Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 62–50

ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЛЯ ЦЕНЫ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

Е. Г. Полищук

(Свердловск)

Рассматривается дифференциальная игра фиксированной длительности с линейной динамикой и выпуклой терминальной платой. Для цены игры дается оценка сверху, основанная на рассмотрении функций последовательного программного максимина.

Имеется ряд работ (см. [1,2]), посвященных построению монотонных приближений к цене игры. Возникает вопрос об оценке погрешности. Для фиксированного разбиения интервала времени игры можно вычислить последовательный программный максимин [3] рассматриваемой позиции, он является приближением снизу к цене игры. В данной работе дается для цены оценка сверху, и, таким образом, получена оценка погрешности.

Пусть движение системы описывается уравнением

(1) $$x^{\cdot} = u + v,\ x(t_0) = x_0,\ x \in R^n,\ t \in [t_0,\ \theta],\ u \in P(t),\ v \in Q(t)$$

Здесь R^n — n-мерное евклидово пространство, $P(t)$ и $Q(t)$ — непрерывно зависящие от t выпуклые компакты в R^n, ограничивающие управляющие векторы первого и второго игроков соответственно. Первый (второй) игрок стремится минимизировать (максимизировать) плату $g(x(\theta))$ — значение функции $g(x)$ на фазовом векторе системы в конечный момент времени θ. Функция g предполагается выпуклой и удовлетворяющей условию Липшица с постоянной α. Будем также считать, что $g(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$. Это не является ограничением. Игра рассматривается в позиционной формализации [3]. Для всякой позиции (t, x) существует цена игры $\varepsilon(t, x)$ [3]. Будем оценивать величину $\varepsilon(t_0, x_0)$.

Пусть $\Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ — разбиение отрезка $[t_0, \theta]$. Обозначим через $\varepsilon_\Delta^i(x)$ $(i = N, N-1, \ldots, 0)$ значение последовательного программного максимина, отвечающего разбиению Δ и вычисленного для позиции (t_i, x), т. е.

$$\varepsilon_\Delta^N(x) = g(x),\quad \varepsilon_\Delta^i(x) = \max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \varepsilon_\Delta^{i+1}\Bigl(x + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (u(t) + v(t))\,dt\Bigr)$$

Здесь $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$ — измеримые функции на $[t_i, t_{i+1}]$. Отметим, что функции ε_Δ^i, выпуклые по x, удовлетворяют условию Липшица с постоянной α.

Известно [3], что для цены $\varepsilon(t_0, x_0)$ справедлива оценка снизу

(2) $$\varepsilon_\Delta^\circ(x_0) \leqslant \varepsilon(t_0, x_0)$$

и $\varepsilon_\Delta^\circ(x_0) \to \varepsilon(t_0, x_0)$, когда диаметр разбиения $\Delta \to 0$. Для определения погрешности достаточно оценить $\varepsilon(t_0, x_0)$ сверху.

Для каждого фиксированного $i = 0, 1, \ldots, N-1$ введем функцию $d_i(\omega)$ ($\omega \geqslant \min_x \varepsilon_\Delta^i(x)$; этот минимум существует, так как непрерывная функция $\varepsilon_\Delta^i(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$). Для всякого такого ω пусть $\rho_\omega^i(l)$ — опорная функция [4] множества $\{y \in R^n\colon \varepsilon_\Delta^{i+1}(y) \leqslant \omega\}$ и

$$f_\omega^i(t, x) = \max_{\|l\| \leqslant 1}\left\{\langle l, x\rangle + \int_t^{t_{i+1}} H(\tau, l)\,d\tau - \rho_\omega^i(l)\right\} \tag{3}$$

$$H(\tau, l) = \min_{u \in P(\tau)} \langle l, u\rangle + \max_{v \in Q(\tau)} \langle l, v\rangle, \quad l \in R^n, \quad \tau \in [t_0, \theta]$$

(максимум в (3) существует, так как функция ρ_ω^i конечная и непрерывная).

Пусть $I_i(\omega) = [t_i, t_i(\omega)] \subset [t_i, t_{i+1}]$ — некоторый отрезок (точка считается отрезком), такой, что при некотором $\delta > 0$ для всякой позиции (t_*, x_*) из области

$$\{(t, x)\colon t \in (t_i, t_i(\omega)),\ 0 < f_\omega^i(t, x) < \delta\}$$

выполняется

Условие (см. условие 43.2 из [3]). Для всякого $v_* \in Q(t_*)$ существует такое $u_* \in P(t_*)$, что неравенство

$$\langle l, u_*\rangle + \langle l, v_*\rangle \leqslant H(t_*, l)$$

справедливо для всех векторов l, на которых достигается максимум в (3) при $t = t_*$, $x = x_*$.

