

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

В. С. Баушев, В. Н. Виллюнов, А. М. Тимохин

(Томск)

Исследуется локальная устойчивость стационарных решений системы уравнений теории горения в рамках диффузионно-тепловой модели. Задача сводится к анализу точечного спектра дифференциального оператора, определенного на вектор-функциях в неограниченной области. Предлагается метод нахождения точечного спектра. Найдена спектральная область для произвольного числа Льюиса, лежащая в области устойчивости. В случае числа Льюиса, равного единице, показано отсутствие спектральных точек вне указанной области.

1. Постановка задачи. Теплодиффузионный механизм распространения пламени по однородной горючей смеси описывается системой уравнений

$$(1.1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \Phi(U, V), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = L \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \Phi(U, V)$$

$$(-\infty < x < \infty, t > 0)$$

Здесь U, V — безразмерные температура и концентрация, L — число Льюиса — Семенова. Связь между безразмерными и размерными величинами дана в [1]. Функция тепловыделения в случае реакций первого порядка имеет вид

$$\Phi(U, V) = Vf(U)$$

Предполагается, что $f(U)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям

$$(1.2) \quad f(U) > 0, \quad U < \varepsilon; \quad f(U) \equiv 0, \quad U \geq \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Для определенности положим $f(0) = 1$. Смысл параметра отрезания ε тот же, что и в [2].

Известно [3], что существует стационарное решение $u(\xi), v(\xi)$ системы (1.1) вида бегущей волны, удовлетворяющее системе уравнений

$$(1.3) \quad \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \omega \frac{du}{d\xi} - \Phi(u, v) = 0, \quad u(-\infty) = v(-\infty) = 0$$

$$L \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \omega \frac{dv}{d\xi} - \Phi(u, v) = 0, \quad u(\infty) = v(\infty) = 0$$

где $\xi = x - \omega t$, ω — скорость распространения волны.

Задача исследования устойчивости стационарных решений системы (1.1) по отношению к малым возмущениям формулируется следующим

образом. Пусть возмущенные решения, удовлетворяющие при $|x| \rightarrow \infty$ тем же условиям, что и стационарные, представлены в виде (δ — малый параметр)

$$(1.4) \quad U = u(\xi) + \delta\varphi + \delta^2\varphi_1 + \dots, \quad V = v(\xi) + \delta\psi + \delta^2\psi_1 + \dots$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и используя разложение $f(U)$ в ряд по степеням δ , получим линеаризованные уравнения относительно φ, ψ

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \omega \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + a\varphi - b\psi \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &= L \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \omega \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + a\varphi - b\psi, \quad \varphi, \psi|_{|\xi| \rightarrow \infty} = 0 \\ a &= -\frac{\partial\Phi}{\partial u} = -vf'(u), \quad b = \frac{\partial\Phi}{\partial v} = f(u) \end{aligned}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по переменной u . Переход от неподвижной системы координат (x, t) к системе координат (ξ, t) , связанной с пламенем, делает коэффициенты уравнений (1.5) независимыми от t .

Будем искать решение системы (1.5) в виде

$$(1.6) \quad \varphi = z_1(\xi, \lambda) e^{-\lambda t}, \quad \psi = z_2(\xi, \lambda) e^{-\lambda t} \quad (\lambda = \lambda_r + i\lambda_i)$$

Подставляя (1.6) в (1.5), получим

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \frac{d^2z_1}{d\xi^2} + \omega \frac{dz_1}{d\xi} + az_1 - bz_2 &= -\lambda z_1 \\ L \frac{d^2z_2}{d\xi^2} + \omega \frac{dz_2}{d\xi} + az_1 - bz_2 &= -\lambda z_2, \quad z_1, z_2|_{|\xi| \rightarrow \infty} = 0 \end{aligned}$$

или, короче, $Az = -\lambda z$, где z — вектор с компонентами z_1, z_2 .

Устойчивость имеет место, если $\lambda_r > 0$. Исследование устойчивости сводится, таким образом, к анализу точечного спектра (собственных чисел) оператора A .

