Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.38

# К УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТРЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ

**А. Н. Чудненко**

(Донецк)

Исследуется устойчивость равномерных вращений твердого тела с неподвижной точкой вокруг главной оси, несущей центр масс, в случае, когда момент инерции относительно оси вращения равен одному из двух других главных моментов инерции. Изученные движения соответствуют границе области выполнения необходимых условий устойчивости и кривой, на которой обращается в нуль детерминант Арнольда — Мозера.

**1. Об устойчивости стационарных движений гамильтоновых систем.** Рассмотрим стационарные движения автономной гамильтоновой системы с $m+2$ степенями свободы и $m$ циклическими координатами.

В последние годы доказаны теоремы [1, 2], распространяющие на такие движения ряд результатов, полученных при исследовании положения равновесия двумерных гамильтоновых систем [3, 4]. Необходимость проведения соответствующих доказательств вызвана наличием дополнительных трудностей, обусловленных зависимостью гамильтониана от циклических постоянных. На этом основании приведенная ниже теорема 1 дана с доказательством, хотя аналогичные утверждения (без доказательств) и высказывались в некоторых работах, например [5, 6].

Пусть изучаемое стационарное движение соответствует точке $P$ с координатами

$$p_j = 0,\quad q_j = 0 \quad (j = 1, 2),\quad p_{2+n} = c_n^\circ \quad (n = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

и гамильтониан $H$ — аналитическая функция своих переменных в этой точке. Если квадратичная часть гамильтониана $H_{c^\circ}$ приведенной системы — знакоопределенная функция своих переменных, то из теоремы Рауса с добавлением Ляпунова следует устойчивость стационарного движения (1.1) по Ляпунову. Пусть $H_{c^\circ}$ не является знакоопределенной функцией своих переменных. Имеет место следующая теорема об эквивалентности устойчивости стационарного движения (1.1) и положения равновесия приведенной системы с гамильтонианом $H_{c^\circ}$.

*Теорема 1.* Пусть в точке $P$ собственные числа линеаризованной приведенной системы чисто мнимые: $\pm i\alpha_1(c^\circ)$, $\pm i\alpha_2(c^\circ)$ и частоты не связаны резонансным соотношением первого порядка: $k_1\alpha_1(c^\circ) + k_2\alpha_2(c^\circ) \neq 0$, $|k_1| + |k_2| = 1$ ($k_1, k_2$ — целые числа). Тогда из устойчивости по Ляпунову положения равновесия приведенной системы, доказанной путем редукции с применением теоремы Мозера об отображениях, следует устойчивость по Ляпунову стационарного движения (1.1).

*Доказательство.* Так как гамильтониан $H$ удовлетворяет условиям леммы 1.1 работы [7], то для каждого $c$ из некоторой окрестности точки $c^\circ$ стационарному движению соответствует точка покоя приведенной системы, а гамильтониан $H_c$ приведенной системы — аналитическая функция циклических постоянных в точке $c^\circ$ и может быть представлен в виде ряда

$$H_c = H_2 + H_3 + \ldots + H_m + \ldots \tag{1.2}$$

$$H_m = \sum_{\nu=m} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} q_2^{\nu_4} \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4)$$

коэффициенты которого $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(c)$ — аналитические функции $c$ в точке $c^\circ$.

Для доказательства теоремы необходимо исследовать возмущенные движения

$$p_j = \varepsilon p_j', \quad q_j = \varepsilon q_j' \quad (j = 1, 2), \quad c_n = c_n^\circ + \delta c_n' \quad (n = 1, \ldots, m), \quad |c'| \leqslant 1 \tag{1.3}$$

где $|x|$ — евклидова норма вектора $x$, $\delta = \varepsilon^k$ (обычно полагают $k = 1$). Выбор соответствующего значения $k$ (достаточно малой окрестности точки $c^\circ$) позволяет преодолеть затруднения, вызванные зависимостью коэффициентов гамильтониана приведенной системы от циклических постоянных. Если вопрос об устойчивости положения равновесия приведенной системы с гамильтонианом $H_{c^\circ}$ решается путем редукции (исследование сводится к системе с одной степенью свободы, но неавтономной (см., например, [3, 8])) формами до порядка $2 + \alpha$ включительно в разложении (1.2), то выбираем $k = \alpha + 1$. Тогда, представляя степенными рядами аналитические в точке $c^\circ$ функции $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(c)$, с учетом замены переменных (1.3), преобразуем гамильтониан (1.2) к виду

$$H_c = H_c^\circ(p_j', q_j', \varepsilon) + H_c^1(p_j', q_j', c_n', \varepsilon) \quad (j = 1, 2;\ n = 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

$$H_c^\circ = \sum_{i=2}^{2+\alpha} \sum_{\nu=i} \varepsilon^{i-2} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(c^\circ)\, p_1'^{\nu_1} p_2'^{\nu_2} q_1'^{\nu_3} q_2'^{\nu_4} \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4)$$

