Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Ву Туан

(Ханой)

Даются доказательства некоторых теорем об устойчивости по первому приближению относительно части переменных, обобщающих теоремы Ляпунова и Массера.

1. Случай, когда система линейного приближения правильная.

1°. Рассматривается нелинейная система

$$dx/dt = M(t)\,x + F(t, x), \quad x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

$$F(t, x) = \operatorname{col}(F_1(t, x), \ldots, F_n(t, x)), \quad F(t, 0) \equiv 0$$

$$M(t) \in C\,[t_0, \infty), \quad \sup_t \| M(t) \| < \infty$$

$M(t)$ — нижняя треугольная матрица порядка n, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Будем изучать устойчивость системы относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$. Введем обозначения

$$y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_m), \quad y_k = x_k \quad (k = 1, \ldots, m)$$

$$z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_p), \quad z_k = x_{k+m} \quad (k = 1, \ldots, p = n - m)$$

$$f(t, y, z) = \operatorname{col}(F_1(t, x), \ldots, F_m(t, x))$$

$$g(t, y, z) = \operatorname{col}(F_{m+1}(t, x), \ldots, F_n(t, x))$$

$$M(t) = \begin{Vmatrix} A(t) & 0 \\ C(t) & B(t) \end{Vmatrix}$$

$A(t)$ и $B(t)$ — нижние треугольные матрицы порядков $m \times m$ и $p \times p$ соответственно.

Тогда систему (1.1) можно записать в виде

$$dy/dt = A(t)\,y + f(t, y, z) \tag{1.2}$$

$$dz/dt = C(t)\,y + B(t)\,z + g(t, y, z)$$

Предположим, что

а) Вектор-функция $F(t, x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям единственности решения в области

$$t \geqslant t_0, \; \| y \| < H \; (H > 0), \; 0 \leqslant \| z \| < \infty$$

б) Решения системы (1.1) z-продолжимы; это означает, что любое решение $x(t)$ определено для всех $t \geqslant t_0$, при которых $\| y \| < H$.

Обозначим через $x = x(t;\ t_0,\ x_0)$ решение системы (1.1), определенное начальным условием $x(t_0;\ t_0,\ x_0) = x_0$.

Вместе с (1.2) рассмотрим линейную систему

$$dy^*/dt = A(t)\,y^* \tag{1.3}$$

Теорема 1. Если

1) линейная система (1.3) правильная в смысле Ляпунова;

2) все характеристические показатели системы (1.3) отрицательны

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m < 0$$

3) вектор-функция f удовлетворяет неравенству

$$\| f(t, y, z) \| \leqslant \psi(t) \| y \|^q \quad (q > 1) \tag{1.4}$$

в котором $\psi(t)$ — непрерывная положительная в $[t_0, \infty)$ функция, причем $\chi[\psi(t)] = 0$, то тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (1.1) экспоненциально y-устойчиво при $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\alpha_m < -\gamma < 0$. Для системы (1.1) выполним преобразование

$$x = we^{-\gamma(t-t_0)} \tag{1.5}$$

Тогда имеем

$$dw/dt = N(t)\,w + G(t, w) \tag{1.6}$$
$$N(t) = \gamma E + M(t), \quad G(t, w) = e^{\gamma(t-t_0)}F(t, we^{-\gamma(t-t_0)})$$

В результате замены (1.5) система (1.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&du/dt = A_1(t)\,u + f_1(t, u, v)\\
&dv/dt = C_1(t)\,u + B_1(t)\,v + g_1(t, u, v)\\
&u = ye^{\gamma(t-t_0)}, \quad v = ze^{\gamma(t-t_0)}\\
&u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m); \quad u_k = w_k\ (k = 1, \ldots, m)\\
&v = \operatorname{col}(v_1, \ldots, v_p); \quad v_k = w_{k+m} \quad (k = 1, \ldots, p)\\
&A_1 = \gamma E + A,\ B_1 = \gamma E + B,\ C_1 = C
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Очевидно, что $A_1(t)$, $B_1(t)$ — также нижние треугольные матрицы и

$$\begin{aligned}
&f_1(t, u, v) = e^{\gamma(t-t_0)}f(t, ue^{-\gamma(t-t_0)},\ ve^{-\gamma(t-t_0)})\\
&g_1(t, u, v) = e^{\gamma(t-t_0)}g(t, ue^{-\gamma(t-t_0)},\ ve^{-\gamma(t-t_0)})
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Кроме того, $w(t_0) = x(t_0)$, а $G(t, w)$ удовлетворяет условиям а), б), т. е. преобразование (1.5) сохраняет существование единственного решения и z-продолжимость решений.

