Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.381 : 534

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОГО МАЯТНИКА

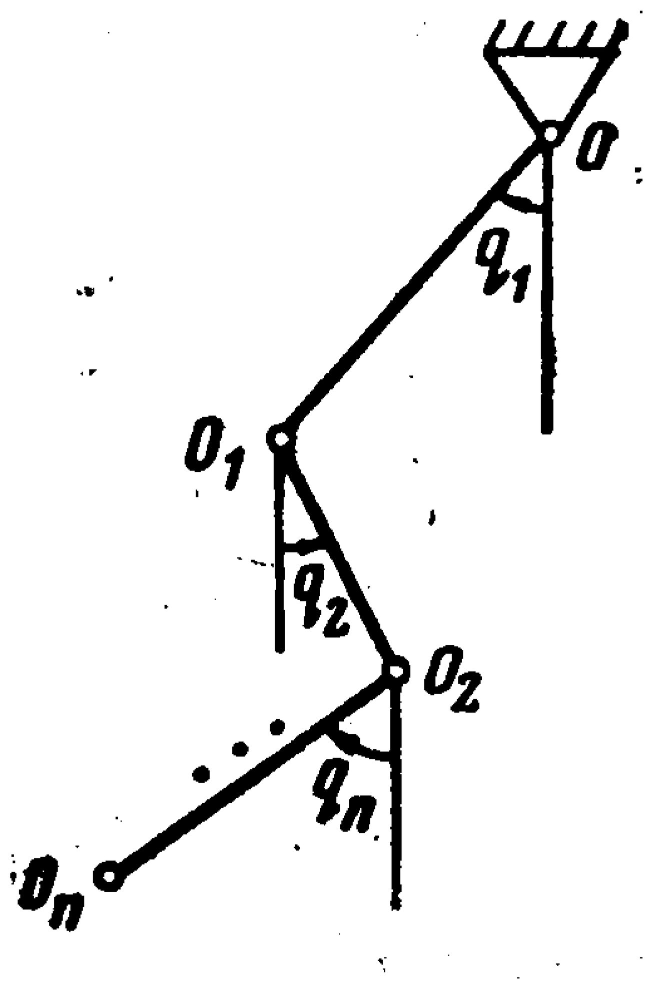
В. В. Козлов

(Москва)

С помощью принципа наименьшего действия в форме Якоби доказано существование периодических колебаний составного маятника, лежащих на некритических уровнях интеграла энергии (на которых нет положений равновесия). Получены оценки количества различных либрационных и вращательных периодических колебаний в зависимости от величины полной энергии.

В работах, посвященных колебаниям составного маятника, обычно исследуется устойчивость положений равновесия, а также существование и некоторые свойства периодических и асимптотических движений в окрестности этих положений (см., например, [1]). По-видимому, в книге [2] впервые встречается замечание о том, что с помощью методов теории Морса можно доказать бесконечность числа различных периодических движений составного маятника при достаточно больших фиксированных значениях постоянной энергии.

1. Введение. Составной маятник — механическая система, состоящая из n шарнирно скрепленных стержней и находящаяся в однородном поле сил тяжести (фиг. 1). На распределение масс стержней не накладывается никаких ограничений. Конфигурационным пространством этой системы служит n-мерный тор $\mathbf{T}^n$, а в качестве обобщенных координат можно взять углы $q_1, \ldots, q_n$, которые образуют стержни с вертикальной прямой. Конфигурационным пространством можно считать евклидово пространство $\mathbf{R}^n\{q_1, \ldots, q_n\}$, но при этом надо помнить, что точки в $\mathbf{R}^n$, q-координаты которых отличаются на 2π, отвечают одним и тем же положениям системы.



Фиг. 1

Кинетическая энергия

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) = \Sigma a_{ij}(\mathbf{q}) q_i^\cdot q_j^\cdot$$

— положительно-определенная симметричная форма. Ее коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ периодичны по переменным $q_1, \ldots, q_n$ с периодом 2π. Потенциал поля сил тяжести $V(q_1, \ldots, q_n)$ также является функцией, 2π-периодической по каждому аргументу.

