (или $58.0^\circ < \beta < 67.8^\circ$ при $\kappa = 1.4$), то условие $M_\infty > M_\infty^{(2)}$ выполнено при всяком $M_\infty > 1$ и в зависимости от того, выполнено ли условие $M_\infty > M_\infty^{(2)}$, будет реализован сверхзвуковой (фиг. 1, а) или дозвуковой (фиг. 2) случай. На фиг. 5 этому интервалу, соответствует угол $\beta = 60^\circ$, однако из-за того, что в данном случае величина $M_\infty^{(2)}$ становится больше единицы лишь при очень больших числах M (больших приблизительно 40), штриховая кривая, описываемая уравнением $M_\infty = M_\infty^{(2)}$, не изображена.

Наконец, при $0 < \beta < \operatorname{arccos} \sqrt{\kappa(\kappa - 1) / 2}$ сверхзвуковой случай имеет место для любого числа M .

Если число $\kappa \geq 2$, то при достаточно больших числах M для любых значений угла β число $M_\infty^{(2)} > 1$, т. е. если M_∞ удовлетворяет условию $1 < M_\infty < M_\infty^{(2)}$, то будет иметь место дозвуковой случай.

4. Краевая задача (сверхзвуковой случай). Безразмерные возмущения давления p , плотности ρ и компонент u и v вектора скорости по осям x и y вводятся по формулам [4]

$$p = \frac{\bar{p} - p_1}{\varepsilon \rho_1 a_1^2}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho} - \rho_1}{\varepsilon \rho_1}, \quad u = \frac{\bar{u}}{\varepsilon a_1 \cos \alpha}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\varepsilon a_1 \cos \alpha}$$

в которых \bar{p} , $\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{v} — размерные величины внутри конуса возмущений, а p_1 , ρ_1 , a_1 — в области (1).

Система уравнений газовой динамики для величин p , ρ , u , v , отвечающая изучаемой пространственной задаче, после перехода к автомоделным переменным и линеаризации оказывается совпадающей с системой уравнений, соответствующей плоской нестационарной задаче [2]. После исключения ρ , u , v эта система сводится к уравнению эллиптического типа для функции p в области $IBDFI$. При этом вдоль участков дуг IB и BD давление постоянно: $p = 0$ на IB и $p = p_5$ на BF , причем

$$(4.1) \quad p_5 = \frac{q^2}{\sqrt{q^2 - 1}} \left(1 + \frac{M_1 \delta / \varepsilon}{q} \right), \quad q = M_1 \cos \beta + M_\infty a_\infty / a_1$$

На участке DF границы должно выполняться условие $\partial p / \partial y = 0$ [2].

Линеаризация законов сохранения на ударной волне, уравнение фронта которой $x = x_0 + \varepsilon f(y)$, приводит к следующим выражениям для кра-

евых значений функций u , v , p на участке FI границы области $IBDFI$:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u &= g_u (f - yf') + h_u \delta (y_G - y), \quad v = g_v f' + h_v \delta (y_G - y) \\ p &= g_p (f - yf') + h_p \delta (y_G - y) \\ g_u &= \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\cos^3 \mu}{\cos^2 \alpha} \frac{\sqrt{M^2 + M_\infty^2 + 2MM_\infty \cos \beta}}{M_\infty + M \cos \beta} \times \\ &\times \left[\cos(\beta' + \mu) + \frac{\cos(\beta' - \mu)}{M^2} \right] \\ g_v &= -\frac{M_1 \cos \mu}{\cos \alpha}, \quad g_p = \frac{4M}{\kappa + 1} \frac{p_\infty}{p_1} \frac{a_1}{a_\infty} \frac{\cos^3 \mu}{\cos \alpha} \\ h_u &= \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\cos \mu}{\cos \alpha} \frac{a_\infty}{a_1} \left\{ \frac{M_\infty}{M^2} \cos \beta + M \left[\cos \beta - \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\cos(\beta - \mu)}{\cos \mu} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{(\kappa - 1) M_\infty^2}{M} \right\} \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \\ h_v &= \frac{M_\infty a_\infty}{a_1 \cos \alpha}, \quad h_p = \frac{4}{\kappa + 1} \frac{p_\infty}{p_1} \left(\frac{M^2 M_\infty^2}{2} - \frac{\kappa - 1}{4} M_\infty^2 + \right. \\ &\left. + MM_\infty \cos \beta \right) \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \end{aligned}$$

Из этих соотношений после исключения функции f получается следующая связь между возмущениями компонент скорости и давления ($\delta(y - y_G)$ — дельта-функция):

