Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.36

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1:3

Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль

(Москва)

Рассматривается задача об асимптотической устойчивости положения равновесия автономной системы дифференциальных уравнений. Предполагается, что матрица линеаризованной системы имеет две пары чисто мнимых собственных значений и отношение частот равно трем. Получены алгебраические достаточные условия устойчивости и неустойчивости.

1. Постановка задачи. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$du\,/\,dt = f(u),\ f(0) = 0,\ \dim u = \dim f = n \tag{1.1}$$

Изучается асимптотическая устойчивость положения равновесия $u = 0$. О матрице $\Lambda = \| (df\,/\,du)_{u=0} \|$ предполагается, что: 1) две пары собственных значений чисто мнимы, т. е. $\lambda_{1,2} = \pm\, i\omega_1$; $\lambda_{3,4} = \pm\, i\omega_2$; $\omega_2 \geqslant \omega_1 > 0$; 2) для остальных λ_j $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$.

При ω_k общего положения условия устойчивости найдены в [1]. Существует несколько особых случаев, в которых общий критерий неприменим. Эти случаи соответствуют целочисленным (резонансным) соотношениям между частотами

$$\omega_2 = \omega_1\,(1:1);\ \ \omega_2 = 2\omega_1\ (1:2);\ \ \omega_2 = 3\omega_1\,(1:3)$$

В случае $(1:2)$ положение равновесия, как правило, неустойчиво [2,3]. То же верно для случая $(1:1)$, если собственному значению $i\omega$ отвечает жорданова клетка [1]. Если собственному значению $i\omega$ отвечают два собственных вектора, то случай $(1:1)$ оказывается вполне аналогичным $(1:3)$.

Ниже рассматривается случай $(1:3)$, где критерий, задаваемый явными формулами, отсутствует: для исследования устойчивости стационарного решения необходимо детальное изучение фазового портрета вспомогательной системы двух дифференциальных уравнений [4]. Основная цель работы — вывод простых достаточных условий устойчивости и неустойчивости. В п. 8 приведен пример, показывающий, что резонанс $1:3$ может приводить к устойчивости в тех случаях, когда без его учета устойчивость отсутствует. Соотношение $\omega_2 = 3\omega_1$ будет предполагаться выпол-

[1] *Хазин Л. Г.* О резонансной неустойчивости положения равновесия при кратных частотах. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 97, М., 1975; *Хазина Г. Г., Хазин Л. Г.* Несуществование алгебраического критерия асимптотической устойчивости при резонансе 1 : 1. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 112, М., 1977.

ненным точно. Случаи, когда $\omega_2 \approx 3\omega_1$, рассматривались ранее [1]. Ниже рассматривается система (1.1) 4-го порядка, для которой все собственные значения матрицы Λ чисто мнимы. В силу теоремы редукции [5] общность рассмотрения этим не уменьшается.

2. Исходные уравнения. Приведем систему (1.1) к нормальной форме до членов третьего порядка включительно заменой переменных $u \to x$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$. Получим в комплексной записи

$$dz_k / dt = h_k(z) + r_k(z); \ |r_k(z)| \leqslant C|z|^4; \ k = 1, 2 \tag{2.1}$$
$$z_1 = x_1 + ix_2, \ z_2 = x_3 + ix_4; \ |z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

Модельная система запишется в виде

$$dz_k / dt = h_k(z)$$
$$h_1 = i\omega_1 z_1 + z_1(A_{11}|z_1|^2 + A_{12}|z_2|^2) + B_1(z_1^*)^2 z_2 \tag{2.2}$$
$$h_2 = i\omega_2 z_2 + z_2(A_{21}|z_1|^2 + A_{22}|z_2|^2) + B_2 z_1^3; \quad \omega_2 = 3\omega$$

Асимптотическая устойчивость системы (2.2) эквивалентна асимптотической устойчивости однородной системы, получающейся из (2.2) отбрасыванием линейных членов.

Линейные члены $P_1(z)$ и кубичные $P_3(z)$ в нормализованных уравнениях коммутируют между собой (при отсутствии жордановых клеток в Λ). Поэтому можно независимо решать системы $v^\cdot = P_1(v)$ и $w^\cdot = P_3(w)$. Если $v(t, \gamma)$ $(v(0, \gamma) = \gamma)$ и $w(t, \gamma) \cdot$ $\cdot (w(0, \gamma) = \gamma)$ — общие решения этих систем, то $z(t, \gamma) = v[t, w(t, \gamma)] = w[t, v(t, \gamma)]$ — общее решение системы $z^\cdot = P_1(z) + P_3(z)$ (см., например, [6]). Если все собственные значения Λ чисто мнимы, то $|z(t, \gamma)| = |w(t, \gamma)|$.

Независимо от общих соображений эта эквивалентность вытекает их приводимых ниже формул.

