Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННОЙ И ПОЧТИ ПОСТОЯННОЙ МАТРИЦЕЙ

Ю. А. Кривошеев, А. В. Луценко

(Харьков)

Рассматривается вопрос об условиях устойчивости и асимптотической устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем. Для систем с постоянными коэффициентами установлены критерии устойчивости, асимптотической устойчивости движения относительно части переменных. Для систем с почти постоянными коэффициентами приведены достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости движения относительно части переменных. Работа примыкает к исследованиям [1–3].

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = A\mathbf{x} \tag{1.1}$$

в которой A — постоянная квадратная матрица порядка n, $\mathbf{x} \in E_n$. Представим вектор $\mathbf{x}$ в виде [1, 2]

$$\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$$
$$m > 0, \quad p \geqslant 0, \quad m + p = n$$

Устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ будем называть y-устойчивостью. Если ввести $m \times n$-матрицу

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}$$

то вектор y можно представить в виде $\mathbf{y} = H\mathbf{x}$.

В работе [3], где исследовался вопрос об асимптотической устойчивости движения $\mathbf{x} = 0$ относительно части переменных для системы $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = A\mathbf{x} + \varphi(t, \mathbf{x})$, даны условия асимптотической y-устойчивости движения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1). Этот результат приведен в теореме 2.

Докажем вначале вспомогательное утверждение, n-мерный аналог которого можно найти в [4].

Лемма. Движение $\mathbf{x} = 0$ системы $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = A(t)\mathbf{x}$ с кусочно-непрерывной на $[0, \infty]$ матрицей $A(t)$ будет:

1) y-устойчивым тогда и только тогда, если компонента y (t) каждого решения x (t) ограничена на $[0, \infty)$;

2) асимптотически y-устойчивым тогда и только тогда, если компонента y (t) каждого решения x (t) стремится к нулю при $t \to \infty$.

Доказательство. 1) Пусть движение $\mathrm{x} = 0$ y-устойчиво. Для произвольных $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ можно найти $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что для любого решения x (t) из $\|\mathrm{x}(t_0)\| < \delta$ следует $\|\mathrm{y}(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. Рассмотрим фундаментальную систему решений $\mathrm{x}_1(t), \ldots, \mathrm{x}_n(t)$, удовлетворяющих условиям $\|\mathrm{x}_i(t_0)\| < \delta$, $i = 1, \ldots, n$. Фундаментальная матрица $\Phi(t) = [\mathrm{x}_1(t), \ldots, \mathrm{x}_n(t)]$, составленная из этих решений, допускает при $t \geqslant 0$ оценку $\|H\Phi(t)\| \leqslant L$, где $L > 0$. Следовательно, для каждого решения x (t) при $t \geqslant 0$ имеем

$$\|\mathrm{y}(t)\| = \|H\mathrm{x}(t)\| = \|H\Phi(t)\,\mathrm{c}\| \leqslant L\|\mathrm{c}\|$$

Обратно, пусть компонента y (t) каждого решения x (t) ограничена. Рассмотрим фундаментальную матрицу $\Phi(t)$, удовлетворяющую условию $\Phi(t_0) = I$, где I — единичная матрица. Существует $L > 0$, такое, что $\|H\,\Phi(t)\| \leqslant L$ при $t \geqslant 0$, поэтому из соотношения $\mathrm{x}(t) = \Phi(t)\,\mathrm{x}(t_0)$ следует $\|\mathrm{y}(t)\| = \|H\Phi(t)\,\mathrm{x}(t_0)\| \leqslant L\|\mathrm{x}(t_0)\|$. Если теперь выбрать $\delta = \varepsilon L^{-1}$, то из $\|\mathrm{x}(t_0)\| < \delta$ будет вытекать $\|\mathrm{y}(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$.

2) Пусть движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво. Существует $\Delta(t_0) > 0$, такое, что каждое решение x (t), для которого $\|\mathrm{x}(t_0)\| < \Delta$, удовлетворяет условию

$$\lim \|\mathrm{y}(t)\| = 0, \quad t \to \infty \tag{1.2}$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$, составленная из решений $\mathrm{x}_1(t), \ldots, \mathrm{x}_n(t)$, удовлетворяющих условиям $\|\mathrm{x}_i(t_0)\| < \Delta\ (i = 1, \ldots, n)$, обладает свойством $\|H\Phi(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому для каждого решения x (t) имеем

$$\lim \|\mathrm{y}(t)\| = \lim \|H\Phi(t)\,\mathrm{c}\| = 0, \quad t \to \infty$$

Обратно, пусть компонента y (t) каждого решения x (t) удовлетворяет условию (1.2). Тогда $\|H\Phi(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица, удовлетворяющая условию $\Phi(t_0) = I$. Следовательно, при некотором $L > 0$ будет $\|H\Phi(t)\| \leqslant L$, $t \geqslant 0$. Из соотношения $\|\mathrm{y}(t)\| \leqslant L\|\mathrm{x}(t_0)\|$ вытекает, что если выбрать $\delta = \varepsilon L^{-1}$, то будет $\|\mathrm{y}(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, что вместе с (1.2) означает асимптотическую y-устойчивость движения $\mathrm{x} = 0$.