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u &= Ap + (h_u - Ah_p) \delta (y_G - y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial y} - \\ &- \left(h_v - \frac{h_p B}{y} \right) \delta (y - y_G) \\ A &= \frac{M^2 \cos(\beta' + \mu) + \cos(\beta' - \mu)}{2M^2 \cos \alpha \cos \beta'} \sqrt{\frac{2\kappa M^2 - (\kappa - 1)}{2 + (\kappa - 1) M^2}} \\ B &= \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M^2 - 1}{2 + (\kappa - 1) M^2} \frac{1}{\cos^2 \mu} \end{aligned}$$

Как и в случае плоской задачи, разобранный в работе [1], соотношения (4.3) приводят к краевому условию для функции p при $x = x_0$, отличающемуся лишь знаком перед дельта-функцией от формулы (2.2) работы [6], в которой, кроме того, величину m следует заменить на x_0 .

Второе из соотношений (4.3) после интегрирования вдоль фронта приводит, как и в плоской задаче, к следующему условию нормировки (интеграл в нем подразумевается в смысле главного значения):

$$(4.4) \quad \int_0^{y_0} \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial y} dy = h_v - h_p \frac{B}{y_G} - v_w$$

$$v_w = (M_1 \cos \beta + M_\infty a_\infty / a_1 + M_1 \delta / \varepsilon) \sec \alpha$$

Итак, поскольку в сверхзвуковом случае как вид треугольной области $IBDFI$, так и поставленная в ней выше краевая задача для функции p по внешнему виду аналогичны таковым в плоской задаче дифракции, то и решение будет иметь тот же вид, что и решение, полученное в работе [1].

Окончательные формулы для распределения давления на стенку $p(x)$ и вдоль ударного фронта $p(y)$ даются формулами (4.1) и (4.2) работы [1]. При этом выражение для входящей туда величины K_0 изменится:

$$K_0 = -\frac{B}{y_G} \left(h_p + \frac{S}{b^2 + 1} \right) - \left(M_1 \frac{\delta}{\varepsilon} + M_1 \cos \beta \right) \sec \alpha$$

Указанные формулы выписаны в предположении $\gamma_1, \gamma_2 > \sqrt{2}$; в плоской задаче эти неравенства могли нарушиться лишь когда $\kappa > 5/3$; при наличии же угла скольжения это может произойти при любом κ . В этом случае, если, например, $\gamma_2 < \sqrt{2}$, то следует произвести изменения, указанные в п. 4 работы [1]. Аналогично надо поступить, если $\gamma_1 < \sqrt{2}$.

Особенности в распределении давления вдоль ударного фронта, обнаруженные в плоской задаче, — конечный разрыв и логарифмическая особенность функции p в точке G , — по-видимому, характерные для нерегулярного взаимодействия слабого скачка с ударной волной конечной интенсивности, сохраняются и в рассматриваемом случае пространственного течения.

Как уже упоминалось в п. 1, когда угол $\beta - \mu > \pi/2$, возможно отражение слабого скачка, вызванного движением клина по газу за ударной волной, от ударной волны; тогда отраженный фронт касается конуса Маха. При этом на схеме течения в плоскости x, y (фиг. 4, з) возникнет новая область (б), ограниченная отраженным фронтом, ударной волной и дугой IB_1 ; координаты точки $B_1(x_1, y_1)$ определяются по формулам

$$x_1' = \frac{x_0 - y_L \sqrt{y_L^2 - y_0^2}}{x_0^2 + y_L^2}, \quad y_L = \frac{1 - x_1 x_0}{\sqrt{1 - x_1^2}}, \quad y_1' = \sqrt{1 - x_1'^2}$$

Возмущение давления в этой области p_6 можно найти с помощью полученного ранее (см. [7], гл. IV, § 3) коэффициента отражения слабой волны от ударной волны произвольной интенсивности. В коэффициенты c_3 и c_4 формул (4.1) и (4.2) работы [1] вместо p_5 следует подставить $p_5 - p_6$, а в правую часть выражения для возмущения давления вдоль ударного фронта $p(y)$ добавить в качестве слагаемого величину p_6 .

5. Форма ударного фронта. Третье из условий (4.2) после подстановки в него функции $p(y)$, даваемой формулой (4.2) работы [1], позволяет найти функцию $f(y)$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения с условием $f = 0$ при $y = y_0$. Его решение представляет собой правую часть соотношения (5.2) работы [1], умноженную на величину $\cos \alpha / \cos \mu$.