Видно, что система

$$du^*/dt = A_1(t)\,u^* \tag{1.9}$$

правильна.

Пусть $H(t)$ $(H(t_0) = E)$ — нормированная фундаментальная нижняя треугольная матрица системы

$$dw^*/dt = N(t)\,w^* \tag{1.10}$$

Применяя метод вариаций постоянных, заменим дифференциальное нелинейное уравнение равносильным интегральным уравнением

(1.11) $$w(t) = H(t)\,w(t_0) + \int_{t_0} K(t,\tau)\,G(\tau, w(\tau))\,d\tau$$

$$K(t,\tau) = H(t)\,H^{-1}(\tau), \quad w(t_0) = \mathrm{col}\,(u(t_0),\ v(t_0)) = x(t_0)$$

Поскольку $H(t)$ — нижняя треугольная матрица, то $K(t,\tau)$ имеет такой же вид.

Согласно локальной теореме существования решений, для любой пары (t_0, w_0), где $\| u_0 \| < H$, существует решение $w(t)$ дифференциального уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному условию $w(t_0) = x(t_0)$, определенное в некотором интервале $t_0 \leqslant t < t_0 + l$, причем $\| u(t) \| < H$ при $t \in [t, t_0 + l)$.

Пусть $H(t)$ и $K(t,\tau)$ имеют вид

$$H(t) = \begin{Vmatrix} H_1(t) & 0 \\ H_3(t) & H_2(t) \end{Vmatrix}, \quad K(t,\tau) = \begin{Vmatrix} K_1(t,\tau) & 0 \\ K_3(t,\tau) & K_2(t,\tau) \end{Vmatrix}$$

H_1, K_1 и H_2, K_2 — нижние треугольные матрицы порядков $m \times m$ и $p \times p$ соответственно.

Тогда, согласно (1.11), вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

(1.12) $$u(t) = H_1(t)\,u(t_0) + \int_{t_0}^{t} K_1(t,\tau)\,f_1(\tau, u(\tau), v(\tau))\,d\tau$$

из которого вытекает оценка

(1.13) $$\| u(t) \| \leqslant \| H_1(t) \| \, \| u(t_0) \| + \int_{t_0}^{t} \| K_1(t,\tau) \| \, \| f_1(\tau, u(\tau), v(\tau)) \| \, d\tau$$

Так как все характеристические показатели $\beta_k = \alpha_k + \gamma$ линейной системы (1.9) отрицательны, то существует такое число $c_1 \geqslant 1$, что

(1.14) $$\| H_1(t) \| < c_1 \quad \text{при } t_0 \leqslant t < \infty$$

Кроме того, в силу оценки матрицы Коши для правильной системы с отрицательными характеристическими показателями ([3], стр. 266) имеем

(1.15) $$\| K_1(t,\tau) \| < c_2 e^{\varepsilon(\tau - t_0)} \quad \text{при } t_0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$$

На основании формул (1.4) и (1.8) получаем

(1.16) $$\| f_1(t, u, v) \| = e^{-\gamma(t-t_0)} \| f(t, u e^{-\gamma(t-t_0)}, v e^{-\gamma(t-t_0)}) \| <$$
$$< c_3 \exp\{[\varepsilon - (q-1)\gamma](t - t_0)\} \, \| u \|^q$$

где c_3 — достаточно большое положительное число.

