

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАЖИГАНИЯ ГОРЮЧЕЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ ТЕПЛОВОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев, В. М. Шевцова

(Москва)

Получено приближенное решение задачи о зажигании газообразной горючей смеси в случае, когда в начальный момент времени в смеси создана область с повышенной температурой. В зависимости от характеристик активной газовой смеси и начального распределения температуры с течением времени температура в прогретой области начнет резко возрастать либо уменьшаться. Возможно также вначале небольшое возрастание температуры и последующий спад. В первом случае произойдет зажигание, в других начальная температурная неоднородность расплывается со временем. Получены приближенные уравнения, описывающие начальную стадию процесса, установлены критические значения характерных параметров, соответствующих зажиганию.

Анализ основан на использовании типичного для задач теории горения малого параметра — безразмерного отношения максимальной температуры в нагретой области к температуре активации. Рассматривается случай с плоской геометрией, когда нагретая область одномерна и симметрична относительно плоскости с максимальной начальной температурой, совмещенной с началом координат. Развитый в работе метод позволяет обобщить полученные результаты на случай цилиндрической и сферической геометрии.

Применение асимптотических методов в теории зажигания часто дает возможность свести сложную нелинейную задачу к анализу более простых приближенных уравнений, которые в отдельных случаях могут быть решены аналитически, и указать характерные безразмерные параметры, определяющие основные особенности процесса [1-7]. В работах [1, 2] содержится асимптотический анализ задачи о зажигании реагирующей среды заданным световым потоком, в работах [3-6] получены асимптотические решения задачи о зажигании реагирующей среды нагретым телом с постоянной и изменяющейся температурой. Как в [1, 2], так и в [3-6] источник зажигания действовал на границе реагирующей среды.

1. Формулировка задачи. С учетом обычных для теории горения упрощающих предположений [8] протекание одностадийной экзотермической химической реакции в газе может быть описано следующей системой уравнений:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - mc \frac{\partial T}{\partial z} + \\ &+ Qk\rho^n (1-y)^n \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) - \alpha'(T - T_-) \\ \rho \frac{\partial y}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(D\rho \frac{\partial y}{\partial z} \right) - m \frac{\partial y}{\partial z} + k\rho^n (1-y)^n \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \frac{\partial m}{\partial z} &= 0, \quad T\rho = \text{const} \end{aligned}$$

Здесь T — температура, y — концентрация продуктов реакции, $\rho = \rho(T)$ — плотность, $\lambda = \lambda(T)$ — теплопроводность, c — теплоемкость, z — пространственная координата, t' — время, Q — тепловой эффект реакции, k — частотный фактор, E — энергия активации, n — порядок реакции, R — газовая постоянная, $D = D(T)$ — коэффициент диффузии, m — массовая скорость движения газа, T_- — температура на большом расстоянии от нагретой области, α' — коэффициент теплоотдачи, T_0 — максимальное значение температуры в нагретой области в начальный момент времени. В уравнениях (1.1) принята во внимание возможность объемного отвода тепла из зоны горения, что соответствует случаю, когда реагирующий газ располагается в достаточно тонком плоском слое между двумя теплопроводящими поверхностями. Очевидно, что равенство $\alpha' = 0$ соответствует отсутствию теплоотвода.

Будем считать, что в начальный момент времени в газе имеется следующее распределение температуры:

$$(1.2) \quad T(z, 0) = (T_0 - T_-)\Phi(z/l_T) + T_- \\ d\Phi(0)/dz = 0, \quad d^2\Phi/dz^2 < 0, \quad \Phi(0) = 1, \quad \Phi(\pm\infty) = 0$$

Здесь l_T — характерный масштаб изменения начального распределения температуры. Перейдем от переменных (t', z) к новым переменным (t', ψ) по формулам

$$m = -\partial\psi/\partial t', \quad \rho = \partial\psi/\partial z, \quad m(z, 0) = 0, \quad \psi(z=0, t') = 0$$