В дальнейшем существенную роль играют корневые векторы [5]. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — попарно различные собственные числа матрицы A и пусть собственному числу λ_α соответствуют s_α линейно-независимых собственных векторов пространства E_n. Обозначим эти векторы $\mathrm{v}_{11}{}^\alpha, \ldots, \mathrm{v}_{s_\alpha 1}^\alpha$; $\mathrm{v}_{\beta\gamma}^\alpha$ — корневой вектор высоты γ, порожденный собственным вектором $v_{\beta 1}{}^\alpha$. Умножив матрицу $\exp[(A - \lambda_\alpha I)t]$ на корневой вектор $\mathrm{v}_{\beta\gamma}{}^\alpha$, получим соотношение

$$\exp[(A - \lambda_\alpha I)\,t]\,\mathrm{v}_{\beta\gamma}^\alpha = \mathrm{v}_{\beta\gamma}^\alpha + t\,(A - \lambda_\alpha I)\,\mathrm{v}_{\beta\gamma}^\alpha + \ldots + \frac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}(A - \lambda_\alpha I)^{\gamma-1}\,\mathrm{v}_{\beta\gamma}^\alpha$$

откуда вытекает равенство

$$\exp(At)\,\mathrm{v}_{\beta\gamma}^\alpha = \exp(\lambda_\alpha t)\left(\mathrm{v}_{\beta\gamma}^\alpha + t\,\mathrm{v}_{\beta\gamma-1}^\alpha + \ldots + \frac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}\,\mathrm{v}_{\beta 1}^\alpha\right) \tag{1.3}$$

В собственном подпространстве, отвечающем собственному числу λ_i, можно выбрать базис $\mathrm{v}_{11}{}^i, \ldots, \mathrm{v}_{s_i 1}^i$ так, что каждому собственному вектору $\mathrm{v}_{r1}{}^i$ $(r = 1, \ldots, s_i)$ отвечают [5] корневые векторы $\mathrm{v}_{r1}{}^i, \ldots, \mathrm{v}_{rp_r}^i$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}
&A\mathbf{v}_{r1}{}^i = \lambda_i \mathbf{v}_{r1}{}^i \\
&A\mathbf{v}_{r2}{}^i = \lambda_i \mathbf{v}_{r2}{}^i + \mathbf{v}_{r1}{}^i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&A\mathbf{v}^i_{rp_r} = \lambda_i \mathbf{v}^i_{rp_r} + \mathbf{v}^i_{rp_r-1}
\end{aligned}$$

причем эти корневые векторы ($r = 1, \ldots, s_i$; $i = 1, \ldots, k$) образуют базис пространства E_n.

Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}_0$ системы (1.1). Разложим вектор $\mathbf{x}_0$ по базисным корневым векторам матрицы A

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{s_i} (b_{r1}{}^i \mathbf{v}_{r1}{}^i + \ldots + b^i_{rp_r} \mathbf{v}^i_{rp_r})$$

На основании (1.3) получаем

$$\exp(At)\,\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{s_i} \exp(\lambda_i t)\,(b_{r1}{}^i \mathbf{v}_{r1}{}^i + b_{r2}{}^i (\mathbf{v}_{r2}{}^i + t\mathbf{v}_{r1}{}^i) + \ldots$$

$$\ldots + b^i_{rp_r} (\mathbf{v}^i_{rp_r} + t\mathbf{v}^i_{rp_r-1} + \ldots + \frac{t^{p_r-1}}{(p_r-1)!} \mathbf{v}_{r1}{}^i))$$

Выделим компоненту $\mathbf{y}(t)$ этого решения

$$\mathbf{y}(t) = H\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{S}_i(t)$$

$$\mathrm{S}_i(t) = \sum_{r=1}^{s_i} \exp(\lambda_i t) \left(b_{r1}{}^i H\mathbf{v}_{r1}{}^i + b_{r2}{}^i (H\mathbf{v}_{r2}{}^i + tH\mathbf{v}_{r1}{}^i) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + b^i_{rp_r} \left(H\mathbf{v}^i_{rp_r} + tH\mathbf{v}^i_{rp_r-1} + \ldots + \frac{t^{p_r-1}}{(p_r-1)!} H\mathbf{v}^i{}_{r1} \right) \right)$$

