Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531/534

ОБ ОПИСАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ[1]

Л. И. Седов

(Москва)

Для построения динамических физических моделей гравитационного поля в рамках континуумов, представляющих собой четырехмерные римановы пространства — время с локальной структурой псевдоевклидового пространства Минковского, рассмотрим сначала методы введения некоторых кинематических характеристик для таких пространств.

Всякой глобальной координатной системе отвечают четыре семейства координатных линий. В общем случае можно выделить координатные системы, в которых одно из координатных семейств составлено из времениподобных линий или из изотропных линий. Каждую из линий этого семейства можно рассматривать как мировую линию индивидуализированных точек, образующих трехмерное многообразие точек «идеальной среды».

Можно рассматривать различные координатные системы для одной и той же системы мировых линий, характеризующих идеальную среду, которую можно рассматривать как систему отсчета. Простейшим примером такого рода систем отсчета служат мировые линии подвижных точек различных материальных континуумов, для которых соответствующие системы координат представляют собой лагранжевы сопутствующие системы координат. Для одной и той же системы мировых линий — системы отсчета — можно вводить различные системы координат с разными другими тремя координатными семействами линий; с другой стороны, для каждой координатной системы с одними и теми же времениподобными или изотропными координатными линиями можно вводить соответствующую систему отсчета.

Единичный вектор, касательный к времениподобной мировой линии, по определению, называется четырехмерной скоростью точек идеальной среды; для изотропных элементов мировых линий также можно вводить четырехмерные касательные векторы, однако их длина равна нулю.

В каждом римановом пространстве можно вводить много разнообразных идеальных сред и соответствующих систем отсчета, например частные виды систем отсчета при наличии различного рода симметрии пространства Римана, системы отсчета с мировыми линиями — геодезическими, в частности синхронные системы координат, система отсчета с изотроп-

---

[1] Доклад на конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Эйнштейна (ГДР, Берлин, 2 марта 1979 г.).

ными мировыми линиями, в частности с изотропными геодезическими, системы гармонических координат и т. п. В каждом из перечисленных примеров соответствующие системы отсчета, вообще говоря, не связаны однозначно с римановым пространством.

Ниже вводится эффективным способом специальная сопутствующая система отсчета идеальной среды, или соответствующая система тетрад, связанная однозначно инвариантным образом с римановым пространством.

Можно вводить две сопутствующие системы отсчета: одну для наблюдателя, а другую как лагранжеву систему для некоторой подвижной модельной среды.

Характеристики и события, определенные и описываемые с помощью лагранжевой системы для модельной среды, можно рассматривать также с помощью системы координат, связанной с системой наблюдателя. Соответствующие пересчеты результатов, полученных теоретически или экспериментально в сопутствующей системе Лагранжа, на результаты теоретические или экспериментальные, полученные в системе наблюдателя, представляют собой навигационную задачу, связанную с интегрированием в общем случае системы уравнений в частных производных, существенным образом связанных с использованием определения системы отсчета и системы координат наблюдателя [1, 2].

Для каждой системы отсчета можно рассмотреть четырехмерное бесконечно тонкое волокно, образованное бесконечно близкими мировыми линиями, соседними к фиксированно выбранной мировой линии C.

Рассмотрим бесконечно малый объем dV, представляющий собой геометрическое место концов пространственно подобных векторов $d\mathbf{l}$, проведенных из точки линии C для данного момента собственного времени τ на C и ортогональных к C. Пусть при изменении $\tau'(\tau' > \tau)$ точки конца вектора $d\mathbf{l}$ движутся вдоль своих соседних мировых линий C'. В момент собственного времени $\tau' > \tau$ объем dV заменится объемом dV', а соответствующие точки dV и dV' индивидуализируются своими мировыми линиями, иначе говоря, одними и теми же значениями лагранжевых координат. При этом преобразовании бесконечно малый вектор $d\mathbf{l}$ перейдет в вектор $d\mathbf{l}'$. Преобразование точек бесконечно малого трехмерного пространственного объема dV в объем dV' представит собой точечное аффинное преобразование, которое можно охарактеризовать как конечную чистую деформацию с конечным углом поворота главных осей деформации, а при бесконечно малой разнице $\tau' - \tau = d\tau$ можно ввести соответствующие тензоры скоростей деформации и компоненты соответствующего антисимметричного тензора скорости вращения. Кроме того, можно ввести и вычислить с помощью этих характеристик компоненты тензора Римана кривизны пространства, дать в общем случае выражения для четырехмерных ускорений точек на мировых линиях и формулы для девиации соседних мировых линий. Как известно, перечисленные характеристики имеют кинематический характер, их конкретный вид и свойства определяются свойствами системы отсчета, которая в любой данной конечной области риманова пространства может быть введена с большим произволом; при суживании этого произвола характеристики системы отсчета становятся связанными с геометрическими свойствами риманова пространства. Таким образом, преобразование от dV к dV' и соответствующие характеристики пространства и мировых линий системы отсчета тесно связаны с выбором, т. е. с конструкцией такой системы отсчета — моделью идеальной среды, которая была бы в свою очередь однозначным способом связана с римановым пространством и которую можно рассматривать как идеальную среду, сопутствующую риманову пространству.