Если $B_1 = B_2 = 0$, то система (2.2) имеет тот же вид, что и нерезонансная система

$$dz_k/dt = i\omega_k z_k + z_k \sum_{j=1}^{2} A_{kj}|z_j|^2, \quad k = 1, 2 \tag{2.3}$$

Напомним известные [1] результаты об устойчивости системы (2.3).

Критерий А. Для асимптотической устойчивости системы (2.3) необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) $a_{11} < 0$; 2) $a_{22} < 0$; 3) при $a_{12} > 0$ и $a_{21} > 0$ $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

Если система (2.3) асимптотически устойчива, то она допускает функцию Ляпунова вида $L = k\rho_1 + \rho_2$, $\rho_j = |z_j|^2$. При этом

$$dL / dt < -C|z|^4 \quad (c > 0) \tag{2.4}$$

Функция L является функцией Ляпунова и при наличии в (2.3) старших членов. «Строгое» невыполнение критерия A, т. е. выполнение, по крайней мере, одного из неравенств: 1) $a_{11} > 0$; 2) $a_{22} > 0$; 3) при $a_{12} > 0$ и $a_{21} > 0$ $\Delta < 0$, приводит к неустойчивости системы (2.3) независимо от

[1] *Шноль Э. Э., Хазин Л. Г.* Несуществование алгебраического критерия асимптотической устойчивости при резонансе 1 : 3. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 45, М., 1977; *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.*, Исследование асимптотической устойчивости равновесия при резонансе 1 : 3. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 67, М., 1978.

старших членов тейлоровского разложения. Такую ситуацию назовем грубой неустойчивостью; система (2.3) имеет при этом растущее решение в виде «инвариантного луча»

(2.5) $$\rho_2(t) = p\rho_1(t); \quad d\rho_1 / dt = \alpha\rho_1^2 \ (\alpha > 0), \quad p = \mathrm{const}$$

3. Преобразованные уравнения. После замены переменных $z_k = \rho^{1/2}_k e^{i\varphi_k}$ $\rho_k > 0$, $k = 1, 2$ из системы (2.2) получим

(3.1) $$\begin{aligned}
&\rho_1^{\cdot} = 2\rho_1(a_{11}\rho_1 + a_{12}\rho_2) + 2b_1\rho_1^{3/2}\rho_2^{1/2}\cos(\psi - \psi_1)\\
&\rho_2^{\cdot} = 2\rho_2(a_{21}\rho_1 + a_{22}\rho_2) + 2b_2\rho_1^{3/2}\rho_2^{1/2}\cos(\psi - \psi_2)\\
&\psi^{\cdot} = (\alpha_{21} - 3\alpha_{11})\rho_1 + (\alpha_{22} - 3\alpha_{12})\rho_2 -\\
&- 3b_1\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\sin(\psi - \psi_1) - b_2\rho_1^{3/2}\rho_2^{-1/2}\sin(\psi - \psi_2)\\
&A_{kl} = a_{kl} + i\alpha_{kl}, \quad B_1 = b_1 e^{-i\psi_1}, \quad B_2 = b_2 e^{i\psi_2}\,(b_k \geqslant 0), \quad \psi = \varphi_2 - 3\varphi_1
\end{aligned}$$

Используем однородность (3.1) по ρ_1, ρ_2. В переменных $\rho_1 = R\cos\theta$, $\rho_2 = R\sin\theta$, $d\tau = Rdt$ $(0 \leqslant R < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ из (3.1) получим

(3.2) $$\begin{aligned}
&d\theta / d\tau = f(\theta, \psi) = f_1(\theta) + f_2(\theta, \psi), \quad d\psi / d\tau = g(\theta, \psi) =\\
&= g_1(\theta) + g_2(\theta, \psi)\\
&f_1(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta\,[(a_{21} - a_{11})\cos\theta + (a_{22} - a_{12})\sin\theta]\\
&f_2(\theta, \psi) = 2\cos^{3/2}\theta\sin^{1/2}\theta\,[b_2\cos\theta\cos(\psi - \psi_2) - b_1\sin\theta \times\\
&\times \cos(\psi - \psi_1)]\\
&g_1(\theta) = (\alpha_{21} - 3\alpha_{11})\cos\theta + (\alpha_{22} - 3\alpha_{12})\sin\theta\\
&g_2(\theta, \psi) = -3\,b_1\cos^{1/2}\theta\sin^{1/2}\theta\sin(\psi - \psi_1) - b_2\cos^{3/2}\theta\,\sin^{-1/2}\theta \times\\
&\times \sin(\psi - \psi_2)
\end{aligned}$$