Здесь $H_c^\circ$ — невозмущенная часть гамильтониана, а возмущающая часть $H_c^1 = O(\varepsilon^{\alpha+1})$ равномерно ограничена по $c'$ для всех $|c'| \leqslant 1$. Заметим, что невозмущенная часть гамильтониана (1.4) не зависит от $c'$, и, следовательно, $H_c^\circ = H_{c^\circ}^\circ$. Нормализуя невозмущенную часть гамильтониана (1.4) и используя интеграл $H_c = h$, осуществляем на нулевом изоэнергетическом уровне редукцию к одномерной системе, гамильтониан которой примет вид

$$K = (r\varepsilon)^\alpha \Phi(\varphi) + K^*(t, r, \varphi, c_n', \varepsilon) \quad (n = 1, \ldots, m)$$

где функции $\Phi$ и $K^* = O(\varepsilon^{\alpha+1})$ $\tau$-периодичны по $\varphi$, $K^*$ $2\pi$-периодична по $t$ и равномерно ограничена по $c'$ для всех $|c'| \leqslant 1$. Здесь $r$, $\varphi$ — импульс и координата одномерной системы, $t$ — переменная, играющая роль времени. Дальнейшее доказательство совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 2.1 работы [8]. Применяя к редуцированной одномерной системе теорему Мозера об отображениях [3], получаем, что из устойчивости по Ляпунову положения равновесия приведенной системы с гамильтонианом $H_{c^\circ}$ следует устойчивость стационарного движения (1.1).

*Замечания.* 1°. Доказав каким-либо образом неустойчивость точки покоя системы с гамильтонианом $H_{c^\circ}$, тем самым доказываем и неустойчивость стационарного движения (1.1).

2°. Требование аналитичности гамильтониана $H$ в точке $P$ можно заменить условием существования в этой точке частных производных порядка $\alpha + 8$ по всем аргументам.

Это следует из работы [9], в которой требование аналитичности отображения в теореме Мозера заменено условием существования непрерывных частных производных пятого порядка по всем аргументам, что выполнено, если функция $H$ имеет в точке $P$ непрерывные частные производные порядка $\alpha + 8$ по всем аргументам. Последнего достаточно и для получения равномерных оценок сверху фигурирующих в доказательстве теоремы остаточных членов относительно $c'$.

Условия устойчивости положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при отсутствии резонансов до порядка $2n$ включительно [10], при резонансах $\alpha_1 = 3\alpha_2$, $\alpha_1 = 2\alpha_2$ [4,11], $\alpha_1 = \alpha_2$ и элементарные делители просты [12] получены именно путем редукции с последующим применением к редуцированной системе теоремы Мозера об отображениях. Поэтому, согласно теореме 1, они остаются справедливыми и для стационарных движений автономной гамильтоновой системы, приведенная система которой двумерна. При отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно и в случае резонанса четвертого порядка этот результат получен в работах [1,2]. В случае равных частот $\alpha_1 = \alpha_2$ и непростых элементарных делителей в работе [13] получены условия устойчивости положения равновесия автономной двумерной гамильтоновой системы без перехода к редуцированной системе. Но и в данном случае результат может быть получен путем сведения системы к одномерной с последующим применением теоремы Мозера об отображениях [14] и, следовательно, переносится на стационарные движения.