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \qquad L = T + V \tag{1.1}$$

имеют первый интеграл — интеграл энергии $T - V = h$. Так как $T \geqslant 0$, то при фиксированном значении полной энергии h движение происходит в области $D = \{h + V(\mathbf{q}) \geqslant 0\}$, которая называется областью возможных движений. Границей ∂D области D служит множество $\{h + V(\mathbf{q}) = 0\}$.

Точки $\mathbf{q} = (m_1\pi, \ldots, m_n\pi)$ $(m_1, \ldots, m_n$ — целые числа) и только они являются критическими точками потенциала V. Все они изолированы и невырождены. Критическим точкам отвечают положения равновесия n-звенного маятника. Значения полной энергии, соответствующие этим частным решениям, назовем критическими. При некритических значениях h граница ∂D — гладкое $(n - 1)$-мерное многообразие.

Решение уравнений движения, лежащее на некритическом уровне интеграла энергии, будет периодическим тогда и только тогда, когда его траектория замкнута на $\mathbf{T}^n$. Как показано в работе [3], траектории периодических движений натуральных систем могут быть двух типов: они либо не пересекаются с границей ∂D, либо имеют с ней ровно две общие точки. Решения первого типа естественно назвать вращениями, второго — либрациями (подробности см. в [3]).

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим натуральную механическую систему, конфигурационное пространство которой $\mathbf{R}^n$ $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Пусть $T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ — кинетическая энергия, а V — потенциал силового поля.

Обозначим через Λ_a отражение $\mathbf{R}^n$ относительно некоторой точки $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$: $\mathbf{q} \mapsto -\mathbf{q} + 2\mathbf{a}$. Предположим, что система инвариантна относительно преобразования Λ_a, т. е. $T(\Lambda_a \mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) = T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$, $V(\Lambda_a \mathbf{q}) = V(\mathbf{q})$.

Лемма 1. Если траектория некоторого решения $\mathbf{q}(t)$ проходит через точку $\mathbf{a}$ $(\mathbf{q}(0) = \mathbf{a})$, то эта кривая инвариантна относительно отражения Λ_a (т. е. $\mathbf{q}(-t) = \Lambda_a \mathbf{q}(t) = -\mathbf{q}(t) + 2\mathbf{a}$). В частности, $\mathbf{q}^\cdot(-t) = \mathbf{q}^\cdot(t)$.

Доказательство. Так как кинетическая энергия T — квадратичная форма обобщенных скоростей и система инвариантна относительно отражения Λ_a, то функция $\mathbf{q}'(t) = -\mathbf{q}(t) + 2\mathbf{a}$ тоже является решением уравнений движения (1.1). Положим $\mathbf{q}''(t) = \mathbf{q}(-t)$. Поскольку $\mathbf{q}'(0) = \mathbf{q}''(0)$ и $\mathbf{q}'^\cdot(0) = \mathbf{q}''^\cdot(0)$, то по теореме единственности решений уравнений (1.1) $\mathbf{q}'(t) \equiv \mathbf{q}''(t)$ при всех $t \in \mathbf{R}$.

Лемма 2. Предположим, что рассматриваемая система инвариантна относительно отражения Λ_b $(\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{b})$. Если траектория некоторого решения $\mathbf{q}(t)$ проходит через точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то

1) существует $\tau > 0$ такое, что $\mathbf{q}(t + \tau) = \mathbf{q}(t) + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ для всех $t \in \mathbf{R}$;

2) скорость $\mathbf{q}^\cdot(t)$ никогда не равна нулю.

Доказательство. 1). Поскольку система инвариантна относительно преобразований Λ_a и Λ_b, то она инвариантна относительно их композиции $\Lambda = \Lambda_b\Lambda_a$: $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Следовательно, функция $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}(t) + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ — решение уравнений (1.1). Предположим для определенности, что $\mathbf{q}(0) = \mathbf{a}$. Согласно лемме 1, в некоторый момент времени τ функция $\mathbf{q}(\tau)$ равна $\mathbf{c} = \Lambda_b \mathbf{a} = \mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ и $\mathbf{q}^\cdot(0) = \mathbf{q}^\cdot(\tau)$. Поскольку система автономна, то функция $\mathbf{q}''(t) = \mathbf{q}(t + \tau)$ — тоже решение уравнений (1.1). Так как $\mathbf{q}'(0) = \mathbf{q}''(0)$ и $\mathbf{q}'^\cdot(0) = \mathbf{q}''^\cdot(0)$, то $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}''(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