(3.3) $$\begin{aligned}
&dR / d\tau = R\Pi(\theta, \psi), \quad \Pi(\theta, \psi) = \Pi_1(\theta) + \Pi_2(\theta, \psi)\\
&\Pi_1(\theta) = 2(a_{11}\cos^3\theta + a_{12}\cos^2\theta\sin\theta + a_{21}\cos\theta\sin^2\theta +\\
&+ a_{22}\sin^3\theta),\\
&\Pi_2(\theta, \psi) = 2\cos^{3/2}\theta\sin^{1/2}\theta\,[b_1\cos\theta\cos(\psi - \psi_1) + b_2\sin\theta \times\\
&\times \cos(\psi - \psi_2)]
\end{aligned}$$

Находя $\theta(\tau)$ и $\psi(\tau)$ из (3.2), получим из (3.3)

(3.4) $$R(\tau) = R(0)\exp\left[\int_0^\tau \Pi(\theta(s), \psi(s))\,ds\right]$$

Замечание. 1°. Интервалу $0 < t < \infty$ отвечает интервал $0 < \tau < \infty$, так как на решении (3.1)

$$\int_0^\infty R dt = \infty$$

Каждому решению системы (2.2) отвечает решение системы (3.1) Напротив, каждому решению (3.1) отвечает семейство решений (2.2), каждое из которых выделяется выбором $\varphi_1(t_0)$ (или $\varphi_2(t_0)$). Оба последних утверждения справедливы для участков решения $z(t)$, на которых ни $z_1(t)$, ни $z_2(t)$ не обращаются в нуль. При $z_1 = 0$ или $z_2 = 0$ переменная ψ теряет смысл и необходимо проследить за соответствием решений более детально. Плоскость $z_1 = 0$ инвариантна для (2.2), т. е. либо $z_1(t) \equiv 0$, либо

$z_1(t)$ не обращается в нуль. Решения (2.2) с $z_1(t)\equiv 0$ удовлетворяют уравнению

(3.5) $$z_2^{\cdot} = i\omega_2 z_2 + A_{22} z_2 |z_2|^2$$

Положив в (3.1) $\rho_1\equiv 0$, получим уравнение

(3.6) $$\rho_2^{\cdot} = 2a_{22}\rho_2^2$$

Соответствие между решениями уравнений (3.5) и (3.6) такое же, как между решениями (2.2) и (3.1) при $z_1\neq 0$ и $z_2\neq 0$. Если же $z_2=0$, то уравнение для ψ в системе (3.1) теряет смысл. Рассмотрим поведение решений при $\rho_2\to 0$. Пусть $z_2(0)=0$, тогда при $t\to 0$ $\varphi_1(t)\to\varphi_1(0)$. Поскольку $z_2^{\cdot}(0)=B_2 z_1^3$, то $\varphi_2(t)\to 3\varphi_1(0)+\psi_2$ или $\varphi_2(t)\to\to 3\varphi_1(0)+\psi_2+\pi$.

При прохождении $z_2(t)$ через нуль соответствующее $\psi(t)$ скачком меняется на величину π. Если для решения (3.1), у которого $\rho_2\to 0$ при $t\to t_0$, предписать скачок ψ на π при $t=t_0$, то соответствие между решениями (2.2) и (3.1) распространится и на плоскость $z_2=0$.

Угловая система (3.2) имеет особенность при $\theta=0$. Траектории (3.2) при $\theta\neq 0$ такие же, как у системы $\theta^{\cdot}=\sin^{1/2}\theta f(\theta,\psi)$, $\psi^{\cdot}=\sin^{1/2}\theta g(\theta,\psi)$. Эта система имеет на линии $\theta=0$ две стационарные точки $M_1(0,\psi_2)$ и $M_2(0,\psi_2+\pi)$. При $b_2\neq 0$ эти точки седловые. Постулированному выше решению (3.1), достигающему линии $\theta=0$, отвечает движение по входящей сепаратрисе одной из особых точек, мгновенный скачок к другой и затем движение по уходящей сепаратрисе второй точки.

4. Необходимые условия устойчивости модельной системы. В системе (2.2) плоскость $z_1=0$ инвариантна, на ней $z_2^{\cdot}=i\omega_2 z_2+A_{22}z_2|z_2|^2$. Следовательно, условие $\operatorname{Re}A_{22}=a_{22}<0$ необходимо для устойчивости системы (2.2).

Другие условия критерия A необходимыми не являются (см. п. 8). Используем теперь решения системы (2.2) типа «инвариантных лучей».

Лемма 1. Для асимптотической устойчивости положения равновесия $z=0$ системы (2.2) необходимо, чтобы для каждого стационарного решения (θ_*, ψ_*) системы (3.2) было выполнено неравенство $\Pi(\theta_*,\psi_*)<0$.

Доказательство следует из формулы (3.4).