Такой метод исследования устойчивости отличен от давно используемого в гидродинамике [4] и получившего сравнительно недавно обоснование [5] тем, что оператор A определен на функциях в неограниченной области. В теории горения, по-видимому, впервые аналогичный подход к исследованию устойчивости был применен в [6].

Следует заметить, что $\lambda = 0$ — собственное число оператора A . Собственные функции, отвечающие этому значению λ ,

$$(1.8) \quad z_1(\xi, 0) = \frac{du}{d\xi}, \quad z_2(\xi, 0) = \frac{dv}{d\xi}$$

соответствуют решениям типа сдвига (см. разложения (1.4))

$$\lim U = u(\xi + \delta), \quad \lim V = v(\xi + \delta), \quad t \rightarrow \infty$$

2. Вспомогательные выражения. Введением новой независимой переменной u и новой функции $p(u) = du/d\xi$ система (1.3) преобразуется к виду [1]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} pp' + \omega p &= \Phi(u, v) \\ Lpv' + \omega(v - u) &= p, \quad 0 < u < 1 \\ p(0) = v(0) = p(1) &= 0 \end{aligned}$$

В окрестности $u = 0$ имеют место разложения в ряд по степеням u

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p &= p_1 u + p_2 u^2 + \dots, & \Phi &= \Phi_1 u + \Phi_2 u^2 + \dots, \\ v &= v_1 u + v_2 u^2 + \dots \end{aligned}$$

где угловые коэффициенты p_1, Φ_1, v_1 (учитываем, что $f(0) = 1$) имеют вид

$$(2.3) \quad p_1 = \frac{2}{\omega + \sqrt{\omega^2 + 4L}}, \quad v_1 = \Phi_1 = p_1^2 + \omega p_1$$

В области $0 < u < \varepsilon$, согласно (1.2), имеем

$$(2.4) \quad \Phi(u, v) \equiv 0, \quad p = \omega(1 - u)$$

В дальнейшем при анализе решений системы (1.7) будут необходимы следующие результаты. Пусть имеется квадратное уравнение относительно γ (ν — вещественное число)

$$\gamma^2 + \nu\gamma + \beta = 0 \quad (\beta = \beta_r + i\beta_i)$$

В случае $\nu < 0$ одно значение γ_r всегда положительно. Условие положительности другого

$$(2.5) \quad \beta_r > \beta_i^2/\nu^2$$

В случае $\nu > 0$ одно значение γ_r всегда отрицательно. Условие положительности другого

$$(2.6) \quad \beta_r < \beta_i^2/\nu^2$$

3. Анализ интегральных кривых системы (1.7). В качестве новой независимой переменной возьмем функцию $u(\xi)$ — решение стационарной задачи. Система (1.7) принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p^2 z_1'' + p(p' + \omega) z_1' + (a + \lambda) z_1 - b z_2 &= 0 \\ L p^2 z_2'' + p(L p' + \omega) z_2' + a z_1 + (\lambda - b) z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Идея исследования заключается в анализе решения системы (3.1) в окрестности $u = 0$ и в области $\varepsilon < u < 1$. В последней, учитывая (2.4), систему (3.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 (1 - u)^2 z_1'' + \lambda z_1 &= 0 \\ L \omega^2 (1 - u)^2 z_2'' + \omega^2 (1 - L)(1 - u)^2 z_2' + \lambda z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Общее решение этой системы

$$(3.2) \quad \begin{aligned} z_1 &= c_1 (1 - u)^{D_1} + C_2 (1 - u)^{D_2}, & D_{1r} &> D_{2r} \\ z_2 &= C_3 (1 - u)^{B_1} + C_4 (1 - u)^{B_2}, & B_{1r} &> B_{2r} \end{aligned}$$

D_k, B_k ($k = 1, 2$) — корни характеристических уравнений

$$(3.3) \quad D^2 - D + \lambda/\omega^2 = 0, \quad LB^2 - B + \lambda/\omega^2 = 0$$