2). Предположим, что $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{a}$, $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{b}$ и $t_2 > t_1$. Достаточно, очевидно, показать, что $\mathbf{q}^{\cdot}(t) \neq 0$ в интервале (t_1, t_2). Предположим противное, т. е. что в некоторый момент $\tau \in (t_1, t_2)$ скорость $\mathbf{q}^{\cdot}(\tau) = 0$. Так как система (1.1) обратима, то в последующие моменты времени точка $\mathbf{q}$ будет двигаться по той же траектории, но в обратную сторону (см., например, [1]). В этом случае, согласно лемме 1, решение $\mathbf{q}(t)$ будет либрацией, траектория которой не содержит точку $\mathbf{b}$. Но это противоречит предположениям леммы 2.

Согласно принципу наименьшего действия в форме Якоби, траектории решений уравнений (1.1) внутри области возможных движений D — геодезические линии метрики $d\rho = [h + V(\mathbf{q})]^{1/2}ds$, где ds — риманова метрика на $\mathbf{R}^n$, задающая кинетическую энергию (т. е. $T = (ds / dt)^2 / 2$). Расстоянием $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между точками $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ назовем нижнюю грань длин в метрике $d\rho$ кусочно-гладких кривых из области D с концами в точках $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Расстоянием от точки $\mathbf{a} \in D$ до границы ∂D назовем величину

$$\partial(\mathbf{a}) = \inf_{\mathbf{b} \in \partial D} d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

(подробности см. в работе [4]). Будем считать, что на границе ∂D нет положений равновесия рассматриваемой системы.

Лемма 3. Для любой точки $\mathbf{a}$ компактной области D существует решение $\mathbf{q}(t)$ уравнений (1.1), такое, что $\mathbf{q}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{q}(\tau) \in \partial D$, и длина несамопересекающейся кривой $\mathbf{q}(t)$, $t \in [0, \tau]$ равна в точности $\partial(\mathbf{a})$.

Лемма 4. Если $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \partial(\mathbf{a}) + \partial(\mathbf{b})$, то существует решение $\mathbf{q}(t)$ уравнений (1.1), такое, что $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{a}$, $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{b}$, и длина несамопересекающейся кривой $\mathbf{q}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ равна в точности $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Доказательство лемм 3 и 4 содержится в работе [4].

Из лемм 1 и 3 вытекает

Утверждение 1. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) область $D \in \mathbf{R}^n$ компактна;

2) на границе ∂D нет положений равновесия;

3) система инвариантна относительно отражения Λ_a $(\mathbf{a} \in D \setminus \partial D)$.

Тогда в области D существует либрация, траектория которой проходит через точку $\mathbf{a}$.

В качестве приложения рассмотрим задачу [5] о периодических колебаниях в не линейной системе, описываемой уравнениями

$$m_1 x^{\cdot\cdot} = f(x) - F(x - y), \quad m_2 y^{\cdot\cdot} = g(y) + F(x - y) \quad (m_1, m_2 > 0) \tag{2.1}$$

Функции f, g и F предполагаются нечетными.

Систему (2.1) можно записать в виде уравнений Лагранжа с лагранжианом

$$L = {}^1/_2 (m_1 x^{\cdot 2} + m_2 y^{\cdot 2}) + V(x, y)$$

$$V = \int f(x)\, dx + \int g(y)\, dy - \int F(x - y)\, d(x - y)$$

Периодические решения, проходящие через точку $x = y = 0$ и имеющие с границей области возможных движений две общие точки, названы [5] колебаниями нормального типа. Их существование установлено лишь в некоторых частных случаях, например, когда $m_1 = m_2$ и $f \equiv g$.

Можно проверить, что функция V инвариантна относительно отражения Λ_0 плоскости $\mathbf{R}^2$ $\{x, y\} : (x, y) \mapsto (-x, -y)$. Если множество $\{h + V \geqslant 0\}$ компактно, то, согласно утверждению 1, при некритических значениях полной энергии h всегда существуют колебания нормального типа (либрации) системы (2.1). Возможно, что в случае, когда область $\{h+V\geqslant 0\}$ гомеоморфна диску, таких колебаний по крайней мере два.