Множество индексов $\Omega = \{1, \ldots, k\}$ разобьем на три подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. В них включим индексы $i \in \Omega$, для которых $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ соответственно. В таком случае вектор $\mathbf{y}(t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i\in\Omega_1} \mathrm{S}_i(t) + \sum_{i\in\Omega_2} \mathrm{S}_i(t) + \sum_{i\in\Omega_3} \mathrm{S}_i(t) \tag{1.4}$$

Теорема 1. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ для $i = 1, \ldots, l$ и $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$ для $i = l + 1, \ldots, k$.[1] Движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) y-устойчиво тогда и только тогда, когда подпространству $G = \{\mathbf{x}: H\mathbf{x} = 0\}$ принадлежат:

а) корневые векторы, отвечающие собственным числам λ с $\operatorname{Re}\lambda = 0$, за исключением, быть может, векторов максимальной высоты, т. е. векторы $\mathbf{v}_{r1}{}^i, \ldots, \mathbf{v}^i_{rp_r-1}$ ($r = 1, \ldots, s_i$; $i = 1, \ldots, l$);

б) корневые векторы, отвечающие собственным числам λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Доказательство. Докажем сначала достаточность условий теоремы. Если выполнены оба условия, то (1.4) принимает вид

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i\in\Omega_1} \sum_{r=1}^{s_i} \exp(\lambda_i t)\, b^i_{rp_r} H\mathbf{v}^i_{rp_r} + \sum_{i\in\Omega_2} \mathrm{S}_i(t)$$

Так как $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ при $i \in \Omega_1$ и $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ при $i \in \Omega_2$, то все слагаемые полученного выражения ограничены на $[0, \infty)$. Следовательно, существует $L > 0$, такое, что $\| \mathbf{y}(t) \| \leqslant L$ при $0 \leqslant t < \infty$. Применив лемму, получаем y-устойчивость движения $\mathbf{x} = 0$.

Докажем необходимость условий теоремы. Предположим, что нарушено первое условие. Пусть для некоторого $i \in \Omega_1$ и некоторого r $(1 \leqslant r \leqslant s_i)$ найдется номер $q \geqslant 1$, такой, что

$$H\mathbf{v}^i_{rp_r-q} \neq 0 \tag{1.5}$$

В таком случае в качестве $\mathbf{x}_0$ возьмем вектор $\mathbf{v}^i_{rp_r}$. Тогда

$$\mathbf{y}(t) = H \exp(At)\, \mathbf{v}^i_{rp_r} = \exp(\lambda_i t)\Big(H\mathbf{v}^i_{rp_r} + \ldots + \frac{t^q}{q!} H\mathbf{v}^i_{rp_r-q} + \ldots + \frac{t^{p_r-1}}{(p_r-1)!} H\mathbf{v}_{r1}{}^i\Big) \tag{1.6}$$

Отсюда в силу (1.5) следует, что величина $\| \mathbf{y}(t) \|$ не ограничена при $t \to \infty$.

Предположим теперь, что нарушено второе условие теоремы. Пусть для некоторого $i \in \Omega_3$ и некоторого r найдется номер $q \geqslant 0$, такой, что

$$H\mathbf{v}^i_{rp_r-q} \neq 0 \tag{1.7}$$

Возьмем, как и в предыдущем случае, в качестве $\mathbf{x}_0$ вектор $\mathbf{v}^i_{rp_r}$. Тогда на основании равенства (1.6) и условия (1.7) получаем неограниченность $\| \mathbf{y}(t) \|$ при $t \to \infty$.

Теорема 2. Движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво в том и только в том случае, если все корневые векторы матрицы A, отвечающие собственным числам λ с $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, принадлежат подпространству $G = \{\mathbf{x} : H\mathbf{x} = 0\}$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться в помощью соотношений (1.4), (1.6). Алгебраический вариант теоремы приведен в [3].

2. Следующие две теоремы представляют собой распространение результатов Беллмана [6] на случай устойчивости относительно части переменных.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = (A + B(t))\,\mathbf{x} \tag{2.1}$$

где матрица $B(t)$ кусочно-непрерывна на $[0, \infty)$.

