

## О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ГАЗА В ТРУБАХ

А. Н. Крайко, А. Л. Ни

(Москва)

Рассматриваются одномерные нелинейные колебания идеального газа в трубах. Учитывается зависимость наклона характеристик от возмущений параметров и возможность возникновения слабых скачков, но пренебрегается изменением в них энтропии и инвариантов Римана. Особое внимание уделяется случаям, когда можно не принимать во внимание взаимодействия волн разных семейств. В качестве примера анализируются околорезонансные колебания, для которых нелинейные эффекты и образование скачков особенно важны.

Из имеющихся отношение к дальнейшему исследований по нелинейной акустике идеального газа и других сред укажем на работы [1 - 19]. Для получения конкретных результатов из них решающей оказалась работа [1], где дан сравнительно простой, хотя и формальный способ построения некоторого класса разрывных решений и приведены иллюстрации его эффективности. Метод, используемый ниже, примыкает к более физическому направлению, которое развивалось в [2 - 9] и в противоположность [1] опирается на достаточно прозрачные соображения, связанные с характеристиками, их пересечениями и т. п.

Постановка и решение задач о нелинейных периодических колебаниях невозможны (или неоправданы) без выяснения ряда моментов принципиального характера. Так, физически очевидные и наблюдаемые в эксперименте периодические режимы со скачками чаще всего нельзя описать точными уравнениями идеального газа. Действительно, рост энтропии, имеющий место в «точной постановке», при отсутствии среднего потока через трубу неизбежно уводит систему от резонанса, что и наблюдалось в [20]. Поэтому анализ околорезонансных режимов возможен либо в приближении модели, учитывающей отвод тепла через стенки, либо в рамках упрощенных уравнений, пренебрегающих ростом энтропии на скачках. Упрощение уравнений оправдано и по той причине, что в подобных задачах благодаря возникновению скачков колебания малы и вдали и вблизи от резонанса (хотя во втором случае они больше, чем в первом). Данное обстоятельство, затрудняя применение численных методов, эффективных в других газодинамических задачах, гарантирует аккуратность приближенных уравнений.

Исходя из высказанных выше соображений, авторы развили подход, который опирается на упрощенные уравнения и на специальную численную процедуру и обладает рядом преимуществ (в частности, по простоте и кругу решаемых задач) по сравнению с предложенными в цитированных работах. Включение в численную процедуру естественного алгоритма построения скачков, возникающих на длине трубы, снимает вопрос о стыковке гладких участков решения, который, пожалуй, является наиболее слабым звеном практически всех выполненных до сих пор исследований.

1. Рассмотрим одномерные колебания в трубе при малых скоростях и почти однородных прочих параметрах. Однородным параметрам припишем нулевой индекс. Для скорости  $u$  и скорости звука  $a$  примем, что  $u =$

$= a_0 \varepsilon u'$  и  $a = a_0 (1 + \varepsilon a')$ , где  $\varepsilon$  характеризует отклонения  $u$  и  $a$  от  $u_0 = 0$  и от  $a_0$  и выбрано так, что  $\max(|u'|, |a'|) = 1$ . Параметр  $\varepsilon$  не обязательно совпадает с амплитудами внешних воздействий, которые могут быть заданы на левом ( $x = 0$ ) или на правом ( $x = X$ ) концах трубы. В трубе могут возникать скачки, амплитуда которых не превышает  $2\varepsilon$ , а приращение энтропии в каждом скачке —  $O(\varepsilon^3)$ . Принимая во внимание сказанное выше, будем пренебрегать этим ростом, считая энтропию газа не отличающейся от ее среднего значения. Тогда течение в каждой точке полностью определится значениями  $u$  и  $a$  или их функциями — инвариантами Римана  $J^\pm$ . Для совершенного газа  $J^\pm = u \pm 2a / (\kappa - 1)$ , где  $\kappa$  — показатель адиабаты.

В областях непрерывности  $J^+$  ( $J^-$ ) сохраняются на  $c^+$  ( $c^-$ )-характеристиках, а при пересечении характеристиками скачков «противоположного» семейства они, как и энтропия, изменяются не более чем на  $O(\varepsilon^3)$ . Если, распространяясь по трубе, каждая характеристика пересечет  $N$  скачков, то суммарное изменение  $J^\pm$  не превысит  $O(\varepsilon^3 N)$  и при  $\varepsilon^3 N \ll \varepsilon$  будет пренебрежимо мало, по сравнению с отличием инвариантов от «средних» значений. Для  $N \ll \varepsilon^{-2}$  даже при наличии слабых скачков с точностью до  $\varepsilon$  включительно  $J^+ = J^+[\xi(t, x)]$  и  $J^- = J^-[\eta(t, x)]$ , где  $\xi$  и  $\eta$  — характеристические переменные, сохраняющие постоянные значения соответственно на  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристиках. Эффекты нелинейности носят при этом накопительный (кумулятивный) характер, вызывая (из-за зависимости скорости характеристик от параметров) их пересечения друг с другом и со скачками одноименного семейства.