C_k, C_{k+2} — постоянные интегрирования. Рассмотрение случая кратных корней уравнений (3.3) не представляет затруднений. Действительно,

$$z_1 = C_1 (1 - u)^{\frac{1}{2}} + C_2 (1 - u)^{\frac{1}{2}} \ln(1 - u), \quad \lambda = \frac{\omega^2}{4}$$

$$z_2 = C_3 (1 - u)^{\frac{1}{2L}} + C_4 (1 - u)^{\frac{1}{2L}} \ln(1 - u), \quad \lambda = \frac{\omega^2}{4L}$$

Для того чтобы четырехпараметрическое семейство кривых (3.2) выходило из $u = 1$, необходимо, согласно (2.5), потребовать

$$(3.4) \quad \lambda_r > \lambda_i^2/\omega^2, \quad \lambda_r > L\lambda_i^2/\omega^2$$

Проанализируем теперь поведение решений системы (3.1) в окрестности точки $u = 0$. Учитывая равенства (2.2), (2.3), заключаем, что точка $u = 0$ является для (3.1) регулярной особой точкой [7]. Решение системы (3.1) в окрестности $u = 0$ будем искать в виде

$$(3.5) \quad z_1 = \sum_{k=0}^{\infty} z_{1k} u^{k+\rho}, \quad z_2 = \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k} u^{k+\rho}$$

Подставляя (3.5) в (3.1) и приравнявая нулю коэффициенты при u^ρ , получим систему для нахождения коэффициентов z_{10} , z_{20}

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (p_1^2 \rho^2 + \omega p_1 \rho + \lambda) z_{10} - z_{20} &= 0 \\ (L p_1^2 \rho^2 + \omega p_1 \rho + \lambda - 1) z_{20} &= 0 \end{aligned}$$

Чтобы получить нетривиальные решения системы (3.6), необходимо потребовать обращения в нуль выражений в скобках в (3.6). Из четырех корней получившихся характеристических уравнений два имеют отрицательные вещественные части. Чтобы оставшиеся два корня имели положительные вещественные части, необходимо, согласно (2.6), выполнение неравенств

$$(3.7) \quad \lambda_r < \lambda_i^2/\omega^2, \quad \lambda_r < 1 + L\lambda_i^2/\omega^2$$

В случае выполнения хотя бы одного из неравенств (3.7) система (3.1) будет иметь решение, выходящее из $u = 0$.

Поскольку коэффициенты линейной системы (3.1) не имеют особенностей в области $0 < u < \varepsilon$, то ее решения существуют во всей указанной области [7] и являются целыми аналитическими функциями параметра λ .

Вид решений (3.5) меняется, если корни характеристических уравнений различаются на целое число [7], однако характер поведения интегральных кривых, т. е. число линейно-независимых решений (3.1), выходящих из $u = 0$, опять же определяется знаками вещественных частей корней этих уравнений.

4. Анализ точечного спектра оператора A . Обозначим выходящие из $u = 0$ решения через z_1^0 , z_2^0 , а решения выходящие из $u = 1$ в области $\varepsilon < u < 1$ — через z_1^1 , z_2^1 . Для того чтобы z_1^0 , z_2^0 являлись собственными функциями оператора A , необходимо, чтобы их продолжения в область $\varepsilon < u < 1$ обращались в нуль при $u = 1$. Такое продолжение осуществляется с помощью решений (3.2) и условий при $u = \varepsilon$

$$(4.1) \quad z_k^0(\varepsilon) = z_k^1(\varepsilon), \quad \frac{dz_k^0(\varepsilon)}{du} = \frac{dz_k^1(\varepsilon)}{du}, \quad k = 1, 2$$

Условия (4.1) — следствие предположения о непрерывности $f(u)$ при $u = \varepsilon$.