3. Периодические колебания n-звенного маятника. Положим

$$h^{-}=\min_{\mathbf{T}^n}V,\quad h^{+}=\max_{\mathbf{T}^n}V$$

Утверждение 2. Пусть h — некритическое значение из интервала (h^-, h^+). Через каждую критическую точку потенциала V, лежащую внутри области $\{h+V(\mathbf{q})\geqslant 0\}\subset \mathbf{T}^n$, проходит хотя бы одна траектория либрационного периодического решения. Причем решения, проходящие через разные критические точки, различны.

Следствие. Если h — некритическое значение из интервала (h^-, h^+), то количество различных либраций в области $D=\{h+V\geqslant 0\}$ не меньше числа критических точек внутри D.

Поскольку точка $\mathbf{q}=(0,\ldots,0)\in D$ для всех $h\geqslant h^-$, то при $h^-<h<h^+$ либрации n-звенного маятника всегда существуют. При значениях $h<h^+$ и достаточно близких к h^+ в области D различных либраций по крайней мере 2^n-1.

Замечание. Эти утверждения усиливают оценки числа различных либраций n-звенного маятника, полученные в работе [6].

Доказательство утверждения 2. Пусть $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ — критическая точка потенциала V. Можно показать, что кинетическая энергия $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ и потенциал $V(\mathbf{q})$ инвариантны относительно отражения Λ_a. Согласно лемме 3, точку $\mathbf{a}\in\{h+V\geqslant 0\}\subset\mathbf{T}^n$ можно соединить с некоторой точкой границы отрезком минимальной геодезической γ_a. Этой кривой отвечает геодезическая Γ_a метрики Якоби в области $\{h+V\geqslant 0\}\subset\mathbf{R}^n$, соединяющая точку $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ с некоторой точкой ∂D. Положим $\Gamma_a'=\Lambda_a\Gamma_a$. Согласно лемме 1, кривая $\Gamma=\Gamma_a\bigcup\Gamma_a'$ — траектория некоторой либрации в области $D\subset\mathbf{R}^n$. Кривой Γ естественным образом соответствует кривая γ на торе $\mathbf{T}^n$, которая является искомой либрацией, проходящей через точку $\mathbf{a}\in\mathbf{T}^n$. Либрации, проходящие через разные критические точки, различны, поскольку в противном случае (по лемме 2) скорость движения никогда в нуль не обращается.