**2. Устойчивость равномерных вращений. Постановка задачи.** Опишем движение тяжелого твердого тела, центр масс которого лежит на главной оси, уравнениями Гамильтона. Направляя оси связанной с телом системы координат по главным осям эллипсоида инерции и вводя обычным образом углы Эйлера, запишем выражение для гамильтониана в предположении, что центр масс лежит на первой главной оси

$$H = \frac{1}{2A_1A_2\sin^2\vartheta}\{A_1[p_\vartheta^2\sin^2\vartheta + (p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)^2] + (A_2 - A_1) \times$$
$$\times [p_\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi + (p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)\sin\varphi]^2\} + \frac{p_\varphi^2}{2A_3} + \Gamma e\sin\vartheta\sin\varphi$$

Здесь $A_1$, $A_2$, $A_3$ — главные моменты инерции тела для неподвижной точки; $\Gamma$ — произведение веса тела на расстояние до центра масс; $e = 1$, если центр масс лежит выше точки опоры, и $e = -1$ в противном случае.

Равномерные вращения вокруг первой главной оси с угловой скоростью $\omega$ определяются следующими значениями переменных:

$$p_\vartheta = 0,\quad p_\varphi = 0,\quad p_\psi = \omega A_1,\quad \vartheta = \pi/2,\quad \varphi = \pi/2,\quad \varphi = \omega t + \psi_0 \tag{2.1}$$

Необходимые условия устойчивости равномерных вращений (2.1) получены и детально проанализированы в работе [15]. Достаточные условия устойчивости указаны в работе [16]. В случае равенства главных моментов инерции тела $A_1 = A_2$ при $e = -1$ необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными. Рассмотрим устойчивость равномерных вращений (2.1) в случае $A_1 = A_2$ при $e = 1$.

Используя интеграл $p_\psi = \mathrm{const}$, перейдем к приведенной системе с двумя степенями свободы. Полагая в возмущенном движении

$$p_\vartheta = x_1', \quad p_\varphi = x_2', \quad \vartheta = \pi/2 + y_1', \quad \varphi = \pi/2 + y_2'$$

найдем разложение гамильтониана приведенной системы в окрестности ее положения равновесия с точностью до членов шестого порядка относительно $x_1'$, $x_2'$, $y_1'$, $y_2'$. После перехода к безразмерному времени $\tau$ и безразмерным переменным $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ по формулам

$$\tau = t\sqrt{\Gamma / A_1}, \quad x_j' = \sqrt{\Gamma A_1}x_j, \quad y_j' = y_j \quad (j = 1, 2)$$

разложение гамильтониана приведенной системы примет вид

$$H = H_2 + H_4 + H_6 + \ldots \tag{2.2}$$

$$H_m = \sum_{\nu=m} K_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} y_1^{\nu_3} y_2^{\nu_4} \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{b}{2}x_2^2 + \mu x_2 y_1 + \frac{1}{2}(\mu^2 - 1)y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$$