Подставив (1.14) — (1.16) в (1.13), получаем оценку

(1.17) $$\| u(t) \| < c_1 \| u(t_0) \| + \int_{t_0}^{t} c_2 c_3 \exp\{[2\varepsilon - (q-1)\gamma](\tau - t_0)\} \| u(\tau) \|^q d\tau$$

$$t_0 \leqslant t < t_0 + l$$

Выберем положиттельное число ε столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\delta = (q - 1)\gamma - 2\varepsilon > 0$$

Тогда, применяя к неравенству

$$\| u(t) \| \leqslant c_1 \| u(t_0) \| + \int_{t_0}^{t} c_4 e^{-\delta(\tau - t_0)} \| u(\tau) \|^q d\tau \quad (c_4 = c_2 c_3) \tag{1.18}$$

лемму Бихари ([3], стр. 112), заключаем, что

$$\| u(t) \| \leqslant c_1 \| u(t_0) \| \; [1 - Q(t)]^{-1/(q-1)} \tag{1.19}$$

$$Q(t) = (q - 1)\, c_1^{q-1} \| u_1(t_0) \|_1^{q-1} \int_{t_0}^{t} c_4 e^{-\delta(\tau - t_0)} d\tau$$

если только

$$Q(t) < 1 \tag{1.20}$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(\tau - t_0)} d\tau < \frac{1}{\delta} < \infty$$

то можно всегда считать неравенство (1.20) выполненным, если только $\| u(t_0) \| = \| y(t_0) \|$ достаточно мало. Из (1.19) следует, что если $\| u(t_0) \|$ достаточно мало, то при любом $t \in [t_0, t_0 + l)$ точка $u(t)$ — внутренняя точка области $\{t_0 \leqslant t < \infty, \| u \| \leqslant H/2 < H\}$ и, следовательно, решение $w(t)$ бесконечно u-продолжаемо вправо. В силу предложения б) решение $w(t)$ бесконечно продолжаемо вправо.▌

Таким образом, при $t_0 \leqslant t < \infty$ имеет место неравенство

$$\| u(t) \| \leqslant L \| y_0 \| < H/2$$

где L — некоторая постоянная, зависящая от t_0.

Возвращаясь к переменной x, при $t_0 \leqslant t < \infty$ и $\| y(t_0) \| < \Delta < H$ (H достаточно мало), имеем

$$\| y(t) \| \leqslant L \| y(t_0) \| e^{-\gamma(t - t_0)} \leqslant L(\| y(t_0) \| + \| z(t_0) \|) e^{-\gamma(t - t_0)}$$

т. е. тривиальное решение $x \equiv 0$ нелинейной системы (1.1) экспоненциально y-устойчиво при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

2°. Рассмотрим нелинейную систему более общего вида

$$dx/dt = M(t)\, x + F(t, x); \; M(t) \in c\, [t_0, \infty), \; \sup_t \| M(t) \| < \infty \tag{1.21}$$

в которой $M(t)$ — $(n \times n)$-матрица, вектор-функция $F(t, x)$ удовлетворяет предположениям а), б) и $F(t, 0) \equiv 0$. Здесь будем пользоваться введенными выше обозначениями, а также следующими:

$$P_k x = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_k) \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

$$X_k = [x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}], \quad X_{n-k} = [x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}]$$

$G(X_k)$ — определитель Грама, составленный из векторов $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$.

Теорема 2. Пусть

1) для системы линейного приближения

$$dx^*/dt = M(t)\, x^* \tag{1.22}$$

системы (1.21) существует такой нормальный базис $X^* = [x^{*(1)}(t), \ldots, x^{*(n)}(t)]$, что

$$\inf_t \frac{G(X^*)}{G(X_m^*)\, G(X_{n-m}^*)} = \rho > 0 \tag{1.23}$$

2) линейная система (1.22) правильная в смысле Ляпунова,

3) характеристические показатели векторов $x^{*(1)}(t), \ldots, x^{*(m)}(t)$ отрицательны

$$\chi\,[x^{*(i)}(t)] = \alpha_i < 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.24}$$

4) для вектор-функции $F(t, x)$ имеет место неравенство

$$\| f(t, y, z) \| \leqslant \psi(t)\, \| y \|^q \tag{1.25}$$

где $\psi(t)$ — непрерывная положительная $b\ [t_0, \infty)$ функция, причем

$$\chi\,[\psi(t)] = 0 \tag{1.26}$$

Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (1.21) экспоненциально y-устойчиво при $t \to \infty$.