Замечание. 2°. Существует не более пяти стационаров (θ_*,ψ_*) системы (3.2). Действительно, из системы $f(\theta,\psi)=g(\theta,\psi)=0$ следует уравнение пятой степени относительно $\operatorname{tg}\theta$. Вычисление $\Pi(\theta_*,\psi_*)$ требует после нахождения $\operatorname{tg}\theta_*$ лишь алгебраических операций, сформулированное необходимое условие является в этом смысле алгебраическим. Подробные формулы приведены ранее [1].

Замечание. 3°. Если для некоторого стационара (θ_*,ψ_*) $\Pi(\theta_*,\psi_*)=\mu>0$, то из (3.3) получаем $dR/dt=\mu R^2$ или $d|z|/dt=\mu/2|z|^3$ — обычный для кубической однородной системы рост решения («взрывная неустойчивость» [7]). Если существует два таких стационара, то в зависимости от начальных значений $\theta(0)$ и $\psi(0)$ может реализоваться тот или иной режим взрывной неустойчивости.

5. Квадратичные функции Ляпунова и достаточные условия устойчивости. Каждая однородная функция Ляпунова $L_k(z,z^*)$ системы (2.2) — функция Ляпунова системы (2.1). Последнее представляет собой следствие свойств однородных систем [8] и того, что система (2.2) в задаче об устойчивости эквивалентна однородной системе (п. 2).

Лемма 2. Если система (2.2) допускает квадратичную функцию Ляпунова $L_2(z,z^*)$, то:

---

[1] См. сноску на стр. 230.

1° эта же система допускает функцию Ляпунова вида

(5.1) $$L_2^\circ = k\,|\,z_1\,|^2 + |\,z_2\,|^2$$

2° при замене $B_1 \to \alpha B_1$, $B_2 \to \alpha B_2$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ система (2.2) остается асимптотически устойчивой. В частности, выполняется критерий A.

Доказательство. 1°. Пусть (2.2) допускает функцию Ляпунова

$$L_2 = k\,|\,z_1\,|^2 + |\,z_2\,|^2 + B_{11}z_1^2 + B_{11}^*\,(z_1^*)^2 + \\ + B_{12}z_1z_2 + B_{12}^*z_1^*z_2^* + B_{22}z_2^2 + B_{22}^*\,(z_2^*)^2 + Cz_1z_2^* + \\ + C^*z_1^*z_2$$

Если $z_1(t)$, $z_2(t)$ — решение системы (2.2), то $e^{i\beta}z_1(t)$, $e^{3i\beta}z_2(t)$ — также решение (при любом вещественном β). Поэтому

$$L_2^\circ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L_2\,(e^{i\beta}z_1,\, e^{3i\beta}z_2)\,d\beta = k\,|\,z_1\,|^2 + |\,z_2\,|^2$$

— также функция Ляпунова системы (2.2).

2°. Производная L_2° в силу системы (2.2) (см. (3.1)) имеет вид

$$dL_2^\circ\,/\,dt = M_k\,(\rho_1, \rho_2, \psi) = 2\,\{ka_{11}\rho_1^2 + \\ + (ka_{12} + a_{21})\,\rho_1\rho_2 + a_{22}\rho_2^2 + \rho_1^{3/2}\rho_2^{1/2} \times \\ \times [kb_1\cos(\psi - \psi_1) + b_2\cos(\psi - \psi_2)]\}$$

По условию, $M_k\,(\rho_1, \rho_2, \psi) < 0$ при всех $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, ψ. Пусть

(5.2) $$m_k\,(\rho_1, \rho_2) = \max_{\psi} M_k\,(\rho_1, \rho_2, \psi) = \\ = 2\,[ka_{11}\rho_1^2 + (ka_{12} + a_{21})\,\rho_1\rho_2 + a_{22}\rho_2^2 + s^{1/2}\rho_1^{3/2}\rho_2^{1/2}] \\ s = k^2b_1^2 + b_2^2 + 2kb_1b_2\cos\Delta\psi,\ \ \Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$$

При замене $b_1 \to \alpha b_1$, $b_2 \to \alpha b_2$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ функция $m_k\,(\rho_1, \rho_2)$ только уменьшается, и поэтому L_2° остается функцией Ляпунова.

Чтобы получить достаточные условия устойчивости, оценим m_k сверху

(5.3) $$m_k\,(\rho_1, \rho_2) \leqslant \rho_2^2P_2\,(y),\ P_2\,(y) = c_2y^2 + c_1y + c_0 \\ y = \rho_1\,/\,\rho_2 \\ c_2 = s^{1/2} + 2ka_{11},\quad c_1 = s^{1/2} + 2\,(ka_{12} + a_{21}),\quad c_0 = 2a_{22} < 0$$

Если полином $P_2\,(y)$ отрицателен при всех $y > 0$, то $L_2 = k\rho_1 + \rho_2$ — функция Ляпунова. Условия отрицательности P_2 при $y > 0$ состоят в следующем: 1) $c_2\,(k) < 0$; 2) $c_1\,(k) < 0$ или 3) $c_1^2\,(k) - 4c_2\,(k)c_0 < 0$.