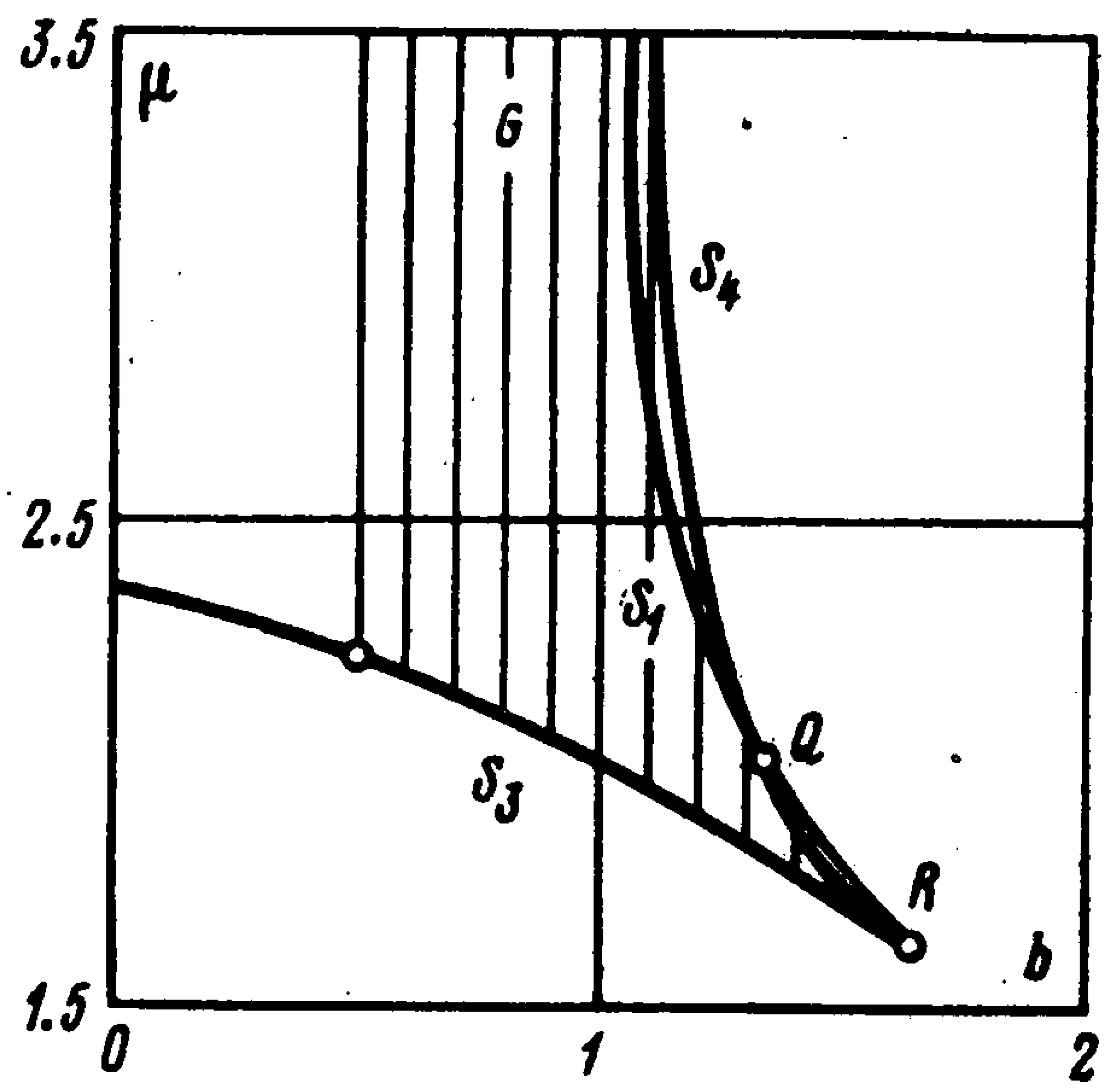
$$H_4 = \frac{1}{2}x_2^2 y_1^2 + \frac{5}{6}\mu x_2 y_1^3 + \frac{8\mu^2 + 1}{24}y_1^4 + \frac{1}{4}y_1^2 y_2^2 + \frac{1}{24}y_2^4$$

$$H_6 = \frac{1}{3}x_2^2 y_1^4 + \frac{61}{120}\mu x_2 y_1^5 + \frac{136\mu^2 - 1}{720}y_1^6 - \frac{1}{48}y_1^2 y_2^2(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{720}y_2^6$$

$$b = A_1 / A_3, \quad \mu = \omega\sqrt{A_1/\Gamma} = p_\psi / \sqrt{\Gamma A_1}$$

Неравенства треугольника для моментов инерции выделяют в плоскости $Ob\mu$ область $C\ (-\infty < \mu < +\infty,\ ^1/_2 < b < +\infty)$ допустимых значений безразмерных параметров.

В рассматриваемом случае имеется лишь интеграл энергии $H = \mathrm{const}$ и функция $H^2$ знакопостоянная, поэтому невозможно указать достаточные условия устойчивости построением функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения [17]. В работах [1,2] показано, что в подобласти $G$ $(3 - b + 2\sqrt{2 - b} < \mu^2 < b/(b-1);\ ^1/_2 < b < (\sqrt{5}+1)/2)$ области $C$, в которой выполнены только необходимые условия устойчивости, равномерные вращения (2.1) устойчивы всюду, за исключением кривой $S_1$ (фигура), в точках которой обращается в нуль детерминант Арнольда — Мозера [3]. (Все построения на фигуре проведены для $\mu > 0$, поскольку графики для $\mu < 0$ симметричны указанным относительно оси $Ob$.) В работе [18] изучались равномерные вращения, соответствующие точкам граничной кривой $S_4$ $(\mu = \sqrt{b/(b-1)};\ 1 < b < (\sqrt{5}+1)/2)$ области $G$. Показано, что равномерные вращения, соответствующие точкам этой кривой для $^4/_3 < b < (\sqrt{5}+1)/2$ (кривая $RQ$), неустойчивы, а для $1 < b < ^4/_3$