Построение такой сопутствующей системы отсчета равносильно построению соответствующего поля скоростей с устранением возможных произволов, иначе, построению векторного поля, связанного однозначно и инвариантно с геометрическими характеристиками, определяющими природу риманова пространства.

Для построения такой конструкции и соответствующей сопутствующей системы отсчета можно исходить из теории А. З. Петрова [3, 4], изучившего проблему канонического вида тензора Вейля, который выражается простой формулой через тензор Риччи, метрический тензор и тензор Римана. Если тензор Риччи равен нулю, то тензор Вейля совпадает с тензором Римана и, таким образом, в динамической теории Эйнштейна определяет полностью существенные свойства гравитационного поля в вакууме. В конечной области, в которой тензоры Риччи и Вейля обращаются в нуль, пространство псевдоевклидово.

По теории А. З. Петрова в каждой точке риманова пространства можно, вообще говоря, указать тетрады с единственно определенными четырьмя взаимно перпендикулярными направлениями, в которых независимые компоненты тензора Вейля приводятся к каноническому виду и представляют собой в общем случае для первого типа по Петрову четыре независимых вещественных инварианта. Соответствующие канонические виды тензора Вейля определяют собой в данной точке алгебраический тип риманова пространства.

Если ввести соответствующее шестимерное бивекторное пространство для тензора Вейля, то первый тип отвечает случаю, когда все корни соответствующего векового уравнения различны; если корни векового уравнения кратные, то получаются вырожденные специальные типы тензора Вейля, которым соответствуют вырожденные римановы пространства типов 2, 3, N, D.

По теории, разработанной Дебеве, Саксом, Пирани, Ньюменом и Пенроузом [5–9], в точках пространства типа 1 можно ввести единственным образом четыре различных главных изотропных направления; в точках пространства типа 2 два из этих изотропных направлений сливаются, в точках пространства типа 3 три главных изотропных направления сливаются, а в типе N сливаются все четыре главных изотропных направления. Тип D получается, когда четыре главных изотропных направления попарно сливаются в два изотропных направления.

В работе [2] было предложено в качестве вектора, определяющего сопутствующую систему отсчета в типе 1, взять единственным образом определенный времениподобный базисный вектор $э_4$, направленный в будущее в тетрадах, определяемых по А. З. Петрову каноническими направлениями для тензора Вейля. А. В. Жуков показал [10], что при непрерывном переходе от первого типа к вырожденным специальным типам направление вектора $э_4$ переходит непрерывно в изотропные слившиеся главные направления, определенные единственным образом, и только в типе D получаются два таких изотропных направления в четырехмерном пространстве.

Таким образом, когда тензор Вейля отличен от нуля, для всех типов риманова пространства построена сопутствующая этому пространству система отсчета. Свойства соответствующих мировых линий и упомянутые выше их характеристики являются существенными инвариантными характерными свойствами самого пространства, причем в случае гравитационного поля в пустоте (когда тензор Риччи равен нулю) система канонических тетрад и инвариантные в этих тетрадах компоненты тензора Вейля полностью определяют собой геометрию четырехмерного пространства-времени. Отсюда ясно, что динамические (физические) свойства гравитационного поля в общем случае должны определяться свойствами построенной системы канонических тетрад и четырьмя независимыми инвариантами, например четырьмя независимыми компонетами тензора Вейля в этих тетрадах.