В упомянутом в конце п. 4 случае внутреннего отражения слабого скачка от ударной волны последняя в результате взаимодействия волн будет отклонена от невозмущенного положения на участке LI (фиг. 4, з); изменится и граничное условие для функции $f(y)$ в точке y_0 . С помощью третьего из соотношений (4.2) оно может быть записано в виде

$$f(y_0) = -\frac{\kappa + 1}{4} \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \mu} \frac{a_\infty}{a_1} \frac{p_1}{p_\infty} \frac{p_6}{M} \left(1 - \frac{y_0}{y_L} \right)$$

Величину $f(y_0)$ следует прибавить к правой части выражения (5.2) работы [1], предварительно умноженной на $\cos \alpha / \cos \mu$.

Функция $f(y)$ характеризует смещение ударной волны по сравнению с невозмущенным положением в плоскости x, y , в которой ведется рассмотрение, и оно не равно ее отклонению по нормали к положению невозмущенного фронта. Последнее получается из $f(y)$ умножением на $\operatorname{ctg} \alpha / \cos \mu$.

6. Движение, при котором кромка внутри конуса Маха. В соответствии со сказанным в п. 1 в дозвуковом случае лишь часть NF границы DF принадлежит стенке (фиг. 4, б), причем для координаты точки N на оси x имеет место формула

$$x_N = -\frac{\operatorname{tg}(\beta - \mu)}{\operatorname{tg} \alpha} = -\left(M_\infty \frac{a_\infty}{a_1} + M_1 \cos \beta\right) \frac{\cos \alpha}{\cos(\beta - \mu)}$$

Следуя работе [3], удобно разделить искомую функцию p на две: $p = p_s + p_a$, причем так, чтобы p_s была симметрична, а p_a — антисимметрична относительно оси $y = 0$.

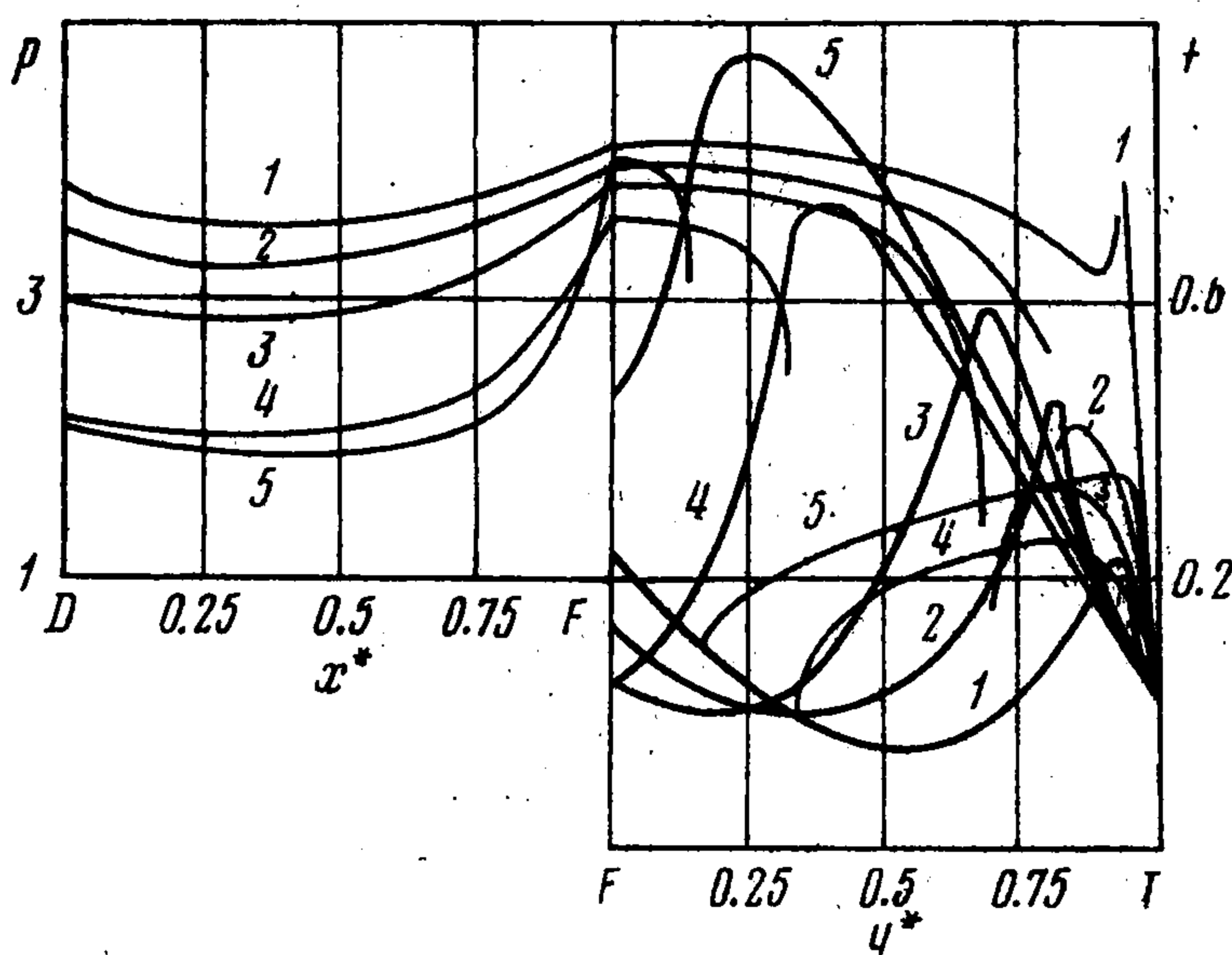
Построение решения для функции p_a проводится так же, как и в работе [3]; в частности, распределение p_a вдоль стенки дается формулой (64) работы [3].