устойчивы при фиксированных значениях угловой скорости. Таким образом, кроме равномерных вращений, соответствующих точкам кривой $S_1$, неисследованными остались только равномерные вращения, соответствующие точке $Q$ ($\mu = 2$; $b = 4/3$) граничной кривой $S_4$ и точкам граничной кривой $S_3$ ($\mu = [3 - b + 2(2 - b)^{1/2}]^{1/2}$; $1/2 < b < (\sqrt{5} + 1) / 2$) области $G$. Изучение устойчивости этих равномерных вращений завершает анализ задачи об устойчивости равномерных вращений (2.1) в случае равенства главных моментов инерции тела $A_1 = A_2$.

Для решения вопроса об устойчивости на детерминантной кривой и в точке $Q$ граничной кривой $S_4$ необходимо провести нормализацию гамильтониана до членов выше четвертого порядка, так как члены до четвертого порядка включительно вопроса об устойчивости не решают [1,18].

**3. Исследование устойчивости равномерных вращений, соответствующих точкам детерминатной кривой $S_1$.** Вычисляя частоты линеаризованной системы (2.2)

$$\alpha_{1,2} = [1/2\,(Q_1 \mp D^{1/2})]^{1/2}$$
$$(Q_1 = \mu^2 - b - 1, \quad D = \mu^4 + 2\mu^2(b-3) + (b-1)^2)$$

запишем каноническое преобразование, нормализующее квадратичную часть гамильтониана [1]

$$x_1 = \alpha_1 s_1 q_1 - \alpha_2 s_2 q_2, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}(\alpha_2 s_2 p_1 + \alpha_1 s_1 p_2)$$
$$y_1 = -s_1 p_1 - s_2 p_2, \quad y_2 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,(-s_2 q_1 + s_1 q_2)$$
$$s_1 = k\sqrt{\alpha_2(\alpha_1^2 + b)}, \quad s_2 = k\sqrt{\alpha_1(\alpha_2^2 + b)}$$

Здесь $p_j$, $q_j$ ($j = 1, 2$) — новые переменные, $k$ — произвольная постоянная. Валентность преобразования $c = k^2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$. Это преобразование, невырожденное в области $G$, приводит гамильтониан (2.2) к виду (представление для $H_m$ см. в (1.2))

$$H = \frac{\alpha_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{\alpha_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) + H_4 + H_6 + \ldots \tag{3.1}$$

Выпишем отличные от нуля коэффициенты формы четвертого и необходимые для исследования коэффициенты формы шестого порядков (ниже приведена часть из них; для получения коэффициентов $h_{\nu_2\nu_1\nu_4\nu_3}$ из выражений для $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ необходимо поменять местами $\alpha_1$ и $\alpha_2$)

$$24ch_{4000} = k^4\alpha_2^2\,[(8\mu^2 + 1)(\alpha_1^2 + b)^2 + 12\mu^2 - 20\mu^2(\alpha_1^2 + b)]$$
$$6ch_{3100} = k^4\mu\alpha_2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,[(8\mu^2 + 1)(\alpha_1^2 + b) + 6(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2b) - 5(\alpha_1^2 + b)(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4b)]$$
$$4ch_{2200} = k^4\alpha_1\alpha_2\,\{\mu^2(8\mu^2 + 1) + 2\,[(\alpha_1^2 + b)^2 + (\alpha_2^2 + b)^2 + 4\mu^2] - 10\mu^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2b)\}$$
$$24ch_{0040} = k^4\alpha_1^4\alpha_2^2(\alpha_2^2 + b)^2, \quad 6ch_{0031} = -k^4\mu\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,\alpha_1^3\alpha_2^2(\alpha_2^2 + b)$$
$$4ch_{0022} = k^4\mu^2\alpha_1^3\alpha_2^3, \quad 2ch_{2011} = -k^4\mu\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^2 + b)$$
$$4ch_{2002} = k^4\alpha_1\alpha_2^3(\alpha_1^2 + b)^2, \quad 2ch_{1120} = k^4\mu\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_2^2 + b)$$

$$4ch_{2020} = -ch_{1111} = k^4\mu^2\alpha_1^2\alpha_2^2$$

$$720ch_{6000} = k^6\alpha_2^3(\alpha_1^2 + b)[(136\mu^2 - 1)(\alpha_1^2 + b)^2 + 240\mu^2 - 366\mu^2(\alpha_1^2 + b)]$$