Следовательно, физические модели гравитационного поля в пустоте естественно и, по-видимому, удобно или необходимо строить в такой системе отсчета. Соответствующие выражения для энергии и тензора энергии — импульса гравитационного поля и другие скалярные и тензорные характеристики гравитационного поля в построенной системе отсчета, сопутствующей гравитационному полю, вообще говоря, должны представляться в более простом виде по сравнению с другими системами отсчета, так как именно в этой системе отсчета исключаются различного рода свойства и характерные параметры, чуждые и обязательно привносимые дополнительно извне в любые другие системы отсчета.

Замечательно, что построенная сопутствующая полю система отсчета для вакуума в вырожденных типах, в которых соответствующие мировые линии становятся изотропными геодезическими, отвечающими слившимся главным изотропным направлениям, уже вводилась и использовалась многими авторами для качественного исследования свойств гравитационного поля и для построения метода отыскания точных решений динамических уравнений для гравитационного поля [11–16]. Показано [9], что именно в такой системе отсчета, составленной из специально определенных изотропных геодезических мировых линий, уравнения поля приобретают наиболее простой вид, допускающий непосредственное интегрирование, что позволяет восстановить большинство известных точных решений и получить ряд новых точных решений, однако эти методы до сих пор были применены только для описания пространств вырожденных типов.

Системы отсчета, построенные из произвольных изотропных или неизотропных геодезических мировых линий, как в общем случае, так и для вырожденных типов, не связаны, вообще говоря, однозначно с инвариантными геометрическими особенностями пространства.

В канонических тетрадах или в построенной с их помощью глобальной сопутствующей системе координат компоненты тензора Вейля имеют специальный вид. Это обстоятельство должно служить условием, определяющим канонические тетрады и специализирующим выделяемую систему отсчета, сопутствующую гравитационному полю и определяющую идеальную среду, моделирующую гравитационное поле. Благодаря подчеркиваемой специализации свойств компонент тензора Вейля, кинематические соотношения для соответствующих мировых линий также приобретают специальный вид, который отвечает существенным особенностям гравитационного поля.

В качестве примера рассмотрим классическую проблему об энергии и о тензоре энергии — импульса для гравитационного поля в области вакуума, т. е. в объеме пространства, где отсутствуют материя и электромагнитное поле.

По определению гравитационным полем в пустоте можно назвать риманово пространство, в котором тензор Риччи равен нулю, в частности, это соответствует вакуумным динамическим уравнениям в теории Эйнштейна (без космологического члена).

Как известно, динамические уравнения в разных вариантах теории гравитации — это нелинейные уравнения в частных производных. Для их решения в конечном объеме на его границах до сих пор в общем случае нет сформулированных физически обоснованных краевых условий, а также убедительно обоснованных условий на возможно присутствующих поверхностях сильных разрывов.

Формулировка краевых условий на границах области непрерывности решений тесно связана с условиями на сильных разрывах, а установление условий на сильных разрывах всегда связано с постулированием дополнительных допущений, которые, в свою очередь, связаны с определением уравнений состояния и с возможностью присутствия некоторых дополнительных физических процессов и эффектов на скачках. Такого рода дополнительные эффекты и соответствующие уравнения состояния при применении вариационных принципов могут быть различными для данных неизменно установленных фиксированных уравнений Эйлера, образующих замкнутую систему уравнений. Для системы уравнений Эйлера можно отыскивать частные решения или решения в безграничных областях, или решения с заданной или искомой асимптотикой в особых точках, которые можно рассматривать как граничные элементы для области непрерывных решений.

Условием равенства нулю тензора Риччи для пустоты исчерпываются уравнения Эйлера; дальнейшее выделение конкретных решений связано и предопределяется, явно или неявно, граничными условиями.

Таким образом, установление условий на сильных разрывах — это дополнительная физическая задача, аналогичная по своей природе основной задаче об установлении уравнений Эйлера для непрерывных процессов и движений в конечных областях, занятых материальными средами и электромагнитным полем. В серии публикаций [17–22] разработаны универсальные методы построения моделей материальных сред и полей с помощью базового вариационного уравнения, являющегося обобщением локального уравнения энергии и универсальных или специальных термодинамических соотношений для рассматриваемых конкретных моделей. Эти методы позволяют устанавливать не только уравнения Эйлера, но и уравнения состояния вместе с условиями на сильных разрывах.

Применение развитых таким путем способов конструирования моделей позволяет, во-первых, ясно понять и описать сложившуюся ситуацию, связанную с выдвинутыми разными авторами предложениями различных физически неудовлетворительно определенных псевдотензоров для гравитационного поля, и, во-вторых, по-новому подойти к физически приемлемому решению проблемы об определении энергии гравитационного поля как скаляра и об описании внутренних взаимодействий в гравитационном поле, характеризуемых действительными тензорами.