Обозначим через I_j — совокупность положительных решений неравенства j) относительно k.

Теорема 1. Пусть c_j заданы формулами (5.3). Для асимптотической устойчивости системы (2.2) достаточно, чтобы интервал I_1 пересекался либо с I_2, либо с I_3: $K = I_1 \cap (I_2 \cup I_3) \neq \varnothing$.

В самом деле, если $k \in K$, то $L_2 = k\rho_1 + \rho_2$ — функция Ляпунова системы (2.2).

Замечание. 4°. Неравенства 1) и 2) сводятся к квадратичным, а 3) — к неравенству четвертой степени. В двух важных частных случая: $\Delta\psi = 0$ и $\Delta\psi = \pi$ неравенства 1) и 2) линейны, а 3) квадратично.

Зафиксируем a_{kl}, удовлетворяющие критерию A, и рассмотрим область асимптотической устойчивости Ω в плоскости (b_1, b_2) в силу теоремы 1 (истинная область асимптотической устойчивости $\Omega_+ \supset \Omega$). Из формул (5.2) и (5.3) получим, что если $\cos(\Delta\psi_1) > \cos(\Delta\psi_2)$, то $\Omega(\Delta\psi_1) \subset \Omega(\Delta\psi_2)$.

Таким образом, самый опасный для устойчивости случай $\Delta\psi = 0$. В случае $\Delta\psi = \pi$ область устойчивости максимальна и может при $a_{12} < 0$ и $a_{21} < 0$ совпадать со всем квадрантом $(b_1 \geqslant 0,\ b_2 \geqslant 0)$. Заменив $\Delta\psi$ нулем, получим грубое достаточное условие (см. сноску на стр. 230).

Лемма 3. Если система (2.2) допускает функцию Ляпунова в виде однородного полинома четвертой степени $L_4(z, z^*)$, то она же допускает функцию Ляпунова L_4° вида

$$L_4^\circ = k_1 |z_1|^4 + k_2 |z_1|^2 |z_2|^2 + k_3 |z_2|^4 + k_4 [(z_1^*)^3 z_2 + z_1^3 z_2^*]$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

6. Необходимые условия устойчивости полной системы. *Теорема 2.* Пусть угловая система (3.2) имеет грубый стационар $P_* = (\theta_*, \psi_*)$, $0 < \theta_* < \pi/2$ и пусть $\Pi(\theta_*, \psi_*) = \Pi_* > 0$. Тогда стационар $u = 0$ системы (1.1) неустойчив.

Доказательство. Пусть $M = \| (d(f, g) / d(\theta, \psi))_{\theta=\theta_*,\ \psi=\psi_*} \|$, μ_1 и μ_2 — собственные значения матрицы M. По условию, $\operatorname{Re}\mu_k \neq 0$. Возможны три случая: а) $\operatorname{Re}\mu_1 < 0$, $\operatorname{Re}\mu_2 < 0$; б) $\operatorname{Re}\mu_1 > 0$, $\operatorname{Re}\mu_2 > 0$; в) $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$. Рассмотрим их поочередно.

Нормализуем систему (1.1) до членов третьего порядка включительно и введем в (2.1) переменные R, θ, ψ, τ (см. п. 3). Получим

$$\frac{dR}{d\tau} = R[\Pi(\theta, \psi) + \delta_0], \quad \frac{d\theta}{d\tau} = f(\theta, \psi) + \delta_1 \tag{6.1}$$
$$d\psi/d\tau = g(\theta, \psi) + \delta_2$$

Здесь $|\delta_k(R, \theta, \varphi_1, \varphi_2)| \leqslant CR$ при $0 < \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 < \pi/2$, $k = 0, 1$; Пусть U_0 — окрестность P_*, в которой $dR/d\tau > {}^1/_2\, \Pi_* R$ при $R < R_0$.

а) Пусть $l(\theta, \psi)$ — квадратичная функция Ляпунова стационара P_* системы (3.2), $dl/d\tau \leqslant -ql$ в силу системы (3.2) в некоторой окрестности $U_1(P_*) < U_0$. Пусть для $l_* > 0$ линия $l(\theta, \psi) = l_*$ целиком лежит в U_1. Зададим область Ω в четырехмерном пространстве R^4 условиями $R < R_0$, $0 \leqslant l(\theta, \psi) \leqslant l_*$. В области Ω $dR/d\tau > {}^1/_2\, \Pi_* R$. На границе $l = l_*$ имеем в силу системы (2.1) $dl/d\tau < -ql_* + CR < -{}^1/_2 q l_*$ при $R < R_1$ (можно выбрать $R_1 < R_0$). Если $R(0) = \varepsilon < R_1$, $l(\theta(0), \psi(0)) < l_*$, то с ростом τ функция $R(\tau)$ монотонно растет до значения R_1. Ввиду произвольности ε неустойчивость доказана.

б) Пусть $l(\theta, \psi)$ — функция Ляпунова стационара P_* системы (3.2) при $\tau \to -\infty$. Выберем Ω так же, как в а). Пусть в силу (2.1) $dl/d\tau > {}^1/_2 q l_*$ на $l = l_*$ при $R < R_2 < R_0$. Если $R(0) = R_2$, $l(\theta(0), \psi(0)) \leqslant l_*$, то при $\tau \to -\infty$ $R(\tau)$ монотонно стремится к нулю, т. е. траектория стремится к стационару $z = 0$. Для неустойчивости при $\tau \to \infty$ достаточно наличия одной такой траектории.

в) Приведем исходную систему $du/d\tau = f(u)$ к нормальной форме до членов порядка $2n + 3$ включительно, $n = [\mu_2 / \Pi_*] + 1$ (при целом

$\mu_2 / \Pi_* \, n = \mu_2 / \Pi^*$). Введем переменные R, θ, ψ, τ и обозначим через β_1 и β_2 две линейные комбинации $\theta - \theta_*$ и $\psi - \psi_*$, диагонализирующие матрицу M. Выберем масштаб τ так, чтобы $\Pi_* = 1$. Получим

$$R^{\cdot} = R\,(1 + \delta_0) \quad (^{\cdot} \equiv d / d\tau) \tag{6.2}$$

$$\beta_1^{\cdot} = \mu_1\beta_1 + \sum_1^n c_k^{(1)} R^k + \delta_1 \qquad \beta_2^{\cdot} = \mu_2\beta_2 + \sum_1^{n-1} c_k^{(2)} R^k + c_n^{(2)} R^n + \delta_2 \tag{6.3}$$

Здесь $\delta_j\,(R, \beta, \varphi)$ — гладкие функции при $|\beta| < \varepsilon_0$, причем

$$|\delta_0| \leqslant C_4 |\beta| + C_5 R, \quad |\delta_k| \leqslant C_1 R\,|\beta| + C_2 |\beta|^2 + C_3 R^{n+1}, \; k = 1, 2; \; |\beta|^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$$

Положим

$$\beta_1 = \alpha_1 + \sum_1^n s_k R^k, \quad \beta_2 = \alpha_2 + \sum_1^{n-1} \sigma_k R^k \tag{6.4}$$

Выберем s_k и σ_k так, чтобы суммы в (6.3) обратились в нуль. Получим

$$R^{\cdot} = R\,(1 + \Delta_0), \quad |\Delta_0| \leqslant CR \tag{6.5}$$

$$\alpha_1^{\cdot} = \mu_1\alpha_1 + \Delta_1, \quad \alpha_2^{\cdot} = \mu_2\alpha_2 + c_n^{(2)} R^n + \Delta_2 \tag{6.6}$$

$$|\Delta_k| \leqslant C_1 |\alpha|^2 + C_2 R\,|\alpha| + C_3 R^{n+1}, \; k = 1, 2; \; |\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

В случае общего положения, когда μ_2 нецелое, исключим также член $c_n^{(2)} R^n$ во втором уравнении (6.6).

Пусть $\Phi\,(\tau)$ — решение уравнения

$$\Phi^{\cdot} = \mu_2\Phi + c_n^{(2)} e^{n\tau}, \quad \Phi\,(0) = 0$$

(при нецелом μ_2 $\Phi \equiv 0$).

Положим $F = \alpha_1^2 + (\alpha_2 - \Phi\,(\ln R))^2 - R^{2n+1}$ и $\Omega = \{\alpha, R : F\,(\alpha_1, \alpha_2, R) < 0, R < R_1\}$. В области Ω $|\alpha_1| \leqslant R^{n+1/2}$, $|\alpha_2 - \Phi\,(\ln R)| \leqslant R^{n+1/2}$. Будем рассматривать Ω как область в исходном четырехмерном пространстве R_u^4. Вычисляя производную F в силу (1.1), получим, используя (6.5)—(6.6) в области Ω,

$$F^{\cdot} < -R^{2n+1}\,(1 + C\,|\ln R|\,R^{1/2})$$

Отсюда F — функция Четаева и доказательство закончено.

Замечания. 5°. Конструкции, использованные в пп. а) и б) доказательства, восходят к Четаеву [9].

6°. Грубость P_* предположена лишь для сокращения доказательства. При большой величине μ_2 / Π_* здесь предполагается высокая гладкость правых частей системы (1.1). Это требование не вызвано существом дела и является издержкой приведенного доказательства.

7°. В приведенной формулировке теорема 2 справедлива для нескольких угловых переменных и в таком виде применима к ряду случаев, в том числе к рассмотренному в [6].

Теорема 3. Пусть для системы (2.1) $a_{22} > 0$ и $a_{22} - a_{12} \neq 0$. Тогда стационар $z = 0$ неустойчив.

Доказательство. Выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы $\Pi\,(\theta, \psi) > a_{22}$ при $\theta > \pi / 2 - \delta_0$, ($\Pi\,(\pi / 2, \psi) = 2a_{22}$, см. (3.3)). Пусть в силу (2.1) $dR / d\tau > {}^1/_2\, a_{22} R$ при $\theta > \pi / 2 - \delta_0$ и $R < R_0$. Пусть $a_{22} - a_{12} = \mu < 0$. Тогда при достаточно малом $\delta_1 < \delta_0$ в области $\theta > \pi / 2 - \delta_1$ справедливо неравенство $|f\,(\theta, \psi)| > |\mu|\,(\pi / 2 - \theta)$. Пусть $\Omega = \{R, \theta,$

ψ: $\theta > \pi / 2 - \delta_1$, $R < R_1\}$. Повторив рассуждение теоремы 2 (случай б)), убеждаемся в неустойчивости. При $\mu > 0$ доказательство аналогично случаю а) теоремы 2.

7. Предельные случаи малых и больших резонансных коэффициентов.

Теорема 4. Пусть система (2.3) асимптотически устойчива. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что при $b_1 < \varepsilon$ и $b_2 < \varepsilon$ система (2.1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Функция Ляпунова системы (2.3) $L = k\rho_1 + \rho_2$ в силу (2.4) при достаточно малом ε есть функция Ляпунова для (2.1).

Теорема 5. Пусть система (2.3) грубо неустойчива. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что при $b_1 < \varepsilon$, $b_2 < \varepsilon$ система (2.1) неустойчива.

Доказательство. Возможны три случая.

1°. Выполнено условие $a_{11} > 0$. Тогда $\Pi_1(\theta) > a_{11}$ при $\theta \leqslant \theta_0$ (см. (3.3)). При $b_k < {}^1/_8 a_{11}$ $(k = 1, 2)$ имеем $\Pi(\theta, \psi) > {}^1/_2\, a_{11}$ для $\theta \leqslant \theta_0$. Выберем $\delta < \theta_0$ так, чтобы $\mu = f_1(\delta) \neq 0$. Тогда при $|b_k| < {}^1/_8\, |\mu|$ $\operatorname{sign} f(\delta, \psi) = \operatorname{sign} \mu$. Положим $\varepsilon = {}^1/_8 \min(a_{11}, |\mu|)$ и $\Omega = \{\theta \leqslant \delta, R < R_1\}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теорем 2 и 3.

2°. Выполнено условие $a_{22} > 0$. Доказательство аналогично случаю 1°, область Ω задается неравенствами $\theta \geqslant \pi / 2 - \delta$, $R \leqslant R_2$.

3°. $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$. Система (2.3) имеет в этом случае решение вида (2.5) с $p \neq 0$. Для системы (3.2) при $b_1 = b_2 = 0$ это означает наличие притягивающего предельного цикла $\theta = \theta_*$: $f_1(\theta_*) = 0$, $f_1'(\theta_*) < 0$, $\Pi_1(\theta_*) = \Pi_* > 0$.

Пусть $\delta > 0$ таково, что при $|\theta - \theta_*| < \delta$ $\Pi_1(\theta) > {}^1/_2 \Pi_*$, $f(\theta_* - \delta) < 0$, $f(\theta_* + \delta) < 0$. Положив $\Omega = \{|\theta - \theta_*| < \delta,\ R < R_1\}$, получим неустойчивость, как в п. а) теоремы 2.

Лемма 4. Пусть $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = \pi$. Тогда система $f_2(\theta, \psi) = g_2(\theta, \psi) = 0$ (см. (3.2)) имеет решение (θ_*, ψ_*), такое, что: 1) у матрицы $d(f_2, g_2) / d(\theta, \psi)$ при $\theta = \theta_*$, $\psi = \psi_*$ нет собственных значений на мнимой оси; 2) $\Pi_2(\theta_*, \psi_*) > 0$.

Доказательство леммы опускается.

Теорема 6. Пусть в системе (2.1) зафиксированы коэффициенты A_{kl} и значение $\Delta\psi \neq \pi$. Пусть $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $b_1 = \beta_1 / \varepsilon$, $b_2 = \beta_2 / \varepsilon$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система (2.1) неустойчива.

Доказательство. Введем в уравнения (3.2), (3.3) замену $\tau = \varepsilon\tau_1$. Получим

$$d\theta / d\tau_1 = f_\varepsilon,\quad d\psi / d\tau_1 = g_\varepsilon,\quad dR / d\tau_1 = R\Pi_\varepsilon \tag{7.1}$$

$$f_\varepsilon = f_2 + \varepsilon f_1,\quad g_\varepsilon = g_2 + \varepsilon g_1,\quad \Pi_\varepsilon = \Pi_2 + \varepsilon\Pi_1$$

Здесь в f_2, g_2, Π_2, b_k заменены на β_k.

При достаточно малом ε в силу леммы 4 система $f_\varepsilon = g_\varepsilon = 0$ имеет решение (θ_*, ψ_*), для которого $\Pi_\varepsilon(\theta_*, \psi_*) > 0$ и у матрицы $d(f_\varepsilon, g_\varepsilon) / d(\theta, \psi)$ нет собственных значений на мнимой оси. Применив к (7.1) теорему 2, получим, что система (7.1) и, тем самым, система (2.1) неустойчивы.

Замечание 8°. При $\Delta\psi = \pi$ утверждение теоремы несправедливо: система (2.1) может быть асимптотически устойчива при любых $b_1 \geqslant 0$ и $b_2 \geqslant 0$. При произвольном $\Delta\psi \neq \pi$ большая величина лишь одного из резонансных коэффициентов (b_1 или b_2) не гарантирует неустойчивость.

8. Пример асимптотической устойчивости при невыполнении условий критерия А: $a_{11} > 0$. Рассмотрим систему типа (2.2)

$$z_1^{\boldsymbol{\cdot}} = i\omega z_1 + z_1 (|z_1|^2 - 12|z_2|^2)$$

$$z_2^{\boldsymbol{\cdot}} = 3i\omega z_2 + z_2 (-14|z_1|^2 - 4|z_2|^2) - 18z_1^3$$

$$(a_{11} = 1,\ a_{21} < 0,\ a_{12} < 0,\ a_{22} < 0,\ B_1 = 0,\ B_2 \neq 0,\ \psi_2 = \pi)$$

Функцией Ляпунова этой системы является однородный полином четвертой степени (ср. с леммой 3)

$$L_4 = {}^3/_2 |z_1|^4 + |z_2|^4 + {}^1/_2 (z_1^3 z_2^* + (z_1^*)^3 z_2)$$

Здесь существенно, что $B_2 \neq 0$: при $B_2 = 0$ неравенство $a_{11} < 0$ является необходимым для устойчивости.

Отметим, что в силу леммы 2 не существует функции Ляпунова в виде квадратичного многочлена при $a_{11} > 0$.

9. Заключительные замечания. *О достаточных условиях устойчивости.* Достаточные условия устойчивости могут быть получены из требования, что один из однородных многочленов $L_k(z, z^*)$ фиксированной степени k является функцией Ляпунова. Для задач об асимптотической устойчивости стационара, в которых найдены алгебраические критерии устойчивости, устойчивость обычно обеспечивается квадратичной функцией Ляпунова $L_2(z, z^*)$ ($k = 2$). В рассматриваемой задаче существуют эффективно проверяемые алгебраические условия, необходимые и достаточные для того, чтобы система (2.1) допускала квадратичную функцию Ляпунова. Эти условия, полученные из критерия Штурма, громоздки и здесь не приводятся, что оправдано и тем, что $L_2(z, z^*)$ в наиболее интересных случаях непригодна. Использование L_k с $k > 2$ иногда полезно (см. п. 8), но из несуществования алгебраического критерия следует, что для сколь угодно большого k_0 существуют асимптотически устойчивые системы (2.1), не допускающие функции Ляпунова L_k с $k \leqslant k_0$. |

О необходимых условиях устойчивости. Чтобы оценить значимость приведенных выше необходимых условий, заметим, что если в угловой системе (3.2) есть предельный цикл $\gamma = (\theta(s), \psi(s))$, то для устойчивости необходимо, чтобы

$$I_\gamma = \oint \Pi(\theta(s), \psi(s))\, ds < 0$$

Знаки этих интегралов приведенными в работе необходимыми условиями не учитываются. При учете знаков интегралов по предельным циклам приведенные выше необходимые условия становятся также и достаточными, если угловая система грубая.

Авторы благодарят участников семинара В. В. Румянцева за обсуждения.

Поступила 26 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения. Сб. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
2. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 9.
3. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
4. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 6.
5. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, т. 28, № 6.
6. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.
7. Нелинейная теория распространения волн. Сб. под ред. Г. И. Баренблатта. М., «Мир», 1970.
8. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1955, т. 19, вып. 5.
9. *Четаев Н. Г.* Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.