$$720ch_{0060} = -k^6\alpha_1^6\alpha_2^3(\alpha_2^2 + b)^3, \quad 48ch_{4020} = -k^6\mu^2\alpha_1^2\alpha_2^3(\alpha_1^2 + b)$$

$$48ch_{2040} = -k^6\mu^2\alpha_1^4\alpha_2^3(\alpha_2^2 + b), \quad 8ch_{2220} = -k^6\mu^2\alpha_1^3\alpha_2^2(\alpha_2^2 + b)$$

$$8ch_{2022} = -k^6\mu^2\alpha_1^3\alpha_2^4(\alpha_1^2 + b), \quad 48ch_{4200} = k^6\alpha_1\alpha_2^2\{\mu^2(136\mu^2 - 1)(\alpha_1^2 + b) + 16[6\mu^2(\alpha_2^2 + b) + 8\mu^2(\alpha_1^2 + b) + (\alpha_1^2 + b)^3] - 122\mu^2[2\mu^2 + (\alpha_1^2 + b)^2]\}$$

$$48ch_{4002} = -k^6\alpha_1\alpha_2^4(\alpha_1^2 + b)^3, \quad 48ch_{0240} = -k^6\alpha_1^5\alpha_2^2(\alpha_2^2 + b)^3$$

$$48ch_{0042} = -k^6\mu^2\alpha_1^5\alpha_2^4(\alpha_2^2 + b).$$

В точках кривой $S_1$ частоты $\alpha_1$, $\alpha_2$ линеаризованной системы не связаны резонансными соотношениями до шестого порядка включительно. В точках этой кривой с помощью преобразования Бирктофа приведем гамильтониан (3.1) к нормальному виду, ограничиваясь членами шестого порядка. Так как в исходной задаче в разложении гамильтониана отсутствуют формы нечетного порядка, то при нормализации $H_4$ не появляются члены пятого порядка, а коэффициенты формы $H_6$ изменяются. Поэтому нормализацию проводим в два этапа: сначала нормализуем $H_4$ и вычисляем измененные коэффициенты формы $H_6$, а затем нормализуем $H_6$. Получаем

$$H = \frac{\alpha_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{\alpha_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \sum_{i+j=2}^{3} c_{ij}(p_1^2 + q_1^2)^i(p_2^2 + q_2^2)^j + \ldots$$

Коэффициенты $c_{20}$, $c_{11}$, $c_{02}$ формы четвертого порядка найдены в работе [1]. Запишем их в следующем виде:

$$c_{20} = \frac{1}{8}(3h_{4000} + 3h_{0040} + h_{2020}),$$

$$c_{11} = \frac{1}{4}(h_{2200} + h_{2002} + h_{0220} + h_{0022})$$

Вводя обозначения $f_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} + h_{\nu_3\nu_4\nu_1\nu_2}$, $g_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} - h_{\nu_3\nu_4\nu_1\nu_2}$, для коэффициентов нормальной формы шестого порядка получаем

$$c_{30} = \frac{1}{16}(5f_{6000} + f_{4020}) - \frac{1}{32\alpha_1}[g_{3010}^2 + 4f_{3010}^2 + 16g_{4000}^2 + (f_{4000} - h_{2020})^2] + \frac{1}{128}\left(\frac{u_1}{3\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{v_1}{3\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{u_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{v_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)$$

$$c_{21} = \frac{1}{16}(3f_{4200} + 3f_{4002} + f_{2220}) - \frac{3}{16\alpha_1}[f_{3010}f_{1210} + 2g_{4000}(g_{2200} + g_{2002})] + \frac{1}{16\alpha_2}(f_{2101}^2 + v_4^2) - \frac{9}{128}\left(\frac{u_1}{3\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{v_1}{3\alpha_1 - \alpha_2}\right) + \frac{1}{128(\alpha_1 + \alpha_2)}\{-3u_2 + 4u_3 + 2[(g_{1210} + g_{0121})^2 + (u_4 + h_{1111})^2]\} - \frac{1}{128(\alpha_1 - \alpha_2)}\{3v_2 + 4v_3 + 2[(g_{1210} - g_{0121})^2 + (u_4 - h_{1111})^2]\}$$

$$u_1 = (f_{3001} - f_{1021})^2 + (g_{3100} - g_{1120})^2$$
$$u_2 = (3f_{3100} + f_{1120})^2 + (3g_{3001} + g_{1021})^2$$
$$u_3 = (3f_{3100} + f_{1120})(3f_{1300} + f_{1102}) + (3g_{3001} + g_{1021})(3g_{1003} + g_{1201})$$
$$u_4 = f_{2200} - f_{2002}$$

Формулы для $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ находятся из выражений для $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ заменой $f_{v_1v_2v_3v_4}$ на $g_{v_1v_2v_3v_4}$ и наоборот.

Для получения коэффициентов $c_{02}$, $c_{03}$, $c_{12}$ из выражений для $c_{20}$, $c_{30}$, $c_{21}$ необходимо поменять местами $\alpha_1$ и $-\alpha_2$ и в коэффициентах $h_{v_1v_2v_3v_4}$ индексы: первый и второй, третий и четвертый.

Для изучения устойчивости равномерных вращений, соответствующих точкам кривой $S_1$, применим теорему 2.1, доказанную в работе [10] и распространенную с помощью теоремы 1 на стационарные движения.

Детерминантная кривая $S_1$ определяется уравнением

$$D_2 = c_{20}\alpha_2^2 + c_{11}\alpha_2\alpha_1 + c_{02}\alpha_1^2 = 0$$

Равномерные вращения, соответствующие точкам кривой $S_1$, для которых

$$D_3 = c_{30}\alpha_2^3 + c_{21}\alpha_2^2\alpha_1 + c_{12}\alpha_2\alpha_1^2 + c_{03}\alpha_1^3 \neq 0$$

устойчивы. Выражение для $D_3$ ($\mu$, $b$) ввиду его громоздкости выписывать не будем. Анализ уравнения $D_3 = 0$ был проведен на ЭВМ и показал, что кривые, определяемые этим уравнением, в области $G$ не пересекаются с кривой $S_1$ (аналитически установлено, что пересечение имеет место только в точках $R$, $Q$ границы области $G$). Следовательно, равномерные вращения, соответствующие точкам кривой $S_1$ из области $G$, устойчивы.

**4. Устойчивость равномерных вращений, соответствующих резонансу второго порядка.** На граничной кривой $S_3$ частоты $\alpha_1$, $\alpha_2$ линеаризованной в окрестности изучаемых движений системы связаны резонансным соотношением второго порядка: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \neq 0$. Линейное каноническое преобразование

$$x_1 = \frac{\mu}{2}(K_1p_1 - q_2), \quad x_2 = \frac{\mu}{2\alpha}(K_1p_2 - q_1)$$
$$y_1 = \frac{\mu}{2\alpha}(q_1 - K_2p_2), \quad y_2 = \frac{\mu}{2}(q_2 - K_2p_1)$$
$$K_1 = \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{\mu}, \quad K_2 = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha}{\mu}, \quad \alpha = \sqrt{\mu^2 - \mu - 1}$$

валентности $c = 2 / \mu$ с последующей нормализацией формы четвертого порядка приводит гамильтониан (2.2) к виду

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \alpha(q_1p_2 - q_2p_1) + (q_1^2 + q_2^2)[A(q_1^2 + q_2^2) + B(q_1p_2 - q_2p_1) + C(p_1^2 + p_2^2)] + \ldots$$

Воспользуемся результатами работ [13,14], распространенными с помощью теоремы 1 на стационарные движения. Так как в каждой точке кривой $S_3$

$$A = \frac{\mu^4 - 2\mu^3 + 9\mu^2 - 20\mu + 12}{64\alpha^4c^3} > 0$$

заключаем, что равномерные вращения, соответствующие точкам кривой $S_3$, устойчивы.