Располагая для гравитационного поля системой сопутствующих тетрад при соответствующей сопутствующей системе отсчета, связанной с идеально определенной средой, можно, не нарушая системы уравнений поля, ввести инвариантным путем понятие об удельной энергии как о четырехмерном скаляре, если во введенном ранее базовом вариационном уравнении к лагранжиану Λ добавить дивергенцию некоторого четырехмерного вектора Ω.

Введем тетрады с векторами базиса $\mathbf{э}_1, \mathbf{э}_2, \mathbf{э}_3, \mathbf{э}_4$, где вектор $\mathbf{э}_4$ касателен к мировым линиям описанной выше сопутствующей системы отсчета: этот вектор можно считать единичным в типе 1 и направленным вдоль слившихся главных изотропных направлений в вырожденных типах. В типе 1 вектор $\mathbf{э}_4$ определен однозначно, а векторы $\mathbf{э}_1, \mathbf{э}_2$ и $\mathbf{э}_3$, направленные вдоль канонических направлений по А. З. Петрову, определены только с точностью до знака. В вырожденных типах вектор $\mathbf{э}_4$ изотропный и можно принять, что вектор $\mathbf{э}_3$ также изотропный, а векторы $\mathbf{э}_1$ и $\mathbf{э}_2$ ортогональны $\mathbf{э}_3$ и $\mathbf{э}_4$, так что выполнены следующие условия нормировки и ортогональности:

$$(1)\qquad (\mathbf{э}_4, \mathbf{э}_4) = (\mathbf{э}_3, \mathbf{э}_3) = 0, (\mathbf{э}_3, \mathbf{э}_4) = 1, (\mathbf{э}_1, \mathbf{э}_1) = (\mathbf{э}_2, \mathbf{э}_2) = 1$$
$$(\mathbf{э}_4, \mathbf{э}_1) = (\mathbf{э}_4, \mathbf{э}_2) = (\mathbf{э}_3, \mathbf{э}_1) = (\mathbf{э}_3, \mathbf{э}_2) = (\mathbf{э}_2, \mathbf{э}_1) = 0$$

Как было доказано А. В. Жуковым, при переходе от одного типа к другому направление вектора $\mathbf{э}_4$ остается непрерывным, а для направлений векторов $\mathbf{э}_1, \mathbf{э}_2, \mathbf{э}_3$ нельзя удовлетворить условиям непрерывности, причем к этому можно добавить, что направления векторов $\mathbf{э}_1, \mathbf{э}_2, \mathbf{э}_3$ при условиях (1) в вырожденных типах определяются неоднозначно. Выбор вектора Ω, который можно ввести по определению в указанных тетрадных базисах, представляет собой дополнительный существенный физический постулат, который по своей природе может быть поставлен в один ряд с известными фундаментальными постулатами в общей теории относительности и который, так же как и другие постулаты для моделирования действительных явлений гравитации в природе, нуждается в проверке на опытах. Однако сущность этого постулата не затрагивает основных уравнений теории поля, но может проявиться только через краевые условия и через условия на сильных разрывах, которые могут присутствовать в рассматриваемых явлениях. (На практике при конструировании решений динамических уравнений дополнительные условия, заменяющие граничные условия, всегда в той или иной форме явно или неявно постулируются.)

Если принять, что сильные разрывы всегда можно исключить за счет усложнения физических свойств основных моделей и соответствующих им систем уравнений Эйлера (усложнение проявляется только в тонких областях, отвечающих сильным разрывам в упрощенных моделях), то в промежуточных областях, где приемлемы простые модели, все же возникает проблема о распространении объемной гравитационной энергии, присущей полю, и проблемы излучения и поглощения энергии за счет особенностей в поле или на его границах.