Теорема 3. Если движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) y-устойчиво, то таким же свойством обладает движение $\mathbf{x} = 0$ системы (2.1) при условии, что последние $n - m$ столбцов матрицы $B(t)$ состоят из нулей и

$$\int_0^\infty \| B(t) \|\, dt < \infty$$

Доказательство. В силу формулы Коши имеем

$$\mathbf{x}(t) = \exp(At)\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]\, B(\tau)\, \mathbf{x}(\tau)\, d\tau$$

Умножив это равенство на H, получим

$$(2.2)\qquad H\mathbf{x}(t) = H\exp(At)\mathbf{x}_0 + \int_0^t H\exp[A(t-\tau)]B(\tau)\mathbf{x}(\tau)\,d\tau$$

Так как движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) y-устойчиво, то функция $H\exp(At)$ ограничена, т. е. $\|H\exp(At)\| \leqslant M$ при $0 \leqslant t < \infty$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|H\mathbf{x}(t)\| \leqslant M\|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t M\|B(\tau)\|\,\|H\mathbf{x}(\tau)\|\,d\tau$$

откуда

$$\|H\mathbf{x}(t)\| \leqslant M\|\mathbf{x}_0\|\exp\left[M\int_0^t \|B(\tau)\|\,d\tau\right] \leqslant$$

$$\leqslant M\|\mathbf{x}_0\|\exp\left[M\int_0^\infty \|B(\tau)\|\,d\tau\right]$$

Эта оценка означает, что компонента $\mathbf{y}(t)$ каждого решения $\mathbf{x}(t)$ системы (2.1) ограничена. Следовательно, в силу леммы движение $\mathbf{x} = 0$ y-устойчиво.

Если рассмотреть систему

$$y^{\cdot} = (1+t^2)^{-1}z, \quad z^{\cdot} = z$$

можно обнаружить, что, вообще говоря, нельзя отказаться от требования, чтобы последние $n - m$ столбцов матрицы $B(t)$ были нулевыми. Действительно, если положить

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & (1+t^2)^{-1} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

условия теоремы 3 будут выполнены, за исключением требования, чтобы последний $n - m = 1$) столбец матрицы B был нулевым. Каждое решение системы имеет вид

$$y(t) = y_0 + z_0\int_0^t (1+\tau^2)^{-1}\exp(\tau)\,d\tau$$

$$z(t) = z_0\exp(t)$$

Отсюда вытекает, что при $z_0 \neq 0$ величина $\|y(t)\|$ не ограничена при $t \to \infty$.

Теорема 4. Если движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво, то таким же свойством обладает движение $\mathbf{x} = 0$ системы (2.1) при условии, что последние $n - m$ столбцов матрицы $B(t)$ состоят из нулей и $\|B(t)\| \leqslant \varepsilon$, где ε достаточно мало.

Доказательство. Положим $2a = \max_{i\in\Omega_2} \operatorname{Re}\lambda_i$.

Тогда

$$(2.3)\qquad \|H\exp(At)\| = \left\|\sum_{i\in\Omega_2}\exp(\lambda_i t)Q_i(t)\right\| \leqslant \sum_{i\in\Omega_2}\|Q_i(t)\|\exp(2at)$$

Здесь $Q_i(t)$ — полиномы степени не выше n, поэтому оценку (2.3) можно заменить оценкой

$$\|H\exp(At)\| \leqslant c\exp(at)$$

В таком случае из (2.2) получим

$$\| H\mathbf{x}(t) \| \leqslant c \| \mathbf{x}_0 \| \exp(at) + c\varepsilon \int_0^t \exp[a(t-\tau)] \| H\mathbf{x}(\tau) \| d\tau$$

После умножения обеих частей этого неравенства на $\exp(-at)$ и применения неравенства Гронуолла — Беллмана получим оценку

$$\| H\mathbf{x}(t) \| \exp(-at) \leqslant c \| \mathbf{x}_0 \| \exp(c\varepsilon t)$$

Если $c\varepsilon + a < 0$, то будет выполняться соотношение

$$\lim \| H\mathbf{x}(t) \| = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

что эквивалентно в силу леммы асимптотической у-устойчивости движения $\mathbf{x} = 0$ системы (2.1).

Пример

$$y^{\cdot} = -y + \varepsilon(1 + |t|^{-1})z, \qquad z^{\cdot} = z$$

показывает, что и здесь нельзя отказаться от требования, чтобы последние $n - m$ столбцов матрицы $B(t)$ были нулевыми. Действительно, если положить

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon(1 + |t|)^{-1} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

то условия теоремы 4 будут выполнены, за исключением требования, чтобы последний столбец матрицы B был нулевым. При любом $\varepsilon \neq 0$ компонента

$$y(t) = \exp(-t)\left(y_0 + \varepsilon \int_0^t (1 + |\tau|)^{-1} \exp(2\tau)\, d\tau\right)$$

не ограничена при $t \to \infty$.

Поступила 1 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4.
2. *Озиранер А. С.*, *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
3. *Луценко А. В.*, *Стадникова Л. В.* О частичной устойчивости по первому приближению. Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, № 8.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
5. *Фаддеев Д. К.*, *Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., Физматгиз, 1963.
6. *Bellman R.* Stability theory of differential equations. New York, McGraw-Hill, 1953. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1954.)