Отметим, что всегда можно взять $I_i(\omega) = [t_i, t_i]$. Пусть

$$c_i(\omega) = \alpha \min_{t \in I_i(\omega)} \int_t^{t_{i+1}} \beta_i(\tau, t)\,d\tau$$

$$\beta_i(\tau, t) = \max\left\{0, \max_{\|l\|=1}\left(H(\tau, l) - \frac{1}{t_{i+1} - t}\int_t^{t_{i+1}} H(s, l)\,ds\right)\right\}$$

$$(t \leqslant \tau \leqslant t_{i+1})$$

Определим функцию d_i формулой $d_i(\omega) = \inf_{r \geqslant \omega}(r + c_i(r))$.

Теорема. Справедливо неравенство

$$\varepsilon(t_0, x_0) \leqslant d_{N-1}(d_{N-2} \ldots (d_0(\varepsilon_\Delta^\circ(x_0))) \ldots)$$

Для доказательства понадобится следующая

Лемма. Пусть $N = 1$ и $\varepsilon_\Delta^\circ(x_0) = \varepsilon^\circ(t_0, x_0)$ — обычный программный максимин позиции (t_0, x_0). Тогда

$$\varepsilon(t_0, x_0) - \varepsilon^\circ(t_0, x_0) \leqslant \alpha \int_{t_0}^{\theta} \beta_0(\tau, t_0)\,d\tau$$

Приведем схему доказательства леммы. Рассмотрим игру, получаемую из исходной заменой множеств $P(t)$, $Q(t)$ на независящие от t компакты

$$P_* = \frac{1}{\theta - t_0}\int_{t_0}^{\theta} P(t)\,dt, \quad Q_* = \frac{1}{\theta - t_0}\int_{t_0}^{\theta} Q(t)\,dt$$

Тогда программные максимины позиции (t_0, x_0) для новой и исходной игр совпадают, а в силу [5] для линейной игры с простым движением (т. е. когда множества, ограничивающие управления, не зависят от t) и выпуклой платой цена совпадает с программным максимином. Таким образом, для получения утверждения леммы нужно сравнить цены исходной и построенной игр. Это делается с использованием теоремы об унификации [6].

Доказательство теоремы. Покажем, что

$$\varepsilon(t_{N-1}, x_*) \leqslant d_{N-1}(\varepsilon_\Delta^{N-1}(x_*)), \quad \forall x_* \in R^n \tag{4}$$

Возьмем произвольное число $r \geqslant \varepsilon_\Delta^{N-1}(x_*)$ и рассмотрим множество

$$\{(t, x) : t \in I_{N-1}(r), f_r^{N-1}(t, x) = 0\} \tag{5}$$

Это множество образовано всеми позициями (t, x), $t \in I_{N-1}(r)$, из которых возможно программное поглощение [3] множества $\{y\colon \varepsilon_\Delta^N(y) \leqslant r\}$ в момент времени t_N. Учитывая определение отрезков $I_i(\omega)$, из [3] имеем, что множество (5) u-стабильное и, следовательно [3], первый игрок может обеспечить, чтобы всякое движение, выходящее из позиции (t_{N-1}, x_*), оставалось на этом множестве, пока $t \in I_{N-1}(r)$. Но для всякой позиции (t, x) из множества (5) справедливо неравенство

$$\varepsilon(t, x) \leqslant r + \alpha \int_t^\theta \beta_{N-1}(\tau, t)\, d\tau \tag{6}$$

которое получаем, применяя лемму к отрезку времени $[t, \theta]$ (заменяем (t_0, x_0) на (t, x)) и учитывая, что $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant r$, так как из (t, x) возможно программное поглощение множества $\{y\colon g(y) \leqslant r\}$.

Из сказанного выше и неравенства (6) следует

$$\varepsilon(t_{N-1}, x_*) \leqslant r + c_{N-1}(r), \quad \forall r \geqslant \varepsilon_\Delta^{N-1}(x_*)$$

что доказывает справедливость (4).