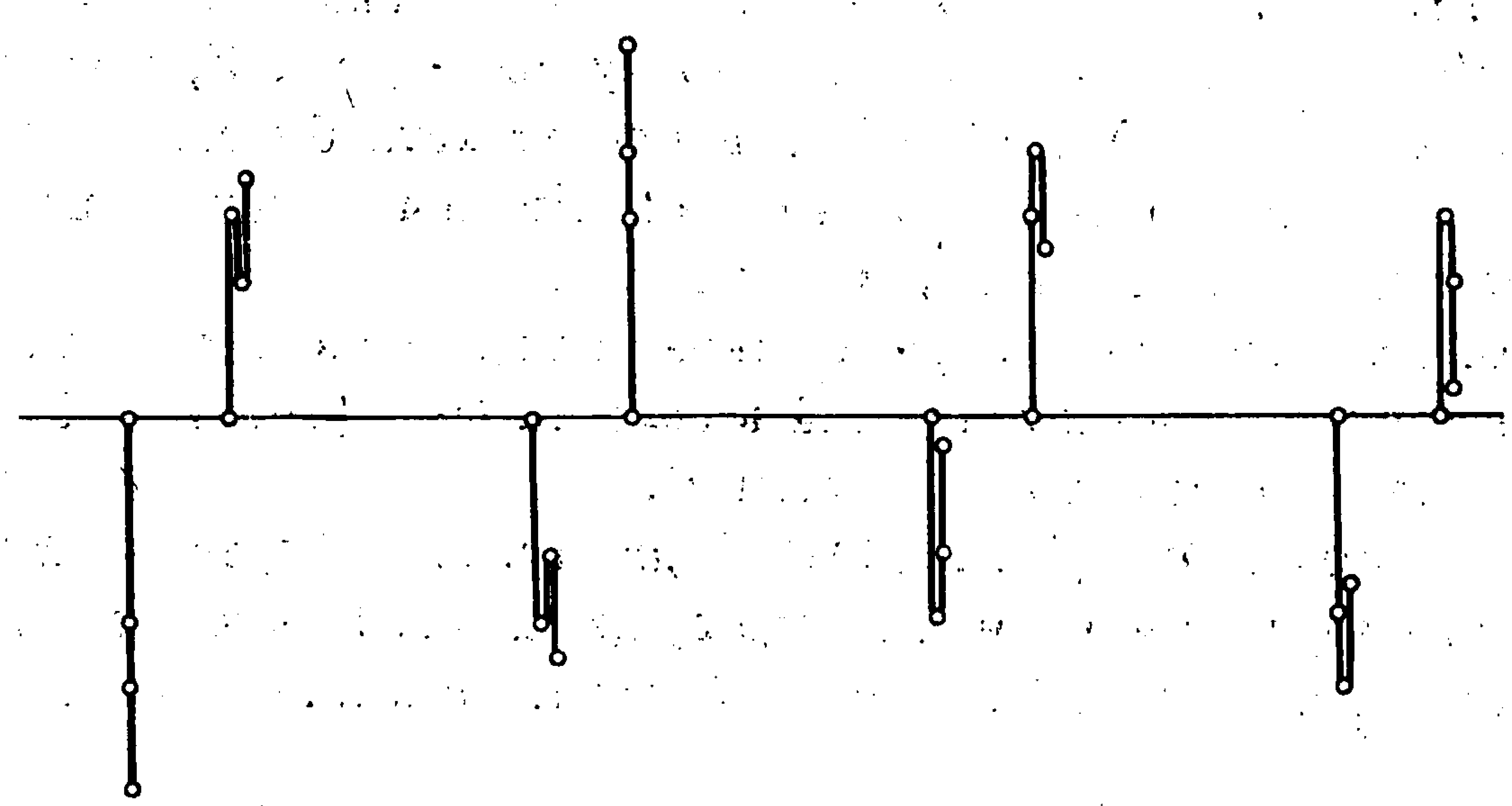
Рассмотрим случай, когда $h>h^+$. Так как в этом случае $\partial D=\varnothing$, то периодические движения могут быть только вращениями. Исследуем вопрос о существовании периодических вращений n-звенного маятника, при которых k-е звено за период вращения сделает N_k полных оборотов ($N_1,\ldots,N_n$ — фиксированные целые числа). Такие движения назовем вращениями, принадлежащими типу $[N_1,\ldots,N_n]$.

Утверждение 3. Для любых фиксированных целых чисел $N_1,\ldots,N_n$ и любого $h>h^+$ существует 2^{n-1} различных периодических вращений типа $[N_1,\ldots,N_n]$ с запасом полной энергии, равным h, траектории которых на $\mathbf{T}^n$ проходят через пары критических точек потенциала V.

Доказательство. Предположим сначала, что числа $N_1,\ldots,N_n$ взаимно просты. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n$ пару критических точек $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}''$ потенциала V, q_k-координаты которых различаются на πN_k. Эти точки, рассматриваемые как точки на $\mathbf{T}^n$, различны. Пусть, например

$$\mathbf{a}' = (m_1'\pi, \ldots, m_n'\pi), \quad \mathbf{a}'' = (m_1''\pi, \ldots, m_n''\pi)$$

Если $h > h^+$, то риманово пространство $(\mathbf{R}^n, d\rho)$ полно [7] и, следовательно, по теореме Хопфа—Ринова, точки $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}''$ можно соединить кратчайшей геодезической. Этой кривой соответствует решение $\mathbf{q}(t)$ уравнений (1.1), такое, что $\mathbf{q}(t') = \mathbf{a}'$, $\mathbf{q}(t'') = \mathbf{a}''$ $(t'' > t')$. Поскольку задача