На фигуре изображена часть симметричной относительно вещественной оси области собственных чисел в плоскости λ . Уравнения кривых 1, 2, 3

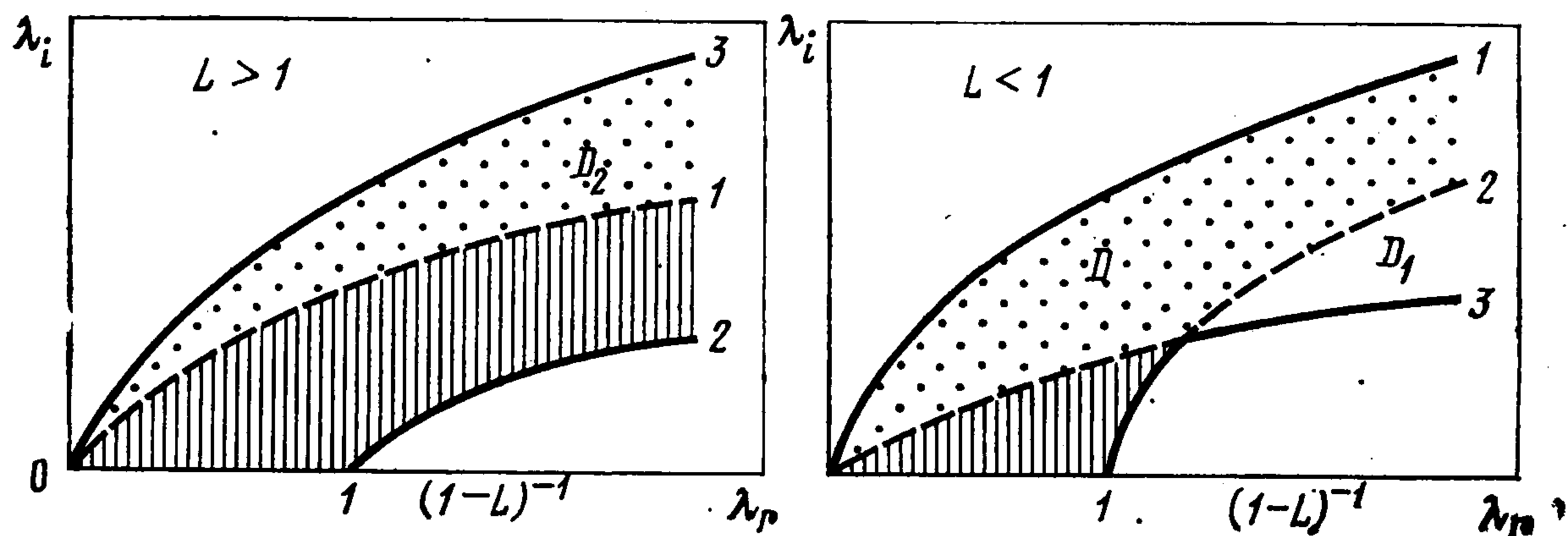
соответственно имеют вид

$$\lambda_r = L\lambda_i^2/\omega^2, \quad \lambda_r = 1 + L\lambda_i^2/\omega^2, \quad \lambda_r = \lambda_i^2/\omega^2$$

В случае, если выполнены оба неравенства (3.4) и второе из неравенств (3.7) (заштрихованная область на фигуре), т. е.

$$(4.2) \quad 1 + L\lambda_i^2/\omega^2 > \lambda_r > \begin{cases} \lambda_i^2/\omega^2, & L < 1 \\ L\lambda_i^2/\omega^2, & L \geq 1 \end{cases}$$

процедура продолжения решений z_1^0, z_2^0 с помощью (4.1) в область $\varepsilon < u < 1$ приводит к системе четырех линейных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4 . Система это однозначно разрешима, и вопрос о продолжении



решен положительно. Все λ , удовлетворяющие неравенствам (4.2), — собственные числа.

В случае, когда $\lambda \in D$, т. е.

$$L\lambda_i^2/\omega^2 < \lambda_r < \min \{ \lambda_i^2/\omega^2, 1 + L\lambda_i^2/\omega^2 \}, \quad L < 1$$

из $u = 1$ выходит двухпараметрическое семейство z_2^1 и однопараметрическое z_1^1 ($C_2 = 0$). Постоянные C_3, C_4 определяются однозначно.