В настоящее время для многих моделей сред нет оснований для их усложнений, поэтому в силу описанных свойств канонических тетрад и требований о физической приемлемости полученных следствий можно начать исследование вопроса о плотности энергии ε гравитационного поля в пустоте, исходя из допущений, что

$$\varepsilon = \nabla_i \Omega^i \tag{2}$$

а относительно функций Ω^i принять, что это компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$, причем в простейшей модели поля можно принять, что

$$\mathbf{\Omega} = k\mathbf{э}_4 \tag{3}$$

где k может быть скалярной функцией инвариантов тензора Вейля, совпадающего с тензором Римана, или, еще проще, можно положить, что k — некоторая физическая постоянная с размерностью $L \cdot [\Lambda]$, где L — длина. Допущение (2) принимается обычно всеми авторами, постулирующими часто в неявном виде выражение для плотности энергии гравитационного поля, однако вводимые функции Ω^i не являются компонентами некоторого вектора. После фиксирования формул (2) и (3) дальнейшие проблемы, связанные с тензором энергии — импульса гравитационного поля и с условиями на сильных разрывах, разрешаются с помощью развитой техники решения этих проблем [21]. Если принять формулу (3) при $k = \text{const}$, то в любой тетраде, определяемой локально как инерциальная система отсчета с ортогональными осями, в которой временной базисный вектор равен определенному выше вектору $\mathbf{э}_4$, будет выполняться равенство $\mathbf{\Omega} = k\mathbf{э}_4$ и вектор $\mathbf{\Omega}$ направлен по касательной к мировым линиям в построенной выше сопутствующей системе отсчета. Системе инерциальных тетрад, определенных в каждой точке пространства, соответствует сопутствующая система отсчета. Эти тетрады определены в каждой точке пространства с точностью до пространственного поворота и отражения пространственных осей. Это могут быть тетрады с главными осями по А. З. Петрову или тетрады Ферми — Уокера [23], или другая система тетрад в зависимости от задания закона поворотов пространственных осей тетрад при переходе от одной точки к другой вдоль каждой мировой линии.

Согласно (3), в каждой из таких инерциальных систем тетрад вектор Ω постоянен, так как изменение вектора Ω может происходить только за счет изменения временинодобной оси тетрад $э_4$. Обозначим через $э_i$ ортонормированные базисные векторы в точке M, а в соседней бесконечно близкой точке M' обозначим ортонормированные базисные векторы, имея в виду инерциальность локальных систем отсчета в тетрадах, через $э_i'$; эти же векторы можно переносить параллельно из точки M' в точку M. Очевидно, что ортонормированные базисы $э_i$ и $э_i'$ в точке M связаны бесконечно малым преобразованием Лоренца вида $э_i' = (\delta_{\cdot i}^{j} + \gamma_{\cdot il}^{j\cdot\cdot} y^l)\, э_j$, где y^l — бесконечно малые координаты точки M' в тетраде, отвечающей точке M, а $\gamma_{jil} y^l$ — антисимметричная матрица по i и j : $\gamma_{ijl} = -\gamma_{jil}$. Двадцать четыре независимые компоненты тензора γ_{ijl} называются символами Риччи и определяют собой систему тетрад. Как известно, через γ_{ijl} можно выразить компоненты тензора кривизны и все характеристики в сопутствующей системе отсчета.

Из равенства (3) следует, что в тетраде, отвечающей точке M, верны следующие формулы:

(4) $$\Omega = \Omega^i э_i' = k\,(\delta_{4\cdot}^{\cdot i} + \gamma_{\cdot 4l}^{i\cdot\cdot} y^l)\, э_i; \quad \nabla_i \Omega^i = k\gamma_{\cdot 4i}^{i\cdot\cdot}$$

В базовом вариационном уравнении при добавлении к лагранжиану дивергенции $\nabla_i \Omega^i$ появляются два дополнительных сбалансированных члена

$$\delta \int\limits_{V_4} \nabla_i \Omega^i \, d\tau + \delta W_\Omega = 0$$

При отсутствии внутри V_4 скачка, согласно формуле (10) [2], можно записать

(5) $$\delta W_\Omega = -\int\limits_{\Sigma_3} \left[\nabla_k \Omega^k \delta x^i + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial (\sqrt{-g}\,\Omega^i)\right] n_i \, d\sigma$$

Локально в тетрадной системе отсчета применим формулы (4) и (5) для бесконечно малого объема dV_4, не содержащего внутри себя разрывов и ограниченного замкнутой поверхностью $d\Sigma_3$; с учетом равенства $\sqrt{-g} = -1$, верного в тетрадной системе координат, получим

(6) $$\delta \int\limits_{dV_4} \nabla_i \Omega^i \, d\tau = -\delta W_\Omega = \int\limits_{d\Sigma_3} (\nabla_k \Omega^k \delta x^i + \partial \Omega^k \delta_{\cdot k}^{i\cdot})\, n_i \, d\sigma = -\int\limits_{d\Sigma_3} S_{j\cdot}^{\cdot i} \delta y^j n_i \, d\sigma$$

Отсюда находим

(7) $$S_{j\cdot}^{\cdot i} = k\,(\gamma_{\cdot 4j}^{i\cdot\cdot} - \gamma_{\cdot 4q}^{q\cdot\cdot} \delta_{\cdot j}^{i\cdot})$$

Компоненты тензора $S_{j\cdot}^{\cdot i}$ можно рассматривать как компоненты тензора энергии — импульса гравитационного поля в пустоте.