Фиг. 2

инвариантна относительно отражений $\Lambda_{a'}$ и $\Lambda_{a''}$, то по лемме 2 существует число $\tau > 0$, такое, что

$$\mathbf{q}(t + \tau) - \mathbf{q}(t) = 2(\mathbf{a}'' - \mathbf{a}') = (2N_1\pi, \ldots, 2N_n\pi)$$
$$N_1 = m_1'' - m_1', \ldots, N_n = m_n'' - m_n'$$

Следовательно, траектория соответствующего решения на торе $\mathbf{T}^n$ замкнута, и это решение — периодическое вращение типа $[N_1, \ldots, N_n]$ с периодом τ. Поскольку числа $N_1, \ldots, N_n$ взаимно просты, то τ — наименьший период решения $\mathbf{q}(t)$ и остальные периоды ему кратны.

Предположим, что найденное решение $\mathbf{q}(t)$ проходит через критическую точку $\mathbf{c}$. Тогда, согласно лемме 2, существуют τ' и τ'', такие, что

$$\mathbf{q}(t + \tau') - \mathbf{q}(t) = 2(\mathbf{c} - \mathbf{a}'), \quad \mathbf{q}(t + \tau'') - \mathbf{q}(t) = 2(\mathbf{c} - \mathbf{a}'')$$

для всех $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, τ' и τ'' — периоды этого решения, кратные τ, причем $\tau' - \tau'' = \tau$. Отсюда вытекает существование целого числа p, такого, что $\mathbf{c} - \mathbf{a}' = (pN_1\pi, \ldots, pN_n\pi)$. Тогда $\mathbf{c} - \mathbf{a}'' = ((p-1)N_1\pi, \ldots, (p-1)N_n\pi)$. Значит, точка $\mathbf{c}$, рассматриваемая как точка n-мерного тора $\mathbf{T}^n$, совпадает с одной из точек $\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbf{T}^n$.

Итак, все критические точки потенциала V, лежащие на $\mathbf{T}^n$, разбиваются на пары, через которые проходят траектории периодических вращений типа $[N_1, \ldots, N_n]$, причем эти траектории не содержат критических точек из других пар. Поскольку общее число критических точек равно 2^n, то количество различных вращений маятника, принадлежащих данному типу, — 2^{n-1}.

Предположим теперь, что числа $N_1, \ldots, N_n$ не взаимно просты и $p > 1$ — их наибольший общий делитель. Положим $N_1 = pN_1', \ldots$

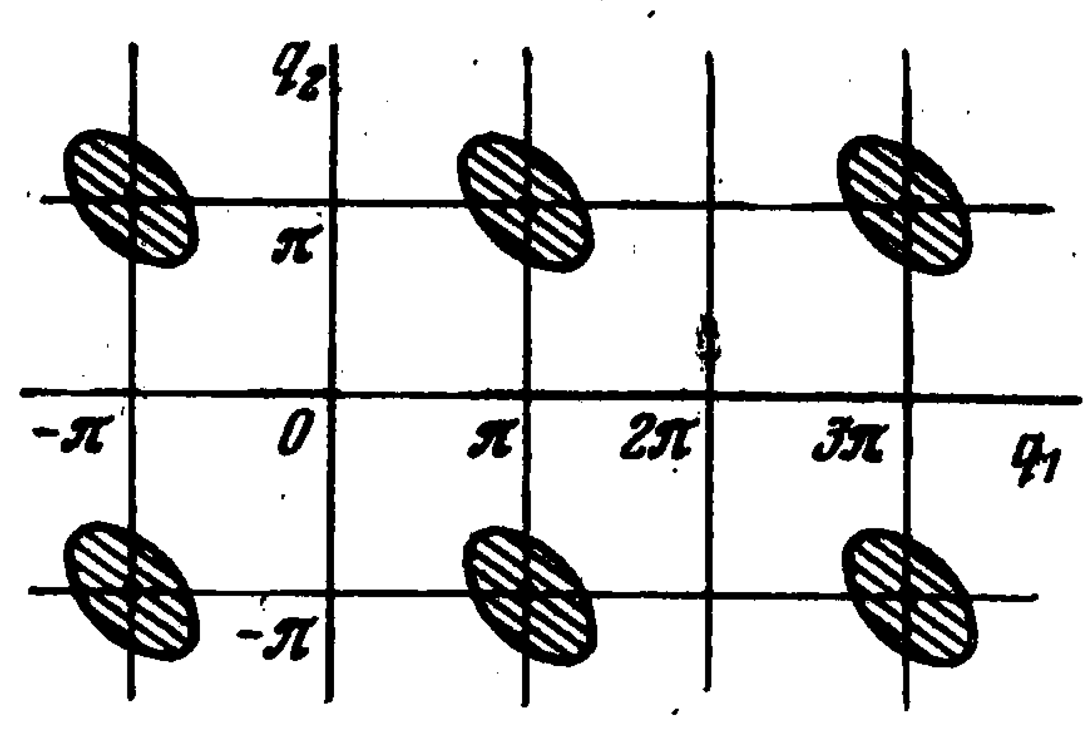
$\ldots, N_n = pN_n'$. Согласно только что доказанному, существует 2^{n-1} различных вращений типа $[N_1', \ldots, N_n']$. Рассмотрим периодические вращения, получающиеся из решений типа $[N_1', \ldots, N_n']$ p-кратным увеличением периода. Они все различны и принадлежат, очевидно, типу $[N_1, \ldots, N_n]$. Утверждение доказано.