Наряду с  $u'$  и  $a'$  введем  $x'$ ,  $t'$  и  $J^{\pm'}$  равенствами

$$(1.1) \quad x = x'L, \quad t = t'L / a_0, \quad J^\pm = a_0 \varepsilon J^{\pm'} \pm 2a_0 / (\kappa - 1)$$

где  $L$  — характерный размер, а  $t$  — время. Если  $T$  — характерное время, например период для периодического течения, то в силу (1.1)  $T = T'L / a_0$ ,  $X = X'L$  и  $J^{\pm'} = u' \pm 2a' / (\kappa - 1)$ , а согласно выбору  $\varepsilon$ , максимум  $|J^{\pm'}| \sim O(1)$ . Ниже используются только «штрихованные» величины, штрихи над которыми опускаются. Для инвариантов можно поставить граничные условия:  $J^+(t, 0) = F^+(t)$ ,  $J^-(t, X) = F^-(t)$  с непрерывными или разрывными  $F^\pm(t) \sim O(1)$ , которые будем считать такими, что для любых моментов  $t_1$  и  $t_2$

$$(1.2) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} F^\pm(t) dt \right| \leq A^\pm T$$

с константами  $A^\pm \sim O(1)$ .

В принятых обозначениях уравнения характеристик запишутся в форме

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_\xi &= 1 + \varepsilon(u + a) = 1 + \varepsilon \left[ \frac{\kappa + 1}{4} J^+(\xi) + \frac{3 - \kappa}{4} J^-(\eta) \right] \\ \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_\eta &= -1 + \varepsilon(u - a) = -1 + \varepsilon \left[ \frac{\kappa + 1}{4} J^-(\eta) + \frac{3 - \kappa}{4} J^+(\xi) \right] \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\xi(\eta)$  постоянно на каждой  $c^+$  ( $c^-$ )-характеристике, взяв в качестве  $\xi(\eta)$  моменты, в которые  $c^+$  ( $c^-$ )-характеристика покинула се-

чение  $x = 0$  ( $X$ ), и проинтегрировав приведенные уравнения, найдем

$$(1.4) \quad \begin{aligned} c^+: \quad t - x &= \xi - \varepsilon \left[ \frac{\kappa + 1}{4} J^+(\xi) (t - \xi) + \frac{3 - \kappa}{4} \int_{\xi}^t J^-(\eta) dt \right] \\ c^-: \quad t + x &= \eta + X + \varepsilon \left[ \frac{\kappa + 1}{4} J^-(\eta) (t - \eta) + \frac{3 - \kappa}{4} \int_{\eta}^t J^+(\xi) dt \right] \end{aligned}$$

Интеграл в первом уравнении вычисляется при  $\xi = \text{const}$ , а во втором — при  $\eta = \text{const}$ . Из-за пересечений одноименных характеристик возникают ударные волны. Так как скорость слабого скачка с точностью до  $\varepsilon$  включительно равна полусумме скоростей сходящихся на нем характеристик [17], то, например, для скачка, бегущего вправо

$$(1.5) \quad \frac{dx_s}{dt} = 1 + \varepsilon \left[ \frac{\kappa + 1}{8} J^+(\xi_{s1}) + \frac{\kappa + 1}{8} J^+(\xi_{s2}) + \frac{3 - \kappa}{4} J^-(\eta_s) \right]$$

где учтено, что  $J^-$  при пересечении слабого скачка «первого семейства» (« $c^+$ -скачка») не изменяется, индекс  $s$  приписан параметрам на скачке, а индексы 1 и 2 — параметрам с разных сторон от него. В силу (1.4)  $t - \xi = x + O(\varepsilon X)$ , а  $t - \eta = X - x + O(\varepsilon X)$ . Следовательно, (1.4) можно заменить на

$$(1.6) \quad \begin{aligned} c^+: \quad t - x &= \xi - \varepsilon \left[ \frac{\kappa + 1}{4} J^+(\xi) x + \frac{3 - \kappa}{4} \int_{\xi}^t J^-(\eta) dt \right] + O(\varepsilon^2 X) \\ c^-: \quad t + x &= \eta + X + \varepsilon \left[ \frac{\kappa + 1}{4} J^-(\eta) (X - x) + \frac{3 - \kappa}{4} \int_{\eta}^t J^+(\xi) dt \right] + \\ &+ O(\varepsilon^2 X) \end{aligned}$$

Уравнения (1.5) и (1.6) вместе с начальными распределениями  $J^\pm$  и граничными условиями, например для  $J^+$  на левом и для  $J^-$  на правом концах трубы, полностью определяют течение. В отличие от линейного (акустического) приближения при  $t \gg X$  начальные распределения «забываются», и периодические граничные условия «вырабатывают» решение, периодическое по  $t$ . Анализ значительно упрощается, если взаимодействие волн, бегущих в разных направлениях, оказывается несущественным, что позволяет пренебречь в правых частях (1.5) и (1.6) слагаемыми с множителем  $(3 - \kappa)$ . Тогда  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристики заменяются прямыми

$$(1.7) \quad \begin{aligned} c^+: \quad t - x &= \xi - \varepsilon (\kappa + 1) J^+(\xi) x / 4 \\ c^-: \quad t + x &= \eta + X + \varepsilon (\kappa + 1) J^-(\eta) (X - x) / 4 \end{aligned}$$

а уравнения скачков после пренебрежения членами порядка  $\varepsilon^2 T$  станут

$$(1.8) \quad \begin{aligned} c^\pm: \quad \frac{dt_s}{dx} &= \pm 1 - \varepsilon \frac{\kappa + 1}{8} (J_{s1}^\pm + J_{s2}^\pm) \\ (J_{si}^+ &= J^+(\xi_{si}), \quad J_{si}^- = J^-(\eta_{si})) \end{aligned}$$

Течения, описываемые каждой парой уравнений (1.7) и (1.8), как и в [17-19], — последовательности простых волн, разделенных слабыми скачками.

В рассматриваемых здесь задачах пренебрежение взаимодействием волн разных семейств использовалось и частично обосновывалось в [5-8]. Следует, однако, подчеркнуть, что это приближение в таких задачах справедливо далеко не всегда. Наряду с очевидным случаем  $\kappa = 3$  пренебрежение членами порядка  $\varepsilon T$  в (1.7) и (1.8) допустимо, во-первых, для длинных труб, для которых  $n \equiv X/T \gg 1$ , и, во-вторых, при  $n \sim 1$  для части околорезонансных режимов. Заметим, что если последнее допустимо, то вместо интегрирования (1.8) замену многозначного решения однозначным разрывным можно проводить так. Рассмотрим для определенности  $c^+$ -волну. Пусть в ней в сечении  $x = \text{const}$  зависимость  $t = t(J^+)$ , определенная согласно (1.7), оказалась многозначной. Тогда скачок, устраняющий многозначность, пересекает данное сечение в момент  $t = t_s(x)$ , который определяется условием

$$\int_{J_{s1}^+(x)}^{J_{s2}^+(x)} [t(J^+) - t_s] dJ^+ = 0$$

Это правило в данном случае выводится практически так же, как и в [17], и, будучи переписанным с помощью (1.7) и (1.8), принимает вид

$$(1.9) \quad \int_{\xi_{s1}}^{\xi_{s2}} J^+(\xi) d\xi = \frac{1}{2} (J_{s1}^+ + J_{s2}^+) (\xi_{s2} - \xi_{s1})$$

При выводе (1.9) для  $t_s$  использовалась формула  $t_s = t(\xi_{s1}) = t(\xi_{s2}) = [t(\xi_{s1}) + t(\xi_{s2})] / 2$  с зависимостью  $t(\xi)$ , определенной по (1.7). Можно показать, что (1.9) верно и тогда, когда ударная волна есть уже при  $x = 0$ , т. е. распределение  $J^+(\xi)$  разрывно.

Заканчивая изложение соображений общего характера, приведем интегральный закон, который можно использовать, например, для контроля результатов счета. Указанный закон «сохранения инварианта», аналогичный закону сохранения импульса в простой волне, записывается в форме

$$(1.10) \quad \int_{t_1}^{t_2} J^+ dt - \frac{1}{2} (J_1^+ + J_2^+) (t_2 - t_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} J^+ d\xi - \frac{1}{2} (J_1^+ + J_2^+) (\xi_2 - \xi_1)$$

Для  $c^-$ -волн равенства, эквивалентные (1.9) и (1.10), получаются из них заменой  $\xi$  на  $\eta$  и индекса плюс на минус.

2. Обоснуем сделанные выше утверждения о применимости (1.7) — (1.10). Начнем с длинных труб. Оценку отброшенных в (1.6) членов выполним для  $c^-$ -волны, ограничившись сначала интервалом  $t_1 \leq t \leq t_2$ , на котором волну пересекает один  $c^+$ -скачок. В силу (1.7) вдоль  $c^-$ -характеристики  $\eta = \text{const}$  и

$$2dt = d\xi - \varepsilon (\kappa + 1) (J^- dx + J^+ dx + x dJ^+) / 4$$

Поэтому, учитывая (1.7), получим

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_1}^{t_2} J^+ dt &= \left( \int_{\xi_1}^{\xi_{s1}} + \int_{\xi_{s2}}^{\xi_2} \right) J^+ d\xi - \varepsilon \frac{\kappa + 1}{4} \int_{x_1}^{x_2} J^+ J^- dx - \\ &- \varepsilon \frac{\kappa + 1}{4} \left[ \int_{x_1}^{x_2} (J^+)^2 dx + \left( \int_{J_1^+}^{J_{s1}^+} + \int_{J_{s2}^+}^{J_2^+} \right) J^+ x dJ^+ \right] = \int_{\xi_1}^{\xi_2} J^+ d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \varepsilon \frac{\kappa + 1}{8} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} [2J^+J^- + (J^+)^2] dx + (J_2^+)^2 x_2 - (J_1^+)^2 x_1 \right\} - \\
 & - \int_{\xi_{s1}}^{\xi_{s2}} J^+ d\xi + \varepsilon \frac{\kappa + 1}{8} x_s [(J_{s2}^+)^2 - (J_{s1}^+)^2] = \int_{\xi_1}^{\xi_2} J^+ d\xi - \\
 & - \varepsilon \frac{\kappa + 1}{8} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} [2J^+J^- + (J^+)^2] dx + (J_2^+)^2 x_2 - (J_1^+)^2 x_1 \right\} - \\
 & - \int_{\xi_{s1}}^{\xi_{s2}} J^+ d\xi + \frac{1}{2} (J_{s1}^+ + J_{s2}^+) (\xi_{s2} - \xi_{s1})
 \end{aligned}$$

Опустив далее в силу (1.9) два последних слагаемых и выполнив суммирование по всем отрезкам  $c^-$ -характеристики от  $t = \eta$  до текущего  $t$ , найдем

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\eta}^t J^+ dt &= \int_{\xi(\eta)}^{\xi(t)} J^+ d\xi - \varepsilon \frac{\kappa + 1}{8} \left\{ \int_X^x [2J^+J^- + (J^+)^2] dx + \right. \\
 & \left. + (J^+[\xi(t)])^2 x - (J^+[\xi(\eta)])^2 X \right\} = O(T) + O(\varepsilon X)
 \end{aligned}$$

т. е. соответствующие слагаемые в (1.6)  $O(\varepsilon T + \varepsilon^2 X)$  и при  $n \gg 1$  малы по сравнению с  $\varepsilon X$ . Подчеркнем, что взаимное сокращение в предыдущем равенстве в силу (1.9) двух последних слагаемых имеет для длинных труб принципиальное значение. Действительно, как можно показать, каждое из этих слагаемых есть  $O(\varepsilon X)$  и, следовательно, суммирование по всем отрезкам  $c^-$ -характеристики давало бы  $O(\varepsilon X^2 / T)$  и не могло быть опущено. Для  $c^+$ -характеристик и ударных волн аналогичный анализ приводит к тому же результату.

Для коротких труб ( $n \sim 1$ ) нелинейные эффекты особенно важны на окolorезонансных режимах. При этом, как можно показать, в рассматриваемых далее задачах нужно с высокой точностью знать относительные, а не абсолютные смещения пересекающихся одноименных характеристик и скачков и моменты прихода  $c^-$ -характеристик и ударных волн в сечении  $x = 0$ . Для этих целей (1.7) — (1.10) позволяют учитывать нелинейность с точностью до  $\varepsilon$  включительно, хотя такая точность достаточна и не всегда.

Посмотрим сначала, как волны противоположного семейства влияют на пересечение одноименных характеристик и скачков, а следовательно, и на их эволюцию. На длине трубы пересекаются одноименные характеристики и скачки, принадлежащие «коротким волнам», ширина которых по  $x$  или  $t$  имеет порядок  $\varepsilon X \sim \varepsilon T \ll T$ . Возмущения противоположного семейства с точностью до членов более высокого порядка смещают каждую короткую волну как целое, не изменяя взаимодействия составляющих ее «элементов». С этой точки зрения, приближение невзаимодействующих волн разных семейств описывает течение весьма точно. Что касается точности вычисления моментов прихода  $c^-$ -характеристик в сечение  $x = 0$ , то она также оказывается большей, чем для промежуточных сечений.

Так, в окрестности «полуволнового» резонанса, когда  $2n = k + 1 + \Delta$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , а  $|\Delta| \ll 1$ , как будет видно из дальнейшего, для анализа важна разность  $t - \xi$ , где  $\xi$  — момент выхода с левого конца трубы той  $c^+$ -характеристики, которая, став  $c^-$ -характеристикой после отражения при  $x = X$ , возвращается на левый конец в момент  $t$ . Вблизи «четвертьволнового» резонанса, когда  $4n = 2k + 1 + \Delta$ , ту же роль играет разность  $t - \zeta = (t - \xi) + (\xi - \zeta)$ , в которой моменты  $t$ ,  $\xi$  и  $\zeta$  связаны между собой так же, как в предыдущем случае. Если  $\gamma$  и  $\gamma_1$  — вклады, вносимые в разности  $t - \xi$  и  $t - \zeta$  взаимодействием с волнами противоположного семейства, то мож-

но показать, что  $\gamma$  и  $\gamma_1 = O(\varepsilon n + \Delta)$  и для полуволнового резонанса и для четвертьволнового. В силу (1.4) приведенные оценки обеспечивают правильность высказанных выше утверждений.

3. На правом конце трубы (при  $x = X$ ) поставим условие:  $u(t, X) = 0$  или

$$(3.1) \quad J^-(t, X) = -J^+(t, X)$$

В силу (1.6) и (3.1) имеем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} J^-[t(\xi), 0] &= -J^+(\xi, 0) + O(\varepsilon^2 n) \\ t(\xi) &= \xi + 2X - \varepsilon X (\kappa + 1) J^+(\xi, 0) / 2 + O(\varepsilon^2 X + \varepsilon \gamma T) \end{aligned}$$

где учтено, что число скачков  $N \sim n$ . На левом конце трубы поставим такое граничное условие:

$$(3.3) \quad \varepsilon \alpha [J^+(t, 0) + \beta J^-(t, 0)] = f(\tau) \equiv \delta F(\tau), \quad \tau = t / T$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — известные константы,  $f$  и  $F$  — периодические функции  $\tau$  периода единица, а  $\delta = \max |f|$ . Если при  $x = 0$  колеблется скорость, то  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$ . При колебании давления по закону:  $p = p_0 [1 + f(\tau)]$  имеем:  $\alpha = \kappa / 2$ ,  $\beta = -1$ . Если в задаче о колебании скорости на правом конце трубы фиксировано давление, а не скорость, то  $J^-(t, X) = J^+(t, X)$  — вместо (3.1),  $\alpha = 1/2$ , но  $\beta = -1$ . Такая задача рассматривалась, например, в [6-8, 10]. Ее решение практически совпадает с решением задачи о колебании давления.

Положив  $J(\tau) = J^+(t, 0)$  и  $\xi^\circ = \xi / T$ , найдем, что в силу (3.2) и (3.3)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon \alpha [J(\tau) - \beta J(\xi^\circ)] &= \delta F(\tau) + O(\varepsilon^3 n) \\ \tau &= \xi^\circ + 2n - (\varepsilon n / 2)(\kappa + 1) J(\xi^\circ) + O(\varepsilon^2 n + \varepsilon \gamma) \end{aligned}$$

Такая или почти такая система ранее была получена в [6, 7]. Однако для построения разрывных решений требуется дополнительное условие «устранения многозначности», которое должно опираться на соответствующие уравнения или правила, например на (1.9). В отличие от цитированных выше работ в предлагаемом исследовании указанные правила включены в саму процедуру построения решения на каждом периоде по  $\tau$ . Это не только устраняет возможные неопределенности, но и позволяет естественным образом строить решения с произвольным числом скачков на одном периоде. Определение  $J(\tau)$  включало установление по  $\tau$  и проводилось так. Расчет начинался с задания  $J \equiv 0$  при  $\tau \leq 0$ . Затем из (3.4) находилось  $J$  для  $0 < \tau \leq 1$  с одновременным устранением неоднозначностей в согласии с правилом (1.9). Ввиду периодичности искомого решения] найденное  $J(\tau)$  периодически продолжалось на требуемые для определения  $J$  для  $1 < \tau \leq 2$  отрицательные  $\tau$ . После построения  $J$  на каждом новом периоде процесс повторялся. Заметим, что если  $F(\tau)$  и  $\beta$  фиксированы, то в силу уравнений, определяющих решение,  $\varepsilon \alpha J / \delta$  будет функцией  $\tau$  и «параметров подобия»:  $\Omega \equiv \delta n (\kappa + 1) / \alpha$  и  $n$ , вернее, —  $\tau$ ,  $\Omega$  и  $\nu \equiv 2n - [2n]$ , где  $[f]$  — целая часть  $f$ .

Прежде чем приводить результаты расчетов, рассмотрим случаи, когда система (3.4) может быть упрощена. Если  $\varepsilon^2 \ll \delta$ , то, сохранив в пер-

вом уравнении (3.4) только слагаемые, линейные по  $\varepsilon$ , приходим к уравнению

$$(3.5) \quad \varepsilon \alpha [J(\tau) - \beta J(\tau - 2n)] = \delta F(\tau)$$

описывающему колебания газа в обычном акустическом приближении. Пусть далее  $F(\tau) = \sin 2\pi\tau$ . Поскольку любая периодическая функция с нулевым средним значением раскладывается в ряд Фурье по синусам, то такой выбор позволяет построить решение в общем случае. Для данной функции  $F(\tau)$  периодическое решение (3.5) есть

$$(3.6) \quad \frac{\varepsilon \alpha J}{\delta} = \frac{\sin(2\pi\tau + \varphi)}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \cos 4\pi n}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\beta \sin 4\pi n}{\beta \cos 4\pi n - 1}$$

При резонансе  $1 + \beta^2 - 2\beta \cos 4\pi n = 0$ , и (3.6) теряет смысл. Поскольку  $|\cos 4\pi n| \leq 1$ , а  $1 + \beta^2 \geq 2|\beta|$ , где равенство выполняется лишь при  $|\beta| = 1$ , то резонанс может наблюдаться только для  $\beta = \pm 1$ . Здесь условия резонанса сводятся к равенствам:  $1 \mp \cos 4\pi n = 0$ , что дает  $2n = k + 1$  и  $4n = 2k + 1$  соответственно ( $k = 0, 1, \dots$ ). Вблизи резонанса (при  $|\Delta| \leq \delta$ ) в силу (3.6)  $\varepsilon \geq O(1)$ , т. е. нарушается предположение:  $\varepsilon^2 n \ll \delta$ , использованное при получении (3.5). В связи с рассмотрением резонанса полезно выписать нулевое при  $\tau \leq 0$  решение (3.5) для  $F(\tau) = \theta(\tau) \sin 2\pi\tau$  с функцией Хевисайда  $\theta(\tau)$ , равной нулю при  $\tau < 0$  и — единице при  $\tau \geq 0$ . Как можно показать, оно при  $\tau \geq 0$  имеет вид

$$\frac{\varepsilon \alpha J}{\delta} = \frac{\tau \sin 2\pi\tau}{K} + \frac{1 + \beta}{4\pi K} + \frac{\sin 2\pi\tau}{2} + \frac{\cos 2\pi\tau}{4\pi K} + \frac{K}{\pi} \sum_m \frac{\cos(2\pi M\tau / K)}{K^2 - M^2}$$

$$K(k, \beta) = k + \frac{3 + \beta}{4}, \quad M(m, \beta) = m + \frac{\beta - 1}{4}$$

где суммирование проводится по всем  $m = 0, 1, \dots$ , кроме  $m = k + 1$ .

Другая упрощенная форма (3.4), справедливая при  $\varepsilon n \ll 1$ , получается так. Согласно второму равенству (3.4), разложив  $J(\xi^\circ)$  в окрестности  $\xi^\circ = \tau - 2n$ , приходим к уравнению

$$(3.7) \quad \varepsilon \alpha [J(\tau) - \beta J(\tau - 2n) - (\varepsilon \beta n / 2)(\kappa + 1)J(\tau - 2n)J'(\tau - 2n)] = \delta F(\tau) + O(\varepsilon^3 n + \varepsilon^2 \gamma)$$

при выводе которого принято, что  $J' \equiv dJ/d\tau \sim O(1)$ . Эта оценка несправедлива, например, для пучков волн разрежения, где  $J' \sim \varepsilon^{-1}$ , а также для негладких функций  $F(\tau)$ . Отметим также, что переход к (3.7) и (3.8) в малых (порядка  $\varepsilon$  или  $\Delta$ ) окрестностях скачков приводит к дополнительным погрешностям.

На околорезонансных режимах в задаче о колебаниях скорости  $2n = k + 1 + \Delta$ , а  $\gamma$  близко к равному нулю интегралу от  $J$  по  $(k + 1)$ -му периоду и, как указывалось, есть  $O(\varepsilon n + \Delta)$ . Поэтому, разложив в (3.7)  $J(\tau - 2n)$  в окрестности точки  $\tau - k - 1$  и учитывая периодичность  $J$ , приходим к уравнению

$$(3.8) \quad \varepsilon [J'(\tau)\Delta - (\varepsilon n / 2)(\kappa + 1)J(\tau)J'(\tau)] = 2\delta F(\tau) + O(\varepsilon^3 n^2 + \varepsilon^2 \Delta + \varepsilon \Delta^2)$$

Последнее, как и уравнение (3.17) из [1], справедливо лишь при  $\varepsilon n \ll 1$ , точнее, при  $\varepsilon n J' \ll 1$ . Наиболее существенным их отличием является замена в [1]  $\Delta$  на  $\pi^{-1} \text{tg}(\pi \Delta)$ , которая делает и уравнение из [1] и (3.8) справедливыми вдали и вблизи от резонанса. Без такой замены (3.8) применимо лишь вблизи резонанса, где  $|\Delta| \leq O(\delta)$ , и в силу

(3.8)  $\varepsilon \sim \delta^{1/2}$ . В отличие от (3.7), (3.8) и от уравнения (3.17) из [1] система (3.4) вместе с правилом (1.9) справедлива вне зависимости от величины  $\varepsilon n J^*$  или от степени близости к резонансу.

В задаче о колебаниях давления  $\alpha = \kappa / 2$ ,  $\beta = -1$ , а околорезонансные режимы реализуются при  $4n = 2k + 1 + \Delta$  с  $|\Delta| \lesssim \delta \ll 1$ . Для их анализа запишем (3.4) в два момента времени  $\tau$  и  $\xi^\circ$  с  $\zeta^\circ$ , играющим по отношению к  $\xi^\circ$  ту же роль, что и  $\xi^\circ$  — по отношению к  $\tau$ . Имеем

$$(3.9) \quad \begin{aligned} J(\tau) + J(\xi^\circ) &= (2\delta / \varepsilon \kappa) F(\tau) + O(\varepsilon^2 n) \\ J(\xi^\circ) + J(\zeta^\circ) &= (2\delta / \varepsilon \kappa) F(\xi^\circ) + O(\varepsilon^2 n) \\ \xi^\circ &= \tau - 2n + (\varepsilon n / 2)(\kappa + 1)J(\xi^\circ) + O(\varepsilon^2 n + \varepsilon \gamma) \\ \zeta^\circ &= \xi^\circ - 2n + (\varepsilon n / 2)(\kappa + 1)J(\zeta^\circ) + O(\varepsilon^2 n + \varepsilon \gamma) \end{aligned}$$

Сложим третье и четвертое равенство (3.9), исключим из правой части результирующего уравнения сумму  $J(\xi^\circ) + J(\zeta^\circ)$  при помощи второго равенства той же системы и учтем структуру слагаемых в (1.4), которые в (3.4) и (3.9) дали члены порядка  $\varepsilon \gamma$ . Положив затем  $4n = 2k + 1 + \Delta$ , получим

$$\zeta^\circ = \tau - 2k - 1 - \Delta + (\delta n / \kappa)(\kappa + 1)F(\xi^\circ) + O(\varepsilon^3 n^2 + \varepsilon^2 n + \varepsilon \gamma_1)$$

где, согласно сказанному ранее,  $\gamma_1 = O(\varepsilon n + \Delta)$  при  $|\Delta| \ll 1$ . Ограничиваясь  $|\Delta| \ll 1$ , вычтем второе уравнение (3.9) из первого и используем для  $\zeta^\circ$  последнее выражение. Поступив далее так же, как при выводе (3.7) и (3.8), придем к уравнению

$$(3.10) \quad \varepsilon \Delta \kappa J^*(\tau) - \varepsilon n \delta (\kappa + 1) F(\xi^\circ) J^*(\tau) = 2\delta [F(\tau) - F(\xi^\circ)] + O(\varepsilon^3 n + \varepsilon^4 n^2 + \varepsilon^2 \Delta + \varepsilon \delta^2 n^2)$$

В рассматриваемой задаче (см. п. 2) и отличие от предыдущей  $\gamma \sim O(1)$ . Поэтому уравнение (3.10) в данном случае точнее, чем (3.4). Последнее нетрудно понять, если вспомнить, что при выводе (3.10), кроме (3.4), использована дополнительная информация о слагаемых, ответственных за взаимодействие волн.

Исследование околорезонансных режимов в рамках (3.10) начнем с длинных труб ( $n \gg 1$ ), для которых можно ожидать, что  $\varepsilon n \delta = \chi \delta \gg \gg \max(|\Delta| \varepsilon, \varepsilon^3 n, \varepsilon^4 n^2, \varepsilon \delta^2 n^2)$  с  $\chi \sim O(1)$ . В рассматриваемом случае  $\varepsilon = \chi / n$ , т. е. не зависит от  $\delta$ , а (3.10) сводится к

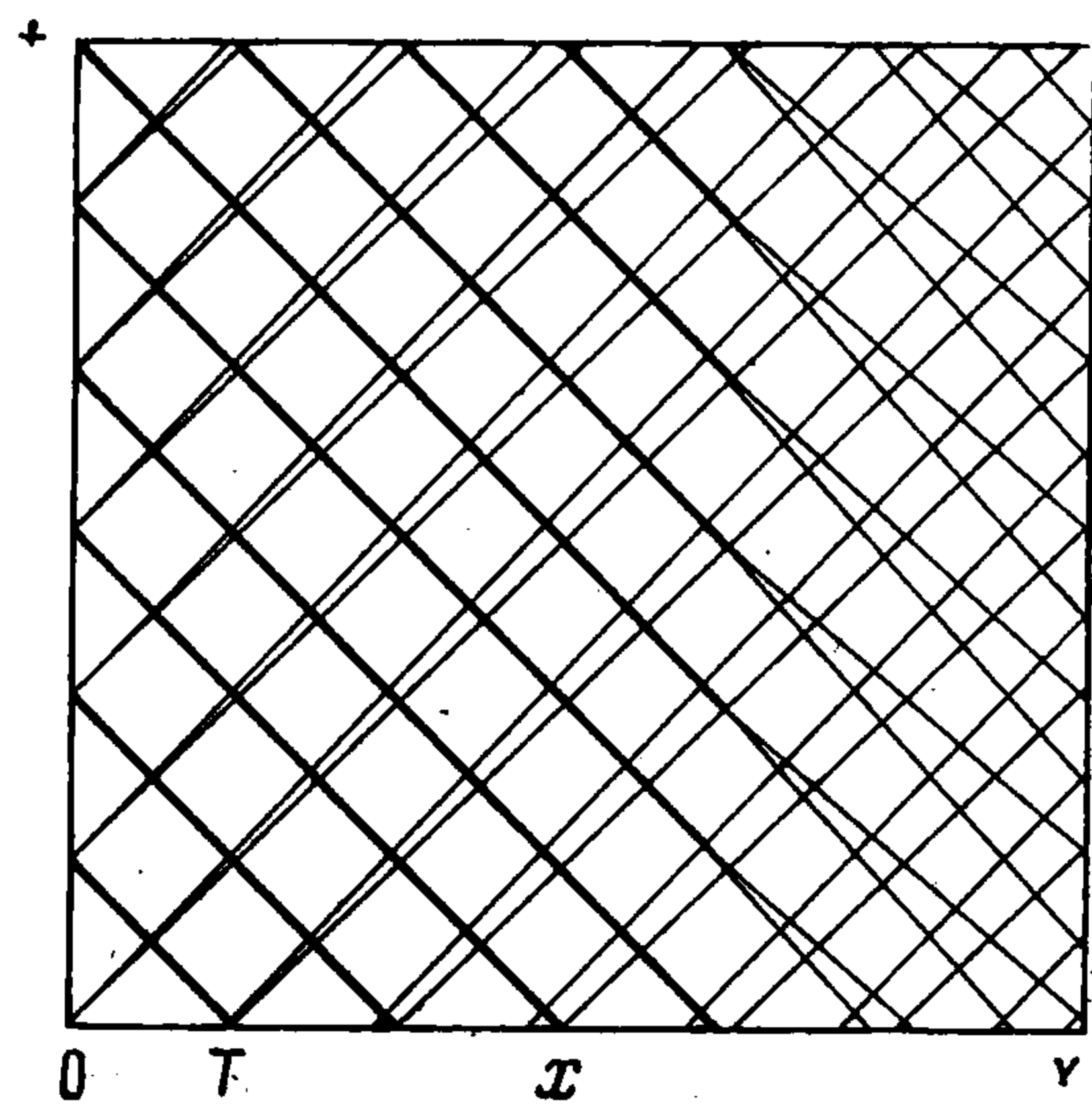
$$(3.11) \quad \varepsilon n J^*(\tau) = 2 [F(\tau - 1/2) - F(\tau)] / (\kappa + 1) F(\tau - 1/2)$$

В соответствии с равенствами и неравенствами, принятыми выше, и со смыслом величин  $\varepsilon$  и  $\delta$  необходимые условия реализации данного приближения таковы:  $\chi / n \gg \delta \gg \max(\chi |\Delta| n^{-1}, \chi^3 n^{-2})$ . Последние, однако, недостаточны. Действительно, в силу вывода (3.10) и (3.11) участки непрерывности  $J(\tau)$  описываются этими уравнениями лишь тогда, когда они — результат двукратного отражения от стенки  $x = X$  характеристик, порожденных непрерывным распределением  $J(\zeta^\circ)$ . Если  $F$  — нечетная относительно полупериода функция, как, например,  $\sin 2\pi\tau$ , то  $F(\tau - 1/2) = -F(\tau)$  и  $\varepsilon n J^*(\tau) = 4 / (\kappa + 1)$ . С другой стороны, согласно (3.9)

$$\xi^\circ = \tau - 2n + \varepsilon n J(\xi^\circ)(\kappa + 1) / 2$$

и такое же соотношение связывает  $\zeta^\circ$  и  $\xi^\circ$ . Отсюда следует, что непрерывное решение (3.11) полностью «опрокидывается», превