Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.31

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ, КОГДА СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ НЕ ЕСТЬ МАКСИМУМ

Е. А. Любушин

(Москва)

С помощью теоремы Пуанкаре о возвращении и принципа наименьшего действия в форме Якоби доказываются некоторые теоремы о неустойчивости равновесия механической системы, когда силовая функция не есть максимум. Рассматривается вопрос о поведении траекторий системы в целом.

1. Рассмотрим вещественную автономную систему уравнений (1.1)

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

Здесь x — точка n-мерного фазового пространства R^n с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, f — вектор-функция на R^n, определяемая набором $(f_1, \ldots, f_n)$ вещественных функций на R^n.

Предположим, что решения системы (1.1) определены при $t \geqslant 0$ для любых начальных данных. Все встречающиеся ниже функции будем полагать непрерывными и имеющими непрерывные частные производные первого порядка.

Если система (1.1) удовлетворяет условию несжимаемости

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv 0$$

и V — область, инвариантная относительно потока, порождаемого системой (1.1), то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если существует функция $W(\mathbf{x})$, такая, что в области V выполняется неравенство

$$W^{\cdot}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 \tag{1.2}$$

причем $W^{\cdot}(\mathbf{x}) \not\equiv 0$ в V, то V — неограниченное множество в R^n.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ — решение системы (1.1), начинающееся в $\mathbf{x}_0 \in R^n$, так, что $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Предположим, что область V ограничена и, следовательно, имеет конечную меру. Тогда для V выполнены все условия теоремы Пуанкаре о возвращении [1]. Это означает, что для почти всякой точки $\mathbf{x}_0 \in V$ существует последовательность времен $\{\tau_n\}$, такая, что справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{x}(\tau_n, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \quad \tau_1 = 0 \tag{1.3}$$

Обозначим множество этих точек через V_1. Таким образом, мера V_1 равна мере V.

Так как $W^{\cdot}(\mathbf{x}) \not\equiv 0$, то в области V найдутся точка $\mathbf{x}_0$ и ее окрестность B, такие, что в B справедливо неравенство $W^{\cdot}(\mathbf{x}_0) < 0$, причем можно считать, что $\mathbf{x}_0 \in V_1$.

Рассмотрим равенство

$$W(\mathbf{x}(\tau_n, x_0)) - W(\mathbf{x}_0) = \int_0^{\tau_n} W^{\cdot}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\,dt \tag{1.4}$$

Здесь $\{\tau_n\}$ выбрано в соответствии с (1.3). Используя (1.3) и непрерывность W, получим

$$\lim_{n\to\infty}(W(\mathbf{x}(\tau_n, \mathbf{x}_0)) - W(\mathbf{x}_0)) = 0$$

Тогда из (1.4) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\tau_n} W^{\cdot}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\,dt = 0 \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) приводит к противоречию. Действительно, из (1.2) следует, что последовательность в правой части (1.4) монотонна и, следовательно, имеет предел. С другой стороны, так как $\mathbf{x}_0 \in B$, то $W^{\cdot}(\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0)) = W^{\cdot}(\mathbf{x}_0) < 0$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\tau_n} W^{\cdot}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\,dt < 0$$

Из полученного противоречия следует, что V — неограниченное множество.

Следствие. Пусть положение равновесия системы (1.1) входит в замыкание V. Тогда, если в любой окрестности положения равновесия существует точка x_0, такая, что $\mathbf{x}_0 \in V$, $W^{\cdot}(\mathbf{x}_0) < 0$, то это положение равновесия неустойчиво. Более того, для любого $M > 0$ и любого $\delta > 0$ существует траектория системы, начинающаяся в δ-окрестности положения равновесия и покидающая M-окрестность положения равновесия системы за конечное время.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что при $\| x_0 \| < \delta$ справедливо неравенство $\| \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \| < M$. Рассмотрев объединение траекторий, начинающихся в δ-окрестности равновесия, получим ограниченную область B, инвариантную относительно потока, порождаемого траекториями системы (1.1). Тогда для $B \cap V$ выполняются условия утверждения (1.1). Таким образом, $B \cap V$ должно быть неограниченным множеством, что невозможно в силу ограниченности B.

Из следствия вытекает, что для систем, удовлетворяющих условию несжимаемости, в случае устойчивости равновесия нельзя построить функцию Ляпунова, не зависящую явно от времени и не являющуюся первым интегралом системы. Этот факт отмечался и для некоторых систем уравнений, не удовлетворяющих условию несжимаемости, хотя в общем случае он не имеет места [2].

Теорема Четаева [3] о неустойчивости в применении к системам, удовлетворяющим условию несжимаемости, модифицируется в предположении, что в области C $(W > 0)$ $W^{\cdot} \geqslant 0$, причем $W^{\cdot} \not\equiv 0$ в области $B \cap C$, где B — любая окрестность равновесия.

Аналогично модифицируется и теорема Четаева о неустойчивости с применением двух функций [4].

2. Рассмотрим голономную консервативную механическую систему с n степенями свободы $(q_1, \ldots, q_n)$. Пусть T — кинетическая энергия системы, U — потенциальная энергия.

Будем считать, что положение равновесия, возможно неизолированное, совпадает с началом O конфигурационного пространства. Предположим, что в некоторой окрестности B точки O справедливо неравенство

(2.1) $\partial U / \partial q_1 \geqslant 0$

причем в любой окрестности $B_1 \subset B$ точки O найдется точка, для которой справедливо строгое неравенство (2.1). Предположим также, что $\partial T / \partial q_1 \geqslant 0$.

Теорема 2. Положение равновесия описанной выше системы неустойчиво.

Доказательство. Рассмотрим уравнения движения системы в форме Гамильтона. Пусть $P(A)$ — проекция множества A из фазового (q, p)-пространства на конфигурационное q-пространство.

Предположим устойчивость положения равновесия. Тогда существует ограниченная инвариантная относительно потока, порождаемого фазовыми траекториями системы, окрестность V точки O, такая, что $P(V) \subset B$.

Рассмотрим функцию $W(q, p) = p_1$. Учитывая (2.1), получаем

$$W^{\cdot} = -\partial H / \partial q_1 = -\partial T / \partial q_1 - \partial U / \partial q_1 \leqslant 0$$

причем $W^{\cdot} \not\equiv 0$ в области V. Из теоремы 1 следует, что V — неограниченное множество, что противоречит выбору V. Таким образом, положение равновесия системы не может быть устойчивым. Теорема 2 доказана.

3. Предположим теперь, что коэффициенты $a_{ij}(\mathbf{q})$ формы T и U — функции класса C^1. Пусть всюду на $R^n U \leqslant 0$. Положение равновесия обозначим через O. В этих предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для любых $M > 0$ и $\delta > 0$ существуют $\| \mathbf{q}_0 \| \leqslant \delta$, $\| \mathbf{q}_0^{\cdot} \| \leqslant \delta$, такие, что траектория механической системы с этими начальными данными, возможно не одна, существует и при некотором t, $\| \mathbf{q}(t) \| = M$.

Следуя идее Хагедорна [5], получим необходимое семейство траекторий из принципа наименьшего действия [5]. Чтобы отказаться от существенного для [5] предположения о строгости максимума U, будем изменять не окрестность равновесия, как в [5], а саму вариационную задачу. Это позволит также получить результаты нелокального характера. При доказательстве теоремы 3 будут использованы факты, относящиеся к эллиптической положительной вариационной задаче (см. [6], т. 1, §§ 29, 51, 54) [7].

Доказательство. Предположим сначала, что U, $a_{ij} \in C^\infty$. Зафиксируем $h > 0$ и рассмотрим вариационную задачу с закрепленными концами

$$I(C) = \int_0^Q 2(h-U)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^n a_{ij}q_i'q_j'\right)^{1/2} ds = \min \tag{3.1}$$

Здесь s — длина дуги на кривой $C(O, Q)$. Задачу решаем в классе кривых, допускающих кусочно-гладкую по s параметризацию. Согласно принципу наименьшего действия решения задачи (3.1) определяют траектории соответствующей механической системы, вдоль которых $T + U = h$.

Рассмотрим шары B, B_1, B_2, B_3 с центрами в O и радиусами $r < r_1 < r_2 < r_3$. Зафиксируем точку $Q \in \partial B$ (∂A — граница множества A). Функцию $e(x)$ определим по формуле

$$e(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant r^2 \\ \exp[-(x-r^2)^{-2}], & x > r^2 \end{cases}$$

Как известно, $e(x) \in C^\infty$. Заменив в задаче (3.1) U функцией

$$U_\lambda = U + \lambda e(\Sigma q_i^2), \quad \lambda < 0, \quad U_\lambda \in C^\infty$$

получим снова эллиптическую положительную задачу

$$I_\lambda(C) = \min \tag{3.2}$$

Так как задача (3.2) положительна, то минимизирующая [5] последовательность кривых C_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), соединяющих в B_3 точки O и Q, заведомо существует. Через α обозначим нижнюю грань T при $q \in \bar{B}_3$, $\|q^\cdot\| = 1$, через γ — нижнюю грань $e(\|q\|^2)$ при $q \in \overline{B_2 / B_1}$.

Рассмотрим допустимую кривую $C(O, Q)$ в B_3, пересекающую границы ∂B_1 и ∂B_2. Пусть s_2 — нижняя грань по значениям параметра s, при которых кривая C пересекает ∂B_2, и пусть s_1 — верхняя грань по значениям параметра s, при которых C пересекает ∂B_1: $Q(s_1) \in \partial B_1$, $Q(s_2) \in \partial B_2$. Тогда значение функционала I_λ на части кривой C от s_1 до s_2 оценивается снизу величиной

$$\varkappa = 2(r_2 - r_1)(|\lambda| \alpha\gamma)^{1/2}$$

Выберем λ так, чтобы выполнялось неравенство $I_\lambda(\overline{OQ}) < \varkappa$ ($\overline{OQ}$ — отрезок).

Это можно сделать. Действительно, $I_\lambda(\overline{OQ})$ от λ фактически не зависит по построению I_λ, а $\varkappa$ выбором λ можно сделать сколь угодно большим. Зафиксируем необходимое λ. Заменив кривые из последовательности C_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), пересекающие границы ∂B_1 и ∂B_2, на отрезок $\overline{OQ}$, получим новую минимизирующую последовательность, расположенную в B_2, т. е. строго внутреннюю по отношению к B_3. По известной теореме вариационного исчисления (см. [6], т. 1, § 51, лемма 51.31) существует экстремаль $C(O, Q)$ задачи (3.2) длины s_0, доставляющая минимум функционалу I_λ.

Параметр времени вводится на кривой $C(O, Q)$ по формуле

$$t = \int_0^Q (h-U)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^n a_{ij}q_i'q_j'\right)^{1/2} ds$$

точка Q достигается, очевидно, за конечное время t_0.

Пусть $t_1 \leqslant t_0$ — время, за которое достигается граница ∂B. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$ функции $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, задающие кривую C, определяют решение уравнений Лагранжа исходной механической системы. Это следует из принципа наименьшего действия и построения функционала I_λ.

Обозначим через β наименьшее собственное значение матрицы $\|a_{ij}(0)\|$. Для начальной скорости $\mathbf{q}^\cdot(0)$ справедливо неравенство $\|\mathbf{q}^\cdot(0)\| \leqslant \leqslant (2h/\beta)^{1/2}$ в силу интеграла энергии. Таким образом, ясно, что, устремляя h к нулю, получим семейство траекторий, устанавливающих неустойчивость равновесия. Положим $M = r$.

Чтобы перенести результат на случай, когда $U \in C^1$, $a_{ij} \in C^1$, воспользуемся стандартной процедурой, основанной на теореме Арцела [8]. В самом деле, выберем приближение функций U, a_{ij} функциями U_k, $a_{ij}{}^k \in C^\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$ на компакте $\bar{B}_3$ так, чтобы сходимость к U, a_{ij} была в C^1-топологии. Можно считать, что $U_k \leqslant 0$ на $\bar{B}_3$, а формы T_k — положительно определены [8]. Повторяя при каждом k предыдущие рассуждения, получим семейство кривых C_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Можно показать, что это семейство кривых удовлетворяет условиям теоремы Арцела. Таким образом, можно выбрать подпоследовательность $\{C_k'\}$ последовательности $\{C_k\}$, сходящуюся к траектории исходной механической системы.

Подпоследовательность $\{C_k'\}$ может быть выбрана из последовательности $\{C_k\}$, вообще говоря, не единственным образом, и, следовательно, траекторий с данными начальными условиями может быть несколько. Это понятно, так как условие $U \in C^1$, $a_{ij} \in C^1$ не гарантирует единственности решений дифференциальных уравнений движения.

Теорема доказана.

Замечание 3.1. В случае локального максимума нужно B_3 выбрать так, чтобы при $q \in \bar{B}_3$ было $U(\mathbf{q}) \leqslant 0$.

Рассмотрим плоскость π в R^n, проходящую через O. Полупространства, на которые делится R^n плоскостью π, обозначим π_1, π_2. Пусть $P: R^n \to R^n$ — отображение симметрии относительно плоскости π, а $DP: T(R^n) \to T(R^n)$ — касательное к P отображение.

Функции U^*, $a_{ij}{}^*$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ определим следующим образом:

$$U^* = \begin{cases} U(\mathbf{q}), & \mathbf{q} \in \bar{\pi}_1 \\ U(P(\mathbf{q})), & \mathbf{q} \in \bar{\pi}_2 \end{cases}, \quad a_{ij}{}^* = \begin{cases} a_{ij}(\mathbf{q}), & \mathbf{q} \in \bar{\pi}_1 \\ a_{ij}(P(\mathbf{q})), & \mathbf{q} \in \pi_2 \end{cases}$$

Предположим, что U^*, $a_{ij}{}^* \in C^2$. Относительно формы

$$T^* = \sum_{ij} a_{ij}{}^* q_i^\cdot q_j^\cdot$$

(T^* рассматривается как функция на касательном к R^n пространстве $T(R^n) = R^n \times R^n$) предположим, что $T^* \circ DP = T^*$, где $T^* \circ DP$ — композиция отображений. Пусть, например,

$$T = \sum_{i=1}^n a_i q_i^{\cdot 2}, \quad a_i = \text{const}$$

Тогда для T^* условие $T^* \circ DP = T^*$ заведомо имеет место при любом расположении плоскости π. В этих предположениях верна следующая теорема.

Теорема 4. Если $U \leqslant 0$ при $q \in \bar{\pi}_1$, то равновесие системы неустойчиво и для любых $M > 0$, $\delta > 0$ существует траектория системы с начальными данными $\| \mathbf{q}(0) \| < \delta$, $\| \mathbf{q}^{\cdot}(0) \| < \delta$, такая, что при некотором t $\| \mathbf{q}(t) \| = M$.

Доказательство. Заменим в задаче (3.1) U на U^* и рассмотрим соответствующую вариационную задачу $I^*(C) = \min$, считая, что $Q \in \partial B \cap \pi$. По предположению, $U^* \leqslant 0$ на R^n и $U^* \in C^2$. Все рассуждения, относящиеся к задаче (3.1), справедливы, следовательно, и для рассматриваемой задачи. Действительно, для получения экстремали $C(O, Q)$ в задаче (3.1) условие $U \in C^\infty$, $a_{ij} \in C^\infty$ излишне, так как для применения леммы о минимизирующей последовательности кривых достаточно было бы $U \in C^2$ [5]. Таким образом, повторяя дословно рассуждения, относящиеся к (3.1), находим минимизирующую экстремаль $C^*(O, Q) \subset B_2$ длины $\bar{s}$ измененной вариационной задачи $I_\lambda^*(C) = \min$; λ выбирается как в задаче (3.2).

Через s_0 обозначим значение параметра s, при котором кривая C пересекает ∂B впервые. Множество $N \subset [0, \bar{s}]$ определим следующим образом. Считаем, что $s \in N$, если точка $C - Q(s) \in \pi$ и в любой окрестности s существует s', такое, что $Q(s') \notin \pi$. Предположим сначала, что $N \neq \varnothing$, и покажем, что N состоит из конечного числа элементов.

Действительно, в противоположном случае существует предельная для N точка s^1. Множество N замкнуто по построению, так, что $s' \in N$.

Выберем $\rho > 0$ в соответствии с локальной теоремой существования в вариационном исчислении (см. [6] т. 1, гл. 2, теорема 29.5). Тогда существует $s' \in \bar{N}$, такое, что $|s' - s^1| < \rho / 2$. Пусть $s' < s^1$. Тогда, если дуга $C^*(Q(s')) Q(s^1))$ не лежит в плоскости π, существует еще одна экстремаль $C^{**} = P(C^*(Q(s'), Q(s^1)))$, соединяющая $Q(s')$ и $Q(s^1) \in \pi$.

Действительно, из условий теоремы следует, что $I_\lambda^*(C^*(Q(s'), Q(s^1))) = I_\lambda^* \cdot (C^{**}) = \min$. Обе эти экстремали (напомним, что s — длина) лежат в шаре радиуса ρ, что невозможно в силу выбора ρ, так что обязательно $C^*(Q(s'), Q(s^1)) \subset \pi$ и $(s', s^1) \cap N = \varnothing$. Но так как s^1 — предельная точка для N, то существует $s'' > s^1$, такое, что $s'' \in N$ и $s'' - s^1 < \rho / 2$. Как и выше, доказываем, что $C^*(Q(s^1), Q(s'')) \subset \pi$ и $(s^1, s'') \cap N = \varnothing$.

Таким образом, $s^1 \notin N$, что противоречит выбору s^1. Следовательно, $N = \{s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_k\}$. Дуга $C^*(Q(s_j), Q(s_{j+1}))$ находится либо в π_1 или π_2 $(Q(s) \notin \pi$ при $s \in (s_j, s_{j+1}))$, либо в π. Отобразив участки кривой $C^*(O, Q)$, лежащие в π_2, симметрично относительно плоскости π в π_1, получим кусочно-гладкую кривую $C^{**}(O, Q) \subset \bar{\pi}_1$, так как гладкость может нарушаться лишь в точках множества N. Но из определения функций U^*, a_{ij}^* и того, что $T^* = T^* \circ DP$, немедленно следует, что $I_\lambda^*(C^*(O, Q)) = I_\lambda^*(C^{**}(O, Q)) = \min$, так что $C^{**}(O, Q)$ — обязательно гладкая кривая, являющаяся, как и $C^*(O, Q)$, минимизирующей экстремально измененной задачи $I_\lambda^* = \min$ относительно области B_3, а ее часть до первого пересечения с ∂B — $C^{**}(O, Q(\bar{s}_0))$ определяет экстремаль, возможно не минимизирующую, задачи $I^*(C) = \min$. Действительно, уравнения Эйлера задачи совпадают с уравнениями Эйлера задачи $I_\lambda^* = \min$ на множестве $\bar{B}$.

Но уравнения Эйлера для вариационной задачи, соответствующей исходной механической системе, совпадают на $\overline{\pi_1 \cap B}$ с уравнениями Эйлера для задачи $I_\lambda^* = \min$ по построению U^*, a_{ij}^*, а так как $C^{**}(O, Q(\bar{s}_0)) \subset \subset \overline{B \cap \pi_1}$, то $C^{**}(O, Q(\bar{s}_0))$ определяет траекторию исходной механической системы.

Если же $N = \varnothing$, то траекторию исходной системы находим непосредственно по принципу наименьшего действия из кривой $C^*(O, Q(\bar{s}_0))$, если $C^*(O, Q) \subset \bar{\pi}_1$, или из кривой $P(C^*)$, если $C^*(O, Q(\bar{s}_0)) \subset \bar{\pi}_2$. Устремляя h к нулю и повторяя при каждом h приведенные рассуждения, получим искомое семейство траекторий. Теорема доказана.

В условиях теоремы 4 находится, например, система, у которой a_{ij} не зависят от q_1, $U = q_1^3 + F(q_2, \ldots, q_n)$, $F \leqslant 0$, а в качестве π берется плоскость $q_1 = 0$ (можно считать, что функции a_{ij} симметричны относительно плоскости $q_1 = 0$). Вернемся к случаю, когда U имеет в равновесии строгий максимум, и $U \in C^2$, $a_{ij} \in C^2$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. В статье [5] неустойчивость равновесия была установлена с помощью семейства траекторий, вдоль которых постоянная интеграла энергии h положительна. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. Для любых $M > 0$, $\delta > 0$ существует, если максимум глобальный, траектория системы с начальными данными $\|\mathbf{q}(0)\| < \delta$, $\|\dot{\mathbf{q}}(0)\| < \delta$, такая, что вдоль нее $h < 0$ и при некотором t $\|\mathbf{q}(t)\| = M$.

Доказательство. Рассмотрим вариационную задачу (3.1) при $h < 0$. Эта задача эллиптична и положительна в области $M_h = \{Q \mid U(Q) < < h\}$. Через U_ρ обозначим нижнюю грань U на компакте B_3 / B_ρ, где B_ρ — шар радиуса ρ с центром в O. Зафиксируем какое-нибудь $\delta > 0$ так, чтобы $\bar{B}_\delta \subset B$, и рассмотрим измененную вариационную задачу $I_\lambda = \min$, считая, что концы $Q_1 \in \partial B_\delta$, $Q_2 \in \partial B$ закреплены. Положим $U_\lambda = U + \lambda [e(x) + e_1(x)]$, где $\lambda < 0$, а функция e_1 определена по формуле

$$e_1(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant \delta^2 \\ \exp[-(x - \delta^2)^{-2}], & x < \delta^2, \end{cases} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 .$$

Выберем h по неравенству $\mathrm{U}_\rho < h < 0$, где $\rho = \delta / 2$. Ясно, что $\overline{B_3 / B_\rho} \subset M_h$. Проводя рассуждения, аналогичные относящимся к задаче (3.1) (вместо B_3 рассматриваем $M_h \cap B_3$, вместо $B - B / B_\delta$), заключаем о существовании минимизирующей экстремали $C_\delta(Q_1, Q_2)$ для (3.2) относительно области $M_h \cap B_3$ при достаточно большом по модулю λ. Пусть s_2 — нижняя грань по значениям параметра s, при которых $C_\delta(Q_1, Q_2)$ пересекает ∂B, и пусть s_1 — верхняя грань по значениям параметра $s < s_2$, при которых $C_\delta(Q_1, Q_2)$ пересекает ∂B_δ. Так как на множестве $\overline{B / B_\delta}$ $U_\lambda = U$ по построению U_λ, то уравнения Эйлера для задачи (3.1) совпадают на $\overline{B / B_\delta}$ с уравнениями Эйлера для задачи (3.2) и, следовательно, дуга $C_\delta(Q(s_1), Q(s_2))$ определяет экстремаль, возможно не минимизирующую, для задачи (3.1). Далее, по принципу наименьшего действия находим траекторию исходной механической системы (точка $Q(s_1)$ — начальная). Устремляя δ к нулю, получим искомое семейство траекторий.

Действително, $h \to 0$ при $\delta \to 0$ и $q(0) \to 0$, так как $q(0) = Q(s_1) \in \in \partial B_\delta$, так что $q^{\cdot}(0) \to 0$ в силу интеграла энергии. В качестве M берем R. Теорема доказана.

К теоремам 4, 5 можно сделать замечание, аналогичное замечанию 3.1, когда максимум локальный.

Полученные результаты можно применить с соответствующими изменениями к обращению теоремы Рауса [5].

Автор благодарит В. В. Румянцева, под руководством которого была выполнена эта работа, А. В. Карапетяна — за полезные обсуждения.

Поступила 12 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959, стр. 282—289.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
4. *Четаев Н. Г.* О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1938, т. 98, кн. 9.
5. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange-Dirichlet und Routh. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1971, vol. 42, No. 4.
6. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., «Мир», 1974.
7. *Carathéodory C.* Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordung. Leipzig, Teubner, 1935.
8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1971.