Докажем теперь, что

$$\varepsilon(t_{N-2}, x_*) \leqslant d_{N-1}(d_{N-2}(\varepsilon_\Delta^{N-2}(x_*))), \quad \forall x_* \in R^n \tag{7}$$

Пусть ω_* — цена позиции (t_{N-2}, x_*) в игре с моментом окончания t_{N-1}, платой $\varepsilon_\Delta^{N-1}(\cdot)$ и уравнением (1). Из неравенства (4), учитывая, что функция d_{N-1} неубывающая, получаем

$$\varepsilon(t_{N-2}, x_*) \leqslant d_{N-1}(\omega_*) \tag{8}$$

Возьмем произвольное число $r \geqslant \varepsilon_\Delta^{N-2}(x_*)$. Так как множество

$$\{(t, x) : t \in I_{N-2}(r), \quad f_r^{N-2}(t, x) = 0\}$$

u-стабильное, то первый игрок может обеспечить, чтобы всякое движение, выходящее из позиции (t_{N-2}, x_*), оставалось в этом множестве, пока $t \in I_{N-2}(r)$. Отсюда, применяя лемму к отрезкам времени $[t, t_{N-1}]$ ($t \in I_{N-2}(r)$) и считая за плату функцию $\varepsilon_\Delta^{N-1}(\cdot)$, получаем, что

$$\omega_* \leqslant r + \alpha \int_t^{t_{N-1}} \beta_{N-2}(\tau, t)\, d\tau, \quad \forall t \in I_{N-2}(r)$$

Следовательно

$$\omega_* \leqslant d_{N-2}(\varepsilon_\Delta^{N-2}(x_*)) \tag{9}$$

Так как функция d_{N-1} неубывающая, то из (8), (9) следует (7).

Продолжая аналогично, получаем утверждение теоремы.

Неравенство (2) и теорема дают двустороннюю оценку для цены игры.

Замечания. 1°. Оценка получится тем точнее, чем шире удастся выбрать множества I_i (ω). Наиболее грубая оценка получится, если взять $I_i(\omega) \equiv [t_i, t_i]$. Тогда

$$\varepsilon(t_0, x_0) \leqslant \varepsilon_\Delta^\circ(x_0) + \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta_i(\tau, t_i)\, d\tau$$

Отметим, что если диаметр разбиения $\Delta \to 0$, то оценка, даваемая теоремой, стремится к $\varepsilon(t_0, x_0)$.

2°. Функции d_i неубывающие, поэтому для получения оценки сверху можно их вычислять не точно, а с завышением.

Для иллюстрации того, что оценка погрешности не завышена, рассмотрим известный пример (см. [3]).

Пусть игра имеет вид

$$\dot{x} = u + v, \quad x \in R^2, \quad t \in [0, 1], \quad g(x) = \|x\|$$

$$P(t) = \{u: \|u\| \leqslant 2(1 - t)\}, \quad Q(t) = \{v: \|v\| \leqslant 1\}$$

Пусть $\Delta = \{0, 1\}$, т. е. $N = 1$. Тогда $\varepsilon_\Delta^\circ(x)$ — просто программный максимин позиции $(0, x)$ и $\varepsilon_\Delta^\circ(x) = \|x\|$. Здесь можно положить $I_0(\omega) = [0, 1]$, если $\omega \geqslant 1/4$, и $I_0(\omega) = [0, 1/2 - \sqrt{1/4 - \omega}]$, если $\omega < 1/4$. Отсюда $d_0(\omega) = \omega$ $(= 1/4)$, если $\omega \geqslant 1/4$ $(< 1/4)$. Утверждение теоремы дает, что $\varepsilon(0, x) \leqslant \max(1/4, \varepsilon_\Delta^\circ(x) = \|x\|)$. Возьмем разбиение $\Delta_1 = \{0, 1/2, 1\}$. Тогда $\varepsilon(0, x) \geqslant \varepsilon_{\Delta_1}^\circ(x) = \max(1/4, \|x\|)$. Таким образом, $\varepsilon(0, x) = d_0(\varepsilon_\Delta^\circ(x))$.

Поступила 12 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
2. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени. Матем. сб., 1976, т. 99, № 3.
3. *Красовский Н. Н.*, *Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
4. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
5. *Пшеничный Б. Н.*, *Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
6. *Красовский Н. Н.* К задаче унификации дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.