Если внутри dV_4 имеется поверхность сильного разрыва S_k, то справа в равенстве (6) появится еще член $[S_{j\cdot}^{\cdot i} \delta y^j n_i d\sigma_k]_{S_k}^{\pm}$. Этот добавочный член наряду с другими аналогичными членами от материальной среды и электромагнитного поля, записанными в тетрадной системе координат, необходимо учитывать в условиях на скачках, вытекающих из полного базового вариационного уравнения.

Для скачков в гравитационном поле в вакууме при выполнении условия непрерывности δy^j будет иметь место следующее условие на поверхности S_k:

$$[S_{j\cdot}^{\cdot i} n_i \, d\sigma_k] = 0 \tag{8}$$

Наличие добавочных членов $\nabla_i \Omega^i$ в выражении для лагранжиана и компонент тензора $S_{j\cdot}^{\cdot i}$ в уравнениях состояния может сказаться при решении конкретных задач только через краевые или начальные условия и через условия на скачках.

Формулы (6), (7) записаны в тетрадных базисах, формула (8) верна в любой системе координат. Выражение для компонент $S_{j\cdot}^{\cdot i}$ на основании (7) можно пересчитывать на любую систему координат по правилам тензорных преобразований с помощью формул перехода от заданной системы координат к выбранной локально тетрадной системе, которые получаются из соответствующих определений этих систем координат.

Поступила 10 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 6.
2. *Седов Л. И.* О локальном уравнении энергии в гравитационном поле. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3.
3. *Петров А. З.* Об одновременном приведении тензора и бивектора к каноническому виду. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1950, т. 110, кн. 3, стр. 5—17.
4. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
5. *Debever R.* Sur le tenseur de super-énergie. Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 1959, vol. 249, No. 15, pp. 1324—1326.
6. *Sachs R.* Gravitational waves in general relativity. VI. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1961, vol. 264, No. 1318, pp. 309—338.
7. *Pirani F. A. E.* Introduction to gravitation radiation theory. In: Lectures on General Relativity. Vol. 1, 1964, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1965.
8. *Penrose R.* A spinor approach to general relativity. Ann. Phys., 1960, vol. 10, No. 2, pp. 171—201.
9. *Newman E. T.*, *Penrose R.* An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. J. Math. Phys., 1962, vol. 3, No. 3, pp. 566—578. Errata: J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 7.
10. *Жуков А. В.* О векторах и идеальных системах отсчета, определяемых тензором Вейля в гравитационном поле. Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 1.
11. *Newman E. T.*, *Unti T. W. J.* Behavior of asymptotically flat empty Spaces. J. Math. Phys., 1962, vol. 3, No. 5, pp. 891—901.
12. *Newman E. T.*, *Tamburino L. A.* Empty space metrics containing hypersurface orthogonal geodesic rays. J. Math. Phys., 1962, vol. 3, No. 5.
13. *Newman E. T.*, *Tamburino L.*, *Unti T.* Empty-space generalization of the Schwarzschild metric. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 7, pp. 915—923.
14. *Kinnersley W.* Type D vacuum metrics. J. Math. Phys., 1969, vol. 10, No. 7, pp. 1195—1203.
15. *Мизнер Ч.*, *Торн К.*, *Уилер Дж.* Гравитация. Т. 1—3, М., «Мир», 1977.
16. *Хокинг С.*, *Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени, М., «Мир», 1977.
17. *Седов Л. И.* О тензоре энергии импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3.

18. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
19. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
20. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1, М., «Наука», 1976.
21. *Седов Л. И.* Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
22. *Желнорович В. А., Седов Л. И.* О вариационном выводе уравнений состояния для материальной среды и гравитационного поля. ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
23. *Fermi E.* Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea ovaria. Atti Accademia nazionale dei Lincei Roma. Classe di scienze fisiche, matematicha a naturali, (5), 1922, vol. 31, pp. 21—23, 51—52.