Доказательство. В силу условия (1.23) существует ляпуновское преобразование $x^* = U(t)\,\xi^*$, переводящее систему (1.22) в блочно-нижнюю треугольную систему (см. [1], стр. 267)

$$d\xi^*/dt = Q(t)\, \xi^* \tag{1.27}$$

При этом преобразовании нелинейная система (1.21) принимает вид

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= Q(t)\,\xi + G(t, \xi) \\ Q(t) &= U^{-1}(t)\, M(t)\, U(t) - U^{-1}(t)\, U^{\cdot}(t) \\ G(t, \xi) &= U^{-1}(t)\, F(t, U(t)\,\xi) \end{aligned} \tag{1.28}$$

или

$$\begin{aligned} d\eta/dt &= A(t)\,\eta + h(t, \eta, \zeta) \\ d\zeta/dt &= B(t)\,\zeta + h_1(t, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ — нижние треугольные матрицы порядков m и $p = n - m$ соответственно, η — m-мерный вектор, ζ — p-мерный вектор, $\xi = \mathrm{col}\,(\eta, \zeta)$, $G(t, \xi) = \mathrm{col}\,(h(t, \eta, \zeta), h_1(t, \eta, \zeta))$.

Так как система (1.22) правильная, то система (1.27) также правильна. В силу критерия правильности треугольной системы ([2], стр. 17 4) линейная система

$$d\eta^*/dt = A(t)\, \eta^*$$

правильна.

Поскольку ляпуновское преобразование не меняет характеристические показатели, то

$$\chi\,[\eta^{*(i)}] = \chi\,[\xi^{*(i)}] = \chi\,[x^{*(i)}] = \alpha_i < 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Учитывая ограниченность матриц $U(t)$, $U^{-1}(t)$, из формул (1.25) и (1.29) получаем

$$\| h(t, \eta, \zeta) \| \leqslant \psi_1(t) \| \eta \|^q \quad (q > 1)$$

где $\psi_1(t)$ — непрерывная положительная в $[t_0, \infty)$ функция, которая удовлетворяет равенству (1.26). Кроме того, видно, что $G(t, \xi)$ удовлетворяет предположениям типа а), б).

Таким образом, для системы (1.29) выполнены все условия теоремы 1, следовательно, тривиальное решение $\xi \equiv 0$ системы (1.29) экспоненциально η-устойчиво при $t \to \infty$, т. е.

$$\| \eta(t) \| \leqslant L(\| \eta(t_0) \| + \| \zeta(t_0) \|) e^{-\gamma(t-t_0)}$$

где L — постоянная; величина $\| \eta(t_0) \|$ достаточно мала и $\alpha_i < -\gamma < 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Так как $x = U(t)\xi$, то

$$\| y(t) \| \leqslant \| U(t) \| \| \eta(t) \| \leqslant L_1(\| y(t_0) \| + \| z(t_0) \|) e^{-\gamma(t-t_0)}$$

Это означает, что решение $x \equiv 0$ системы (1.21) экспоненциально y-устойчиво при $t \to \infty$. Теорема доказана.

2. Случай, когда система линейного приближения не является правильной. Изучим задачу устойчивости по первому приближению относительно части переменных в случае, когда система линейного приближения не является правильной.

1°. Пусть дана дифференциальная система

$$dx/dt = M(t)x + F(t, x) \tag{2.1}$$

$$M(t) \in C[t_0, \infty), \quad \sup_t \| M(t) \| < \infty$$

где $M(t)$ — нижняя треугольная матрица, $F(t, x)$ удовлетворяет предположениям а), б) из п. 1 и $F(t, 0) \equiv 0$.