**5. Устойчивость равномерных вращений, соответствующих точке $Q$.** На граничной кривой $S_4$ имеет место резонанс первого порядка (одна частота нулевая). В этом случае найденное в работе [18] линейное каноническое преобразование

$$x_1=\frac{1}{\alpha^2}[-\mu p_1+\sqrt{\alpha}(\mu^2-1)p_2],\quad x_2=\frac{1}{\alpha^2}\left[(\mu^2-1)q_1+\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}}q_2\right]$$
$$y_1=-\frac{1}{\alpha^2}\left[\mu q_1+\frac{\mu^3-1}{\sqrt{\alpha}}q_2\right],\quad y_2=\frac{1}{\alpha^2}[(\mu^2-1)p_1-\mu\sqrt{\alpha}p_2]$$
$$\alpha=\{[(\mu^2-1)^2-\mu^2]/(\mu^2-1)\}^{1/2}$$

валентности $c=-(\mu^2-1)/\alpha^2$ приводит гамильтониан (2.2) к виду (представление для $H_m$ см. в (1.2))

$$H=\frac{1}{2}p_1^2-\frac{\alpha}{2}(p_2^2+q_2^2)+H_4+H_6+\ldots \tag{5.1}$$

Выпишем необходимые для исследования устойчивости коэффициенты форм четвертого и шестого порядков

$$h_{0040}=\frac{\mu^2(\mu^2-4)}{8\alpha^6(\mu^2-1)},\quad h_{1030}=0,\quad h_{0130}=0,\quad h_{0031}=\frac{\mu(\mu^6-6\mu^4+4\mu^2+6)}{6\alpha^6\sqrt{\alpha}(\mu^2-1)}$$
$$h_{0060}=-\frac{\mu^4(2\mu^4-23\mu^2+48)}{144\alpha^{10}(\mu^2-1)}$$

Нормализуя с помощью преобразования Биркгофа формы четвертого и шестого порядков в разложении (5.1), найдем

$$H=\frac{1}{2}p_1^2-\frac{\alpha}{2}(p_2^2+q_2^2)+l_{40}q_1^4+l_{22}q_1^2(p_2^2+q_2^2)+$$
$$+l_{04}(p_2^2+q_2^2)^2+l_{60}q_1^6+l_{42}q_1^4(p_2^2+q_2^2)+l_{24}q_1^2(p_2^2+q_2^2)^2+$$
$$+l_{06}(p_2^2+q_2^2)^3+\ldots$$

В точке $Q$ ($\mu=2,\ b={}^4/_3$)

$$l_{40}=h_{0040}=0$$
$$l_{60}=h_{0060}+\frac{4}{3}h_{0040}h_{2020}-\frac{1}{2}h_{1030}^2+\frac{1}{2\alpha}(h_{0130}^2+h_{0031}^2)=$$
$$=0.05184>0$$

Воспользовавшись теоремой 4.1 работы [8], заключаем, что равномерные вращения, соответствующие точке $Q$ граничной кривой $S_4$ области $G$, устойчивы при фиксированных значениях угловой скорости (циклической постоянной $p_\psi$).

Суммируя изложенное, сформулируем теорему.

*Теорема 2.* Пусть твердое тело, имеющее равные моменты инерции относительно первых двух осей, вращается равномерно вокруг первой оси, несущей центр масс, причем центр масс находится выше точки опоры. Такие равномерные вращения устойчивы всюду в области $G$ и на граничной кривой $S_3$, устойчивы при фиксированных значениях угловой скорости на части граничной кривой $S_4$ ($1<b\leqslant{}^4/_3$), неустойчивы на остальной части кривой $S_4$ (${}^4/_3<b<(\sqrt{5}+1)/2$).

Поступила 23 IV 1979

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ковалев А. М., Савченко А. Я.* Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
2. *Ковалев А. М., Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений гамильтоновых систем при наличии резонанса четвертого порядка. В сб.: Механика твердого тела. Вып. 9, Киев, «Наукова думка», 1977.
3. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.
4. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.
6. *Беликов С. А.* Об устойчивости равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси в ньютоновском поле сил. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон., 1978, № 19, вып. 4.
7. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев, «Наукова думка», 1977.
8. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
9. *Rüssmann H.* Über invariante Kurven differenzierbaren Abbildungen eines Kreisringes, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.— Phys. Kl., II, Kleine Nenner 1, 1970, N 5, s. 67—105.
10. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
11. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
12. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
13. *Ковалев А. М., Чудненко А. Н.* К устойчивости положения равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот. Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 11.
14. *Сокольский А. Г.* Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс. Письма в АЖ, 1978, т. 4, № 3.
15. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение. Т. 1—2. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
16. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
17. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
18. *Чудненко А. Н.* К устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии двойного нулевого корня. В сб.: Механика твердого тела. Вып. 10, Киев, «Наукова думка», 1978.