Для определения C_1 имеются два уравнения

$$z_1^0(\varepsilon, \lambda) = C_1(1 - \varepsilon)^{D_1}, \quad \frac{dz_1^0(\varepsilon, \lambda)}{d\varepsilon} = -C_1 D_1 (1 - \varepsilon)^{D_1 - 1}$$

из которых следует, что решение z_1^0 при $u = \varepsilon$ должно удовлетворять дополнительному условию

$$(4.3) \quad (1 - \varepsilon) \frac{dz_1^0(\varepsilon, \lambda)}{d\varepsilon} + D_1 z_1^0(\varepsilon, \lambda) = 0$$

Последнее равенство может иметь место лишь для дискретного набора λ (счетное множество собственных чисел).

Аналогично показывается наличие счетного множества собственных чисел в случае

$$(4.4) \quad \lambda_r = \min(\lambda_i^2/\omega^2, 1 + L\lambda_i^2/\omega^2), \quad 1 + L\lambda_i^2/\omega^2 < \lambda_r < \lambda_i^2/\omega^2, \\ L < 1$$

(штриховая кривая и область D_1 для $L < 1$ на фигуре) и когда $\lambda \in D_2$ т. е.

$$(4.5) \quad \lambda_i^2/\omega^2 < \lambda_r \leq L\lambda_i^2/\omega^2, \quad L > 1.$$

В случае (4.4) при $u = \varepsilon$ должно иметь место (4.3), а в случае (4.5) ($C_4 = 0$) должно иметь место условие

$$(4.6) \quad (1 - \varepsilon) \frac{dz_2^0(\varepsilon, \lambda)}{du} + B_1 z_2^0(\varepsilon, \lambda) = 0$$

В случае

$$\lambda_r \geq \max \{ \lambda_i^2 / \omega^2, 1 + L \lambda_i^2 / \omega^2 \}$$

из $u = 0$ не выходят интегральные кривые и, следовательно, собственных чисел нет.

Очевидно, что выяснение устойчивости или неустойчивости стационарных решений (1.1) связано с анализом собственных чисел в области

$$(4.7) \quad \lambda_r \leq \begin{cases} L \lambda_i^2 / \omega^2, & L < 1 \\ \lambda_i^2 / \omega^2, & L \geq 1, \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Ниже такой анализ производится для $L = 1$.

5. Устойчивость в случае $L = 1$. Пусть имеет место условие (4.7). Из (2.1) следует $v = u$, $\Phi = \Phi(u)$. Вычитая в (3.1) из первого уравнения второе, находим

$$p^2 (z_1 - z_2)'' + p (p' + \omega)(z_1 - z_2)' + \lambda(z_1 - z_2) = 0$$

Решение этого уравнения относительно $z_1 - z_2$ имеет вид

$$(5.1) \quad z_1 - z_2 = E_1 \exp\left(\mu_1 \int \frac{du}{p}\right) + E_2 \exp\left(\mu_2 \int \frac{du}{p}\right)$$

где E_1, E_2 — постоянные интегрирования, а μ_1, μ_2 — корни уравнения $\mu^2 + \omega\mu + \lambda = 0$

Из (5.1) с учетом неограниченности правой части при $u \rightarrow 0, u \rightarrow 1$ следует $z_1 = z_2$. Система (3.1) сводится к одному уравнению:

$$(5.2) \quad p^2 z_1'' + p (p' + \omega) z_1' + (a - b) z_1 = -\lambda z_1, \quad z_1(0) = z_1(1) = 0$$

Характеристические уравнения для анализа решений (5.2) в окрестности $u = 0, u = 1$ имеют соответственно вид

$$(5.3) \quad p_1^2 \rho^2 + \omega p_1 \rho + \lambda - 1 = 0, \quad D^2 - D + \lambda / \omega^2 = 0$$

Случай кратных корней уравнений (5.3) не рассматривается, т. е.

$$\lambda \neq 1 + \omega^2/4, \quad \lambda \neq \omega^2/4$$

Этот случай не представляет интереса, поскольку указанные значения λ расположены в области устойчивости.

Согласно (2.5), (2.6), вещественные части корней уравнений (5.3) имеют различные знаки. Это означает, что из $u = 0, u = 1$ выходят однопараметрические семейства кривых. Необходимо показать, что это различные семейства.