Функция p_s равна нулю вдоль маховской дуги ID , на участке DF удовлетворяет условию

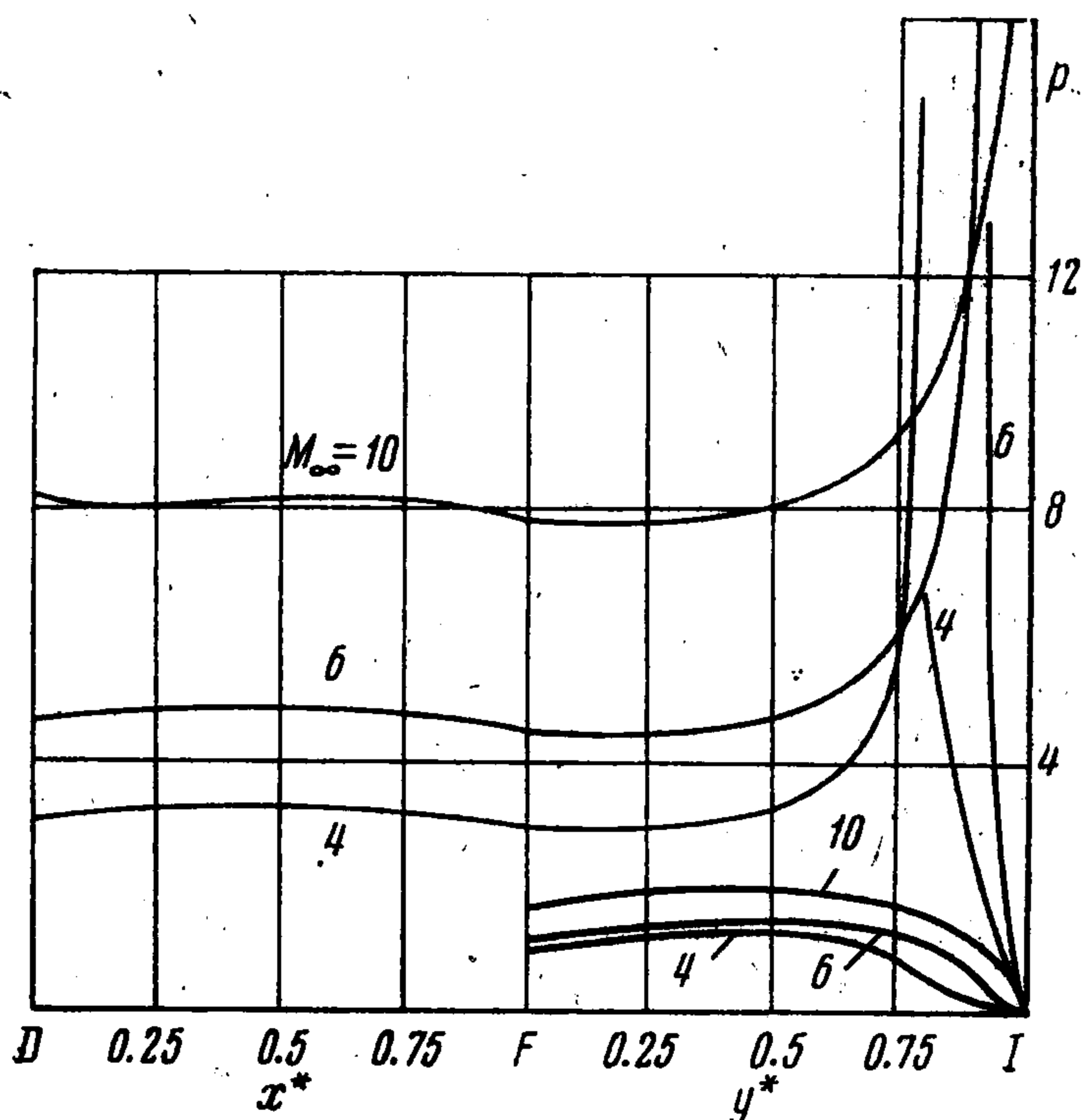
$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s}{\partial y} &= x_N v_w^s \delta(x - x_N), \quad v_w^s = \\ &= (M_1 \cos \beta + \\ &+ M_\infty a_\infty / a_1) \operatorname{sec} \alpha \end{aligned}$$