На фиг. 2 изображены четыре пары положений равновесия маятника, которые занимает трехзвенный маятник при различных периодических вращениях типа [1,2,3].

В заключение покажем, что при некоторых условиях периодические вращения маятника существуют и при значениях $h < h^+$. Для этого рассмотрим двойной маятник с одинаковой длиной стержней l, их масса сосредоточена в точках O_1 и O_2 и равна соответственно m_1 и m_2. Можно показать, что

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2l^2\dot{q}_2^2 + m_2l^2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1 - q_2)$$

$$V = m_1gl\cos q_1 + m_2gl(\cos q_1 + \cos q_2)$$



Фиг. 3

Рассмотрим случай, когда величина h достаточно близка к h^+. Область возможных движений на плоскости $\mathbf{R}^2\{q_1, q_2\}$ изображена на фиг. 3 (она незаштрихована). Зафиксировав значение m_1, устремим массу m_2 к нулю. При достаточно малых значениях m_2 расстояние между точками $\mathbf{a} = (0, 0)$ и $\mathbf{b} = (0, \pi)$ меньше суммы расстояний от этих точек до границы области возможных движений.

Действительно, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ не превосходит длины отрезка $\{q_1 = 0,\ q_2 \in [0, \pi]\} \subset R^2$, которая равна

$$\sqrt{m_2}\, l \int_0^{\pi} [h + m_1gl + m_2gl(1 + \cos q_2)]^{1/2}\, dq_2$$

Эта величина стремится к нулю при $m_2 \to 0$. При малых значениях m_2 область возможных движений мало отличается от области $\{h + m_2gl\cos q_1 \geqslant 0\}$. Следовательно

$$\lim_{m_2 \to 0} \partial(\mathbf{a}) = \frac{\sqrt{m_1}\, l}{2} \oint [h + m_1gl\cos q_1]^{1/2}\, dq_1 > 0$$

Значит, при малых m_2 выполнено неравенство $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \partial(\mathbf{a}) + \partial(\mathbf{b})$.

По лемме 4 существует кратчайшая геодезическая метрики $d\rho$, соединяющая точки a и b и лежащая внутри области возможных движений. Этой геодезической отвечает решение уравнений (1.1), лежащее на уровне интеграла энергии с постоянной h. Так как система инвариантна относительно отражений Λ_a и Λ_b, то, согласно лемме 2, найденное решение — периодическое вращение.

Поступила 20 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bradistilov G.* Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. Math. Ann., 1938, Bd 116, H 2.
2. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. М.— Л., Гостехиздат, 1938.
3. *Козлов В. В.* Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах классической механики. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
4. *Козлов В. В.* О геометрии областей возможных движений с краем. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1977, № 5.
5. *Rosenberg R. M.* Normal modes of non-linear dual-mode systems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1961, № 5.)
6. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Либрации в системах со многими степенями свободы, ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
7. *Милнор Дж.* Теория Морса. М., «Мир», 1965.