С помощью замены

$$(5.4) \quad w = z_1 \exp\left(\frac{\omega}{2} \int \frac{du}{p}\right)$$

уравнение (5.2) приводится к самосопряженному виду

$$(5.5) \quad lw = -\lambda w, \quad l = p \frac{d}{du} \left(p \frac{d}{du} \right) - \frac{\omega^2}{4} + a - b$$

Преобразование (5.4) сохраняет характер поведения интегральных кривых уравнения (5.2) в окрестности $u = 0$, $u = 1$.

Действительно, в окрестности $u = 0$, $z_1 \sim u^\rho$

$$\exp\left(\frac{\omega}{2} \int_0^u \frac{du}{p}\right) \sim u^{\omega/2p_1}, \quad w \sim u^{\rho+\omega/(2p_1)}$$

$$\rho + \frac{\omega}{2p_1} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 + 4(1-\lambda)}{4p_1^2}}$$

Отсюда следует, что $|w| \rightarrow 0$ (∞), если $|z_1| \rightarrow 0$ (∞).

Аналогично доказательство проводится в окрестности $u = 1$.

Следствие. Если интегральные кривые уравнения (5.2), выходящие из $u = 0$, $u = 1$, принадлежат одному семейству, то соответствующие интегральные кривые уравнения (5.5) тоже принадлежат одному семейству.

Итак, анализ собственных чисел задачи (5.2) сводится к анализу собственных чисел оператора l , определенного на функциях, обращающихся в нуль при $u = 0$, $u = 1$.

Далее доказательство проходит аналогично тому, как это делается в [6]. Согласно (1.8), самосопряженный оператор l имеет собственную функцию, соответствующую $\lambda = 0$

$$w_0(u) = p \exp\left(\frac{\omega}{2} \int_0^u \frac{du}{p}\right)$$

Поскольку эта собственная функция не имеет нулей в интервале (0.1), она соответствует большему собственному значению [8]. Значит, отрицательных собственных чисел оператор l не имеет.

Замечание 1. Точечный спектр для $L = 1$ содержит не только чисто вещественные значения, что не согласуется с работой [6]. В [9] утверждалось на основе [6], что спектральная область состоит из точек $\lambda = 0$, $\lambda \geq \omega^2/4$. Несоответствие с результатом данной работы объясняется тем, что преобразование (5.4) сохраняет характер поведения интегральных кривых z_1 в окрестности $u = 0$, $u = 1$ не для всех λ , как это неявным образом предполагалось в [6].

Замечание 2. Возможен анализ на устойчивость не только одномерной задачи. Например, в случае двумерных возмущений (в правых частях каждого из уравнений (1.1) появятся соответственно слагаемые $\partial^2 U/\partial y^2$, $\partial^2 V/\partial y^2$) вместо (1.6) следует искать решение линеаризованных уравнений в виде

$$\varphi_1 = z_1(\xi, \lambda) \exp(-\lambda t + i\alpha y), \quad \psi = z_2(\xi, \lambda) \exp(-\lambda t + i\alpha y)$$

где α — волновое число. Уравнения кривых, ограничивающих точечный спектр в комплексной плоскости λ , находятся на основе полученных результатов

$$\lambda_r - L\alpha^2 = L\lambda_i^2/\omega^2, \quad \lambda_r - L\alpha^2 = 1 + L\lambda_i^2/\omega^2, \quad \lambda_r - \alpha^2 = \lambda_i^2/\omega^2$$

При $L > 0$, $\alpha \neq 0$ спектральная область сдвигается в сторону положительных λ_r , т. е. в область устойчивости.

Поступила 5 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Баушев В. С., Виллюнов В. Н. Оценки нормальных скоростей распространения ламинарных и мелкомасштабных турбулентных пламен. ПМТФ, 1976, № 3.
2. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, вып. 1.

3. Канель Я. И. О стационарном решении для системы уравнений теории горения. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
 4. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
 5. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
 6. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
 7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.
 8. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1, Изд-во иностр. лит., М., 1960.
 9. Зельдович Я. Б. Теория возмущений уравнений, обладающих группой инвариантности на примере распространения пламени. Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 3.
-