На ударном фронте функция p_s удовлетворяет такому же условию, как функция p в п. 4, и условию нормировки (4.4), причем в последнее вместо величины v_w следует подставить v_w^s .

Можно показать, что распределение величины p_s вдоль стенки и ударного фронта получается из формул (4.1) и (4.2) работы [1] заменой в слагаемых с коэффициентами c_3, c_4, d_3 символа arctg на символ Arth , $\gamma_3 - \sqrt{2}$ на $\sqrt{2} - \gamma_3$, $\gamma_4 - \sqrt{2}$ на $\sqrt{2} - \gamma_4$, $\gamma_3^2 - 2$ на $2 - \gamma_3^2$; при этом $\gamma_3^2 = 2(x_0 - x_N)^2 / [(1 - x_0 x_N)^2]$. Вместо величины p_s , входящей в коэффициенты c_3 и c_4 , должна теперь стоять величина $(-x_N v_w^s / \sqrt{1 - x_N^2})$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Таким образом, в дозвуковом случае давление на стенку имеет в точке N как логарифмическую особенность, так и (когда $\delta \neq 0$) более сильную особенность типа $1/\sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow 0$. Давление вдоль ударного фронта имеет те же особенности в точке G , что и в сверхзвуковом случае.

7. Результаты расчетов. На фиг. 6, 7 давление на стенку представлено в зависимости от координаты $x^* = (1+x)/(1+x_0)$, а давление вдоль фронта и форма фронта — от координаты $y^* = y/y_0$. Считается, что $\kappa = 1.4$. Форма фронта нанесена жирными линиями.

На фиг. 6 показано влияние угла скольжения β на распределение давления на стенку (левая часть фигуры) и вдоль фронта и на форму фронта для случая $M = M_\infty = 5$, $\delta = 0$. Кривые 1—5 соответствуют значениям углов $\beta = 0, 40, 60, 100, 120^\circ$. С увеличением угла β линия пересечения фронтов приближается к стенке, вызывая на части ее, примыкающей к ударной волне, увеличение крутизны кривых.

Фигура 7 соответствует плоской задаче, когда угол $\beta = \pi$; этот частный случай отвечает течению, возникающему после того, как тонкий клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью, достигает сзади фронта ударной волны. Здесь число $M = 1.5$, $\delta = 0$. Числа M_∞ указаны над соответствующими кривыми. Когда $M_\infty = 8$, тройная точка G очень близка к точке I ($y_G^* = 0.995$), поэтому правая ветвь кривой распределения давления вдоль фронта, обращающаяся в нуль в точке I и уходящая в точке G в бесконечность, не видна на фигуре. Когда $M_\infty = 10$, взаимодействие волн регулярно, кривая давления вдоль фронта непрерывна.

Поступила 31 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Пекуровский Л. Е. Дифракция ударной волны на тонком клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью, при нерегулярном взаимодействии волн. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
2. Lighthill M. J. The diffraction of blast. I. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1949, vol. 198, No. 1055, p. 454—470.
3. Chester W. The diffraction and reflection of shock waves. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 1, 57—82 (Рус. пер.: сб. Механика, 1956, № 3.)
4. Smyrl J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speed. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt 2, p. 223—240.
5. Arora N. L. Correction to Smyrl's results for a thin yawed wedges. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 3, p. 653—654.
6. Пекуровский Л. Е., Тер-Минасянц С. М. Дифракция плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью, при нерегулярном ударном взаимодействии. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
7. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.