Примем также, что

$$\lambda\rho = \text{const}, \quad c = \text{const}, \quad D\rho^2 = \text{const}$$

Запишем уравнения, граничные и начальные условия в безразмерных переменных в виде

$$(1.3) \quad \frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \delta(1-y)^n \Gamma(\Theta) \exp(\beta(\Theta-1)) - \alpha\Theta \\ \frac{\partial y}{\partial t} = L^{-1} \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + \delta\gamma(1-y)^n \Gamma(\Theta) \exp(\beta(\Theta-1)) \\ \Theta(X, 0) = \Phi(X), \quad y(X, 0) = 0 \\ X = \frac{\psi}{\Delta x}, \quad t = \frac{t'}{\Delta t}, \quad \Delta x = l_T \rho \\ \beta^{-1} = \frac{RT_0^2}{E(T_0 - T_-)}, \quad \gamma = \frac{c(T_0 - T_-)}{Q}, \quad L = \frac{\lambda}{D\rho c} \\ \rho_0 = \rho_0(T), \quad \Theta = \frac{T - T_-}{T_0 - T_-}, \quad \Gamma(\Theta) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1} \\ \alpha = \frac{\tau_T}{\tau_\alpha}, \quad \delta = \frac{\tau_T}{\gamma\tau_{ch}}, \quad \Delta t = \frac{cl_T^2\rho_0}{\lambda} \\ \tau_T = \frac{l_T^2\rho_0 c}{\lambda}, \quad \tau_{ch} = \frac{\exp(E/RT_0)}{k\rho_0^{n-1}}, \quad \tau_\alpha = \frac{\alpha'}{\rho c}$$

Здесь τ_T — характерное время тепловой релаксации за счет теплопроводности, τ_{ch} — характерное время химической реакции, τ_α — характер-

ное время тепловой релаксации, связанной с «боковым» теплоотводом, γ^{-1} — отношение удельного химического запаса тепла к избытку начального перегреваемого запаса в точке с максимальной температурой.

Основная цель приближенного асимптотического решения задачи (1.3) — рассмотрение начальной стадии процесса и определение критической величины δ , которая разграничивает два режима. В первом случае при $\delta > \delta^*$ наступает зажигание, во втором случае при $0 < \delta < \delta^*$ наблюдается погасание. Решение будет строиться для значений $\beta \gg 1$, которые типичны для большинства экзотермически реагирующих газов. Полагаем, если специально не оговорено, что

$$L, n, \Gamma, \alpha, \gamma, \quad \partial F / \partial \Theta = 0 \quad (1)$$

2. Решение задачи. Будем искать решение в виде

$$(2.1) \quad \Theta(X, t) = \Theta_i(X, t) + U(X, t, \beta)$$

где Θ_i — решение задачи, описывающей прогрев газа как химически инертного тела

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \partial \Theta_i / \partial t &= \partial^2 \Theta_i / \partial X^2 - \alpha \Theta_i \\ \Theta_i(X, 0) &= \Phi(X), \quad \Phi(0) = 1, \quad d\Phi(0) / dX = 0 \\ d^2 \Phi / dX^2 &< 0 \end{aligned}$$

Решение имеет вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Theta_i(X, t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp\left(-\frac{(X-\eta)^2}{4t}\right) d\eta \\ \Theta_i(0, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Очевидно, что наиболее благоприятные условия для зажигания имеют место вблизи точки с максимальной начальной температурой. Температура в этой точке изменяется по закону

$$(2.4) \quad \Theta_i(0, t) = \frac{e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right) d\eta, \quad \Theta_i(0, 0) = 1$$

Заметим, что если баланс тепловой энергии, определяемый соотношением между тепловой диссипацией и химической генерацией тепла в окрестности точки $X = 0$ в моменты времени, близкие к начальным, станет отрицательным, то зажигание окажется невозможным.

Таким образом, для определения критических условий зажигания достаточно рассмотреть эволюцию начального возмущения температуры в области, прилегающей к точке с максимальной температурой. Из (2.3) следует, что распределение температуры инертного разогрева в окрестности этой точки при малых временах имеет вид

$$(2.5) \quad \Theta_i(X, t) = 1 + \frac{d^2 \Phi(0)}{dX^2} \left[\frac{X^2}{2} + t \right] - \alpha t + O(X^2, t)$$

При анализе изменения температуры, связанной с химическим разогревом, выделим область изменения переменных X, t , в которой химиче-

ский разогрев является существенным (внутренняя область), и область, в которой химическим разогревом можно пренебречь (внешняя область).

Введем во внутренней области новые переменные $\tau = t\beta$ и $\xi = X\sqrt{\beta}$ и будем искать решения для U и y в виде

$$(2.6) \quad \begin{aligned} U(X, t, \beta) &= \beta^{-1} U_1(\xi, \tau) + \beta^{-2} U_2(\xi, \tau) + O(\beta^{-3}) \\ y(X, t, \beta) &= y_0(\xi, \tau) + \beta^{-1} y_1(\xi, \tau) + O(\beta^{-2}) \end{aligned}$$

Будем считать, что

$$(2.7) \quad \delta \equiv f_0(\beta) \delta_0 + f_1(\beta) \delta_1, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{f_1(\beta)}{f_0(\beta)} \rightarrow 0$$

Запись (2.7) учитывает, что, вообще говоря, порядок величины δ относительно β может быть различным.

После подстановки (2.6), (2.7) в (1.3) с учетом (2.5) для главных членов разложений (2.6) найдем

$$(2.8) \quad \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} + f_0 \delta_0 (1 - y_0)^n \Gamma \exp \left[U_1 - \alpha \tau + \frac{d^2 \Phi(0)}{dX^2} \left(\frac{\xi^2}{2} + \tau \right) \right]$$

$$(2.9) \quad \frac{\partial y_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + \beta^{-1} \gamma f_0 \delta_0 \Gamma (1 - y_0)^n \exp \left[U_1 - \alpha \tau + \frac{d^2 \Phi(0)}{dX^2} \left(\frac{\xi^2}{2} + \tau \right) \right]$$

$$(2.10) \quad U_1(\xi, 0) = 0, \quad y_0(\xi, 0) = 0$$

$$\frac{\partial U_1(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial y_0(0, \tau)}{\partial \xi} = 0$$

Из (2.8) следует, что при δ , близких к δ^* , второй член в правой части уравнения должен быть одного порядка по β^{-1} с другими, т. е. $f_0(\beta) = 1$. Тогда из (2.9), (2.10) имеем $y_0 \equiv 0$.

Таким образом, в начальной стадии процесса увеличение температуры химического разогрева оказывается существенным при пренебрежимо малом выгорании реагента. Уравнение (2.8) в зависимости от величины δ_0 должно определить различный тип поведения функции $U_1(\tau, \xi)$ — монотонно возрастающий, соответствующий зажиганию, или немонотонный, имеющий участок роста, после которого начинается спад, соответствующий погасанию. Условия сращивания внутреннего решения при $\xi \rightarrow \infty$ с внешним выполняются автоматически, поэтому нет необходимости их рассматривать. В общем случае для нахождения δ^* необходимо численно решить задачу (2.8).

3. Частные случаи. Рассмотрим частные случаи, учитывая, что $y_0 \equiv 0$. Уравнение (2.8) запишем в виде

$$(3.1) \quad \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} + \delta_0 \exp \left[U_1 - \alpha \tau + \Phi''(0) \left(\frac{\xi^2}{2} + \tau \right) \right]$$

$$U_1(\xi, 0) = 0, \quad U_{1\xi}(0, \tau) = 0, \quad U_1(\infty, \tau) = 0$$

Исследуем случай, когда $\alpha \neq 0$, $d^2 \Phi(0) / dX^2 = 0$, т. е. будем рассматривать функции Φ , которые при $X \rightarrow 0$ имеют вид $\Phi = 1 - O(X^n)$, где $n \neq 2$.

В силу того что начальные условия не зависят от ξ , при $\tau > 0$ имеем

$$(3.2) \quad U_1(\xi, \tau) = U_1(\tau), \quad \partial U_1 / \partial \tau = \delta_0 \exp(U_1 - \alpha \tau), \quad U_1(0) = 0$$

Отсюда

$$(3.3) \quad U_1 = -\ln [1 - \delta / \alpha + \delta / \alpha e^{-\alpha \tau}]$$

В зависимости от величины δ / α решение (3.3) различно. При $0 < \delta / \alpha < 1$ оно растет от $U_1(0)$ до максимального значения при $t \rightarrow \infty$

$$U_1(\infty) = -\ln [1 - \delta / \alpha] > 0$$

При $\delta / \alpha = 1$ решение имеет вид $U_1 = \alpha \tau$ и при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. При $\delta / \alpha > 1$ решение носит взрывной характер, для $\bar{\tau} = -1/2 \ln (1 - \alpha / \delta)$ температура $U_1(\bar{\tau}) = \infty$. Итак, $\delta^* = \alpha$. В размерном виде

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{kQ\rho_0^{n-1} \exp(-E/RT_0)}{\alpha'(T_0 - T_-)}$$

т. е. для случая $\Phi''(0) = d^2\Phi(0)/dX^2 = 0$, $\alpha \neq 0$ при $\delta / \alpha > 1$ наступит зажигание, при $\delta / \alpha < 1$ — погасание. Следует заметить, что в данном случае начальный размер очага не играет существенной роли.

В случае $\Phi''(0) \neq 0$ для уменьшения числа независимых параметров удобно ввести новые параметры

$$\eta = \xi (|\Phi''(0)|)^{1/2}, \quad p = \tau |\Phi''(0)| \\ b = \delta_0 |\Phi''(0)|^{-1}, \quad a = \alpha |\Phi''(0)|^{-1}$$

Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$(3.4) \quad \frac{\partial U_1}{\partial p} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} + b \exp(U_1 - (a+1)p - \eta^2/2) \\ U_1(\eta, p=0) = 0, \quad U_{1\eta}(0, p) = 0, \quad U_1(\infty, p) = 0$$

В связи с тем, что в показателе экспоненты в (3.4) имеется слагаемое $-\eta^2/2$, приводящее к быстрому убыванию функции тепловыделения, при приближенном анализе вместо (3.4) можно рассмотреть уравнение

$$(3.5) \quad \frac{\partial v}{\partial p} = b_0 \exp(v - (a+1)p), \quad v(p=0) = 0$$

Отметим, что критическое значение b_0^* , соответствующее уравнению (3.5), будет меньше, чем b^* , соответствующее уравнению (3.4). Это связано с тем, что в (3.4) присутствует диффузионный член $\partial^2 U_1 / \partial \eta^2$, играющий роль теплоотвода из зоны с повышенной температурой. Однако приближенное уравнение (3.5) дает правильную качественную картину процесса.

Из (3.5) найдем

$$(3.6) \quad v = -\ln [(b_0 / (a+1)) (e^{-(a+1)p} - 1) + 1]$$

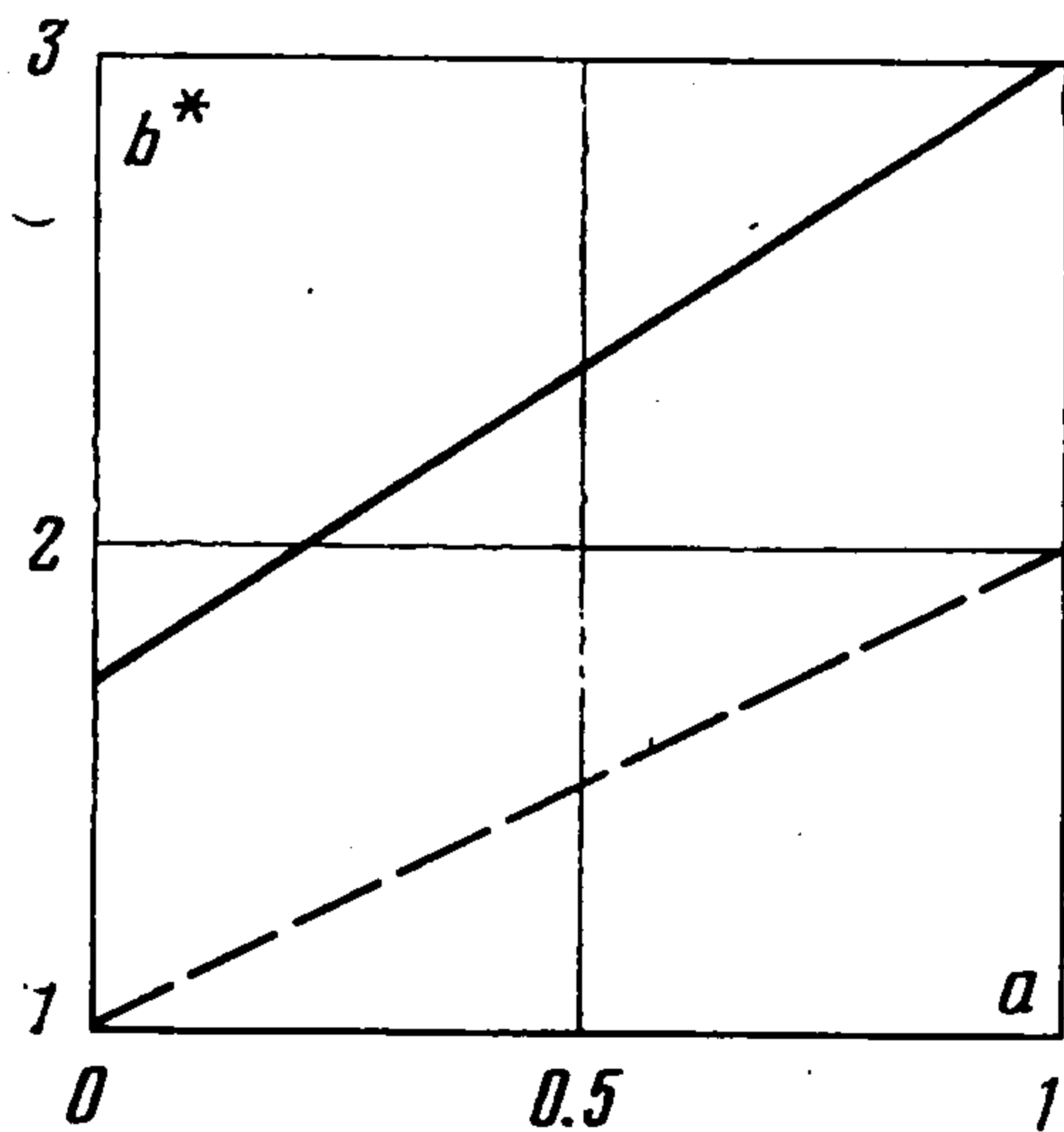
Формула (3.6) дает критическое значение b_0^* , $b_0^* = a + 1$, случай $b_0 < a + 1$ соответствует погасанию, случай $b_0 > a + 1$ — зажиганию. В размерном виде условие зажигания запишется в виде

$$\frac{kQ\rho_0^{n-1} \exp(-E/RT_0)}{(T_0 - T_-)(\alpha' + \Phi''\lambda\rho_0 l_T^2)} \gg 1$$

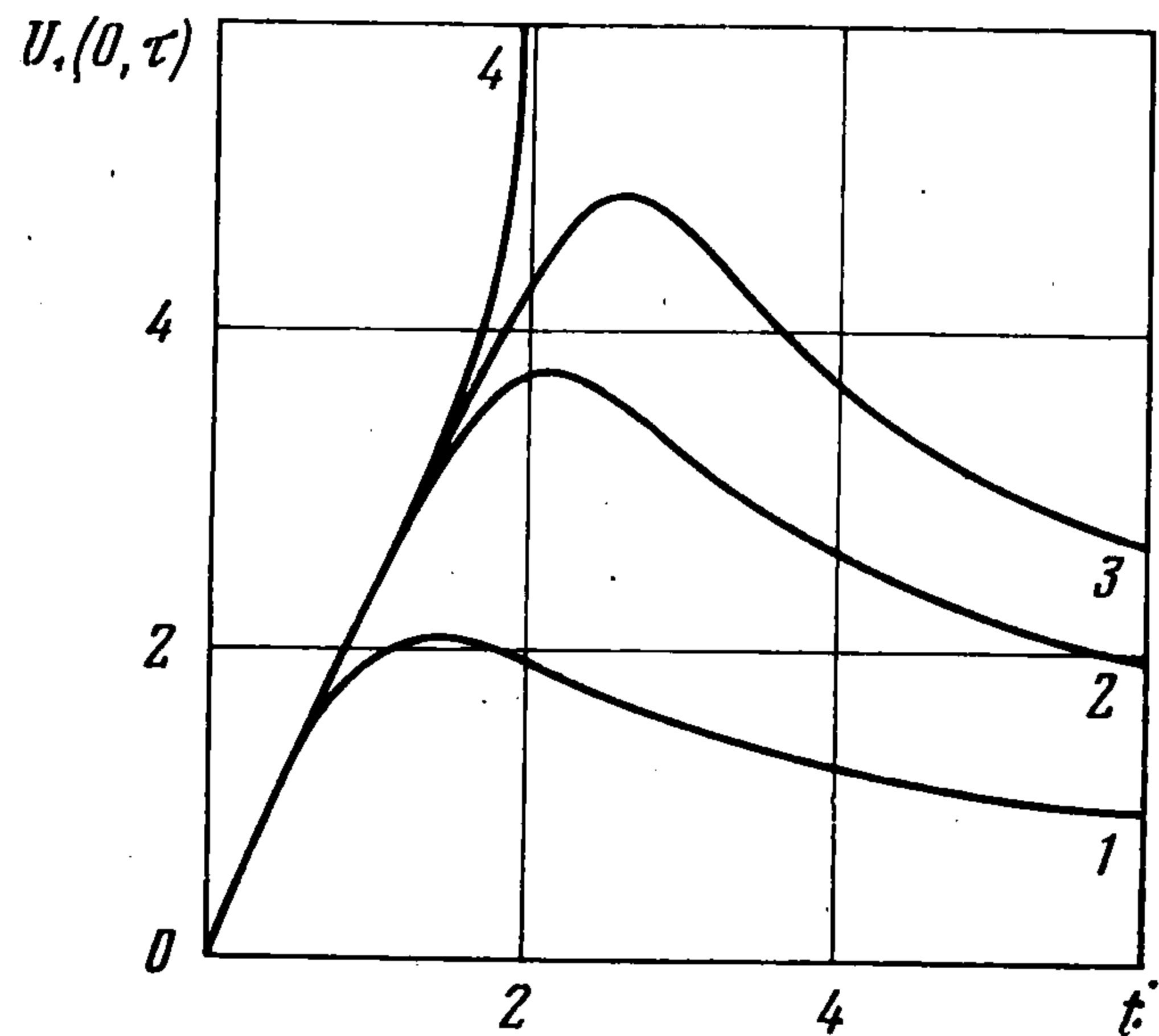
Кривая $b_0^* = b_0^*(a)$ изображена на фиг. 1 штриховой линией.

Уравнение (3.4) решали также численно для начального распределения температуры $\Phi(X) = \exp(-X^2/2)$. Результаты представлены на фиг. 1

в виде зависимости $b(a)$. Область значений параметров, лежащих выше кривой, соответствует зажиганию, область параметров под кривой — погасанию. Расчеты показывают, что в отсутствие теплоотвода $a = 0$ критическое значение $b^* = 1.7$. Критическое значение, полученное по



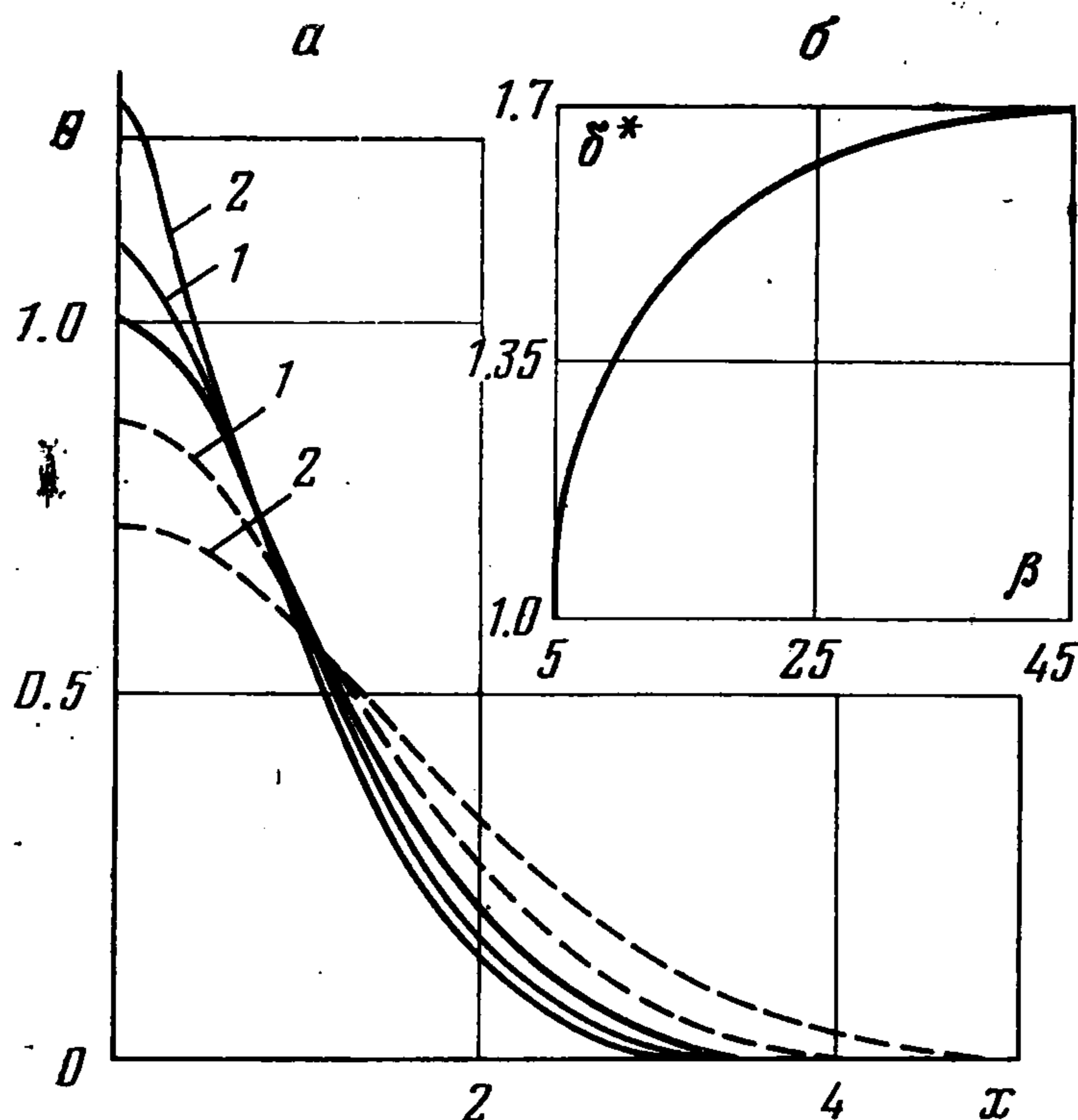
Фиг. 1



Фиг. 2

формуле (3.6), дает $b_0^* = 1$. Это говорит о том, что даже грубое рассмотрение позволяет делать правильные качественные выводы.

На фиг. 2 кривые 1—4 показывают зависимость максимума температуры химического разогрева $U_1(0, \tau)$ от времени при фиксированном $b = 2.5$ для значений $a = 0.8, 0.65, 0.675, 0.6$. Качественное изменение хода кривых, соответствующее зажиганию, наблюдается при $a = 0.6$.



Фиг. 3

Для исследования точности асимптотических методов полную задачу (1.3) решали численно для $\Phi = \exp(-X^2/2)$, $\alpha = 0$. Результаты расчета представлены на фиг. 3. Полная картина температурного поля показана на фиг. 3, а. Жирная кривая характеризует первоначальный очаг. Сплошными линиями 1 и 2 показано изменение температуры со временем в случае зажигания при $\delta = 1.55$, $\beta = 10$, $t_1 < t_2$. Штриховые линии характеризуют пространственно-временное распределение температуры в случае погасания для $\delta = 1.21$ и $\beta = 10$ в те же моменты времени $t_1 < t_2$.

На фиг. 3, б показана зависимость δ^* от β ; для параметров, лежащих выше кривой, наступает зажигание. Поскольку точность асимптотических методов улучшается при $\beta \rightarrow \infty$, то имеет смысл сравнивать асимптотическое и численное решения при $\beta \rightarrow \infty$. Из приближенной задачи (3.1) для $a = 0$ значение $b^* = 1.7$. Как показывают расчеты (1.3) и фиг. 3, б при $\alpha = 0$, $\beta = 50$ значение $\delta^* = 1.71$, т. е. имеется хорошее совпаде-

ние результатов. Хотя уравнение (3.1) не всегда решается аналитически, оно позволяет рассмотреть интересные частные случаи, соответствующие различным $d^2\Phi / dX^2$, α , и получить качественные характеристики процесса.

Поступила 1 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Linan A., Williams F. A.* Theory of ignition of a reactive solid by constant energy flux. *Combustion Sci. and Technol.*, 1971, vol. 3, No. 2, p. 91.
2. *Linan A., Williams F. A.* Radiant ignition of a reactive solid with in-depth absorption. *Combustion and Flame*, 1972, vol. 18, No. 1, p. 85.
3. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Асимптотический анализ зажигания газа накаленной поверхностью. *ПМТФ*, 1977, № 1.
4. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* О поджигании гомогенной реагирующей среды тепловым источником с конечным запасом тепла. *ПММ*, 1976, т. 40, вып. 6.
5. *Буркина Р. С., Виллюнов В. Н.* Асимптотический анализ задачи зажигания реакционно-способного вещества нагретой поверхностью. *ПМТФ*, 1976, № 6.
6. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М.* О зажигании реагирующего газа тепловым источником с конечным запасом тепла. *ПММ*, 1979, т. 43, вып. 1.
7. *Зельдович Я. Б.* К теории зажигания. *Докл. АН СССР*, 1963, т. 150, № 2.
8. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.