Систему (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} dy/dt &= A(t)y + f(t, y, z) \\ dz/dt &= C(t)y + B(t)z + g(t, y, z) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорема 3. Пусть

1) имеет место неравенство

$$\| f(t, y, z) \| \leqslant \psi(t) \| y \|^q \quad (q > 1) \tag{2.3}$$

где $\psi(t)$ — непрерывная положительная функция и $\chi[\psi(t)] = 0$,

2) характеристические показатели линейной системы

$$dy^*/dt = A(t)y^* \tag{2.4}$$

удовлетворяют условию

$$\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m = \alpha < -\frac{\varkappa}{q-1} \leqslant 0$$

в котором $\varkappa$ — коэффициент неправильности системы (2.4)

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(t_1)\, dt_1$$

Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ нелинейной системы (1.1) (или системы (2.2)) асимптотически y-устойчиво при $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть γ — такое положительное число, что

(2.5) $$\varkappa/(q-1) < \gamma < -\alpha$$

Положим

$$D = \operatorname{diag}(\alpha_1 + \gamma, \ldots, \alpha_m + \gamma, 1, \ldots 1) = \operatorname{diag}(D', E)$$

Пусть $X(t) = [x_{jk}(t)]_n{}^n$ — нормированная фундаментальная нижняя треугольная матрица ($X(t_0) = E$) линейной системы

(2.6) $$dx^*/dt = M(t)\, x^*$$

Тогда очевидно, что матрица $Y(t) = [y_{jk}(t)]_m{}^m$, в которой $y_{ik}(t) = x_{jk}(t)$ при $j, k = 1, \ldots, m$, будет фундаментальной матрицей системы (2.4), причем $Y(t_0) = E$.

Выполнив для системы (2.1) преобразование

$$x = X(t)\, e^{-Dt} w, \quad w = \operatorname{col}(u, v)$$

где u — m-мерный вектор, v — $(n-m)$-мерный вектор, получим

$$\frac{dx}{dt} = X(t)\, e^{-Dt} \frac{dw}{dt} + X^{\cdot}(t)\, e^{-Dt} w - X(t)\, e^{-Dt} D w =$$
$$= M(t)\, X(t)\, e^{-Dt} w + F(t, X(t)\, e^{-Dt} w)$$

откуда следует, что

(2.7) $$dw/dt = Dw + e^{Dt} X^{-1}(t)\, F(t, X(t) e^{-Dt} w)$$

Поскольку $X(t)$ — нижняя треугольная матрица, то матрицы $X^{-1}(t)$, $e^{Dt} X^{-1}(t)$ — также нижние треугольные. Более того, из (2.7) следует, что

(2.8) $$du/dt = D'u + h(t, u, v)$$
$$h(t, u, v) = P_m\, [e^{Dt} X^{-1}(t)\, F(t, X(t)\, e^{-Dt} w)]$$

Как известно,

$$Y^{-1} = \frac{1}{\Delta(t)} \| \Delta_{kj}(t) \|, \quad \Delta(t) = \det Y(t)$$

где $\Delta_{kj}(t)$ — алгебраические дополнения определителя $\Delta(t)$. На основании формулы Остроградского — Лиувилля, учитывая равенство $\Delta(t_0) = 1$, находим

$$\Delta(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(t_1)\, dt_1$$

Следовательно,

$$Y^{-1}(t) = \left\| \Delta_{kj}(t) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(t_1)\, dt_1\right] \right\|$$

Отсюда

(2.9) $$\chi[e^{D't} Y^{-1}(t)] = \chi\left[e^{(\alpha_j+\gamma)t} \Delta_{kj}(t) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(t_1)\, dt_1\right]\right] \leqslant$$
$$\leqslant \max_{j,k}\left[\alpha_j + \gamma + \sum_k \alpha_k - \alpha_j - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(t_1)\, dt_1\right] = \varkappa + \gamma$$
$$\chi[Y(t)\, e^{-D't}] = \chi\, \{[y_{jk} e^{-(\alpha_k+\gamma)t}]\} \leqslant \max_{j,k} [\alpha_k - (\alpha_k + \gamma)] = -\gamma < 0$$

Так как $\chi\,[Y(t)\,e^{-D't}] < 0$, то $Y(t)\,e^{-D't} \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть $\| u \| \leqslant H / M$. Тогда

$$\| y \| \leqslant \| Y(t)\,e^{-D't} \| \, \| u \| \leqslant H$$

Оценим нелинейный член $h(t, u, v)$ системы (2.8) при $\| u \| \leqslant H / M$. Используя неравенство (2.3), имеем

$$\| h(t, u, v) \| \leqslant \| P_m (e^{Dt} X^{-1}(t) F(t, X(t)\,e^{-Dt}w)) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| e^{D't} Y^{-1}(t) \| \; | \psi(t) | \; \| Y(t)\,e^{-D't} \|^q \| u \|^q = \varphi(t) \| u \|^q$$
$$\varphi(t) = \| e^{D't} Y^{-1}(t) \| \; | \psi(t) | \; \| Y(t)\,e^{-Dt} \|^q$$

В силу неравенств (2.9) и свойств характеристических показателей праведлива оценка

$$\chi\,[\varphi(t)] = \chi\,[\| e^{D't} Y^{-1}(t) \| \; | \psi(t) | \; \| Y(t)\,e^{-D't} \|^q] \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa + \gamma + 0 - q\gamma = \varkappa - (q-1)\gamma$$

На основании неравенства (2.5) получаем

$$\chi\,[\varphi(t)] < 0$$

Следовательно;

$$\| h(t, u, v) \| \leqslant C \| u \|^q, \quad q > 1$$
$$(t_0 \leqslant t < \infty, \; \| u \| \leqslant H / M)$$

Таким образом, в силу теоремы Ляпунова об устойчивости квазилинейной системы ([2], стр. 257) тривиальное решение $u \equiv 0$ системы (2.8) асимптотически устойчиво при $t \to \infty$. Это означает, что решение $w \equiv 0$ системы (2.7) асимптотически u-устойчиво при $t \to \infty$. Отсюда на основании формул $y = Y(t) \exp(-D't) u$ и $\chi\,[Y(t) \exp(-D't)] < 0$ следует, что тривиальное решение системы (1.1) асимптотически y-устойчиво при $t \to \infty$.

Теорема 3 доказана.

2°. Переходим к рассмотрению дифференциальной системы более общего вида ($M(t)$ — $(n \times n)$-матрица)

$$dx / dt = M(t)x + F(t, x)$$

Докажем теорему, аналогичную теореме 3 для такой общей системы.

Прежде всего докажем две леммы.

Пусть дана линейная однородная система порядка n

$$dx / dt = S(t)\,x, \quad S(t) \in C\,[t_0, \infty), \quad \sup_t \| S(t) \| < \infty \tag{2.10}$$

Предположим, что (2.10) — неправильная система с коэффициентом неправильности

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} S(t_1)\,dt_1 \tag{2.11}$$

в котором $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ — полный спектр системы (2.10).

Если для системы (2.10) выполнить преобразование Ляпунова $x = U(t)\, y$, то эта система преобразуется к виду

$$(2.12) \qquad dy/dt = Q(t)\, y$$
$$Q(t) = U^{-1}(t)\, S(t)\, U(t) - U^{-1}(t)\, U^{\cdot}(t)$$

Обозначим полный спектр системы (2.12) через $\alpha_1' \leqslant \alpha_2' \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n'$, а коэффициент неправильности системы (2.12) — через $\varkappa'$.

Лемма 1. Ляпуновское преобразование сохраняет коэффициент неправильности линейной однородной системы вида (2.10), т. е. $\varkappa = \varkappa'$.

Доказательство леммы непосредственно следует из того, что ляпуновское преобразование сохраняет характеристические показатели и величину предела в формуле (2.11).

Будем называть число

$$\varkappa(m) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k - \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{m} s_i(t_1)\, dt_1$$

коэффициентом m-частичной неправильности линейной системы (2.10) (s_i — диагональные элементы матрицы $S(t)$).

Лемма 2. Коэффициент частичной неправильности линейной системы сохраняется при таком ляпуновском преобразовании $x = U(t)\, y$, что матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид

$$U(t) = \mathrm{diag}\,(U_m,\ U_{n-m})$$

где U_m, U_{n-m} — квадратные матрицы порядка m и $n - m$ соответственно.

Доказательство леммы очевидно.

Рассмотрим теперь нелинейную систему ($M(t)$ — ($n \times n$)-матрица)

$$(2.13) \qquad dx/dt = M(t)\, x + F(t, x)$$
$$M(t) \in C\,[t_0, \infty), \quad \sup_t \| M(t) \| < \infty$$

$F(t, x)$ удовлетворяет предположениям а), б) и $F(t, 0) \equiv 0$.

Используя введенные выше обозначения, можем записать (2.13) в виде

$$(2.14) \qquad dy/dt = A(t)\, y + B(t)\, z + f(t, y, z)$$
$$dz/dt = C(t)\, y + D(t)\, z + g(t, y, z)$$

Теорема 4. Пусть

1) для системы (2.14) существует нормальная фундаментальная матрица блочно-диагонального вида $U(t) = \mathrm{diag}\,(U_m(t),\ U_{n-m}(t))$, удовлетворяющая неравенству

$$(2.15) \qquad \inf \frac{G(U)}{G(U_m)\, G(U_{n-m})} = \rho > 0$$

2) имеет место неравенство

$$\| f(t, y, z) \| \leqslant \psi(t)\, \| y \|^q \quad (q > 1)$$

где $\psi(t)$ — непрерывная положительная функция, причем $\chi\,[\psi(t)] = 0$,

3) характеристические показатели линейной системы

$$dy^*/dt = A(t)\, y^*$$

удовлетворяют условию

$$\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m = \alpha < -\frac{\varkappa}{q-1} \leqslant 0$$

где $\varkappa$ — коэффициент m-частичной неправильности.

Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ нелинейной системы (2.13) (или (2.14)) асимптотически y-устойчиво при $k \to \infty$.

Доказательство. Из условия 1) теоремы следует, что линейную дифференциальную систему

$$dx^*/dt = M(t)\, x^*$$

можно перевести[1] в блочно-нижнюю треугольную систему при помощи ляпуновского преобразования $x^* = U(t)\, \xi^*$, где $U(t) = \mathrm{diag}\,(U_m, U_{n-m})$.

Пусть приведенная система имеет вид

$$d\xi^*/dt = Q(t)\, \xi^*$$

где $Q(t)$ — блочно-нижняя треугольная матрица. Тогда нелинейная система (2.13) преобразуется в систему

$$d\xi/dt = Q(t)\, \xi + G(t, \xi) \tag{2.16}$$

$$\xi = \mathrm{col}\,(\eta, \zeta),\ Q(t) = \mathrm{diag}\,(A_1(t), B_1(t)),\ G(t, \xi) = \mathrm{col}\,(h(t, \eta, \zeta), h_1(t, \eta, \zeta))$$

где η — m-мерный вектор, ζ — $(n-m)$-мерный вектор.

На основании свойств ляпуновского преобразования и леммы получаем равенства

$$\varkappa' = \varkappa,\ \alpha_i' = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

в которых $\varkappa$ — коэффициент неправильности, α_i' — характеристические показатели системы

$$d\eta^*/dt = A_1(t)\, \eta^*$$

Отсюда

$$\alpha_1' \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m' = \alpha < -\frac{\varkappa'}{q-1} \leqslant 0$$

Так как матрицы $U(t)$, $U^{-1}(t)$ ограничены и $h(t, \eta, \zeta) = U_m^{-1}(t)\, f(t, U_m^{-1}(t)\, \eta, U_{n-m}^{-1}(t)\, \zeta)$ в силу неравенства (2.15) получаем

$$\| h(t, \eta, \zeta) \| \leqslant \psi_1(t)\, \| \eta \|^q \quad (q > 1)$$

где $\psi_1(t)$ — положительная функция при $t \in [t_0, \infty)$ и $\chi[\psi_1(t)] = 0$.

Применяя теорему 3, заключаем, что тривиальное решение $\xi \equiv 0$ системы (2.16) асимптотически ζ-устойчиво при $t \to \infty$.

Отсюда видно, что решение $x \equiv 0$ системы (2.13) асимптотически y-устойчиво при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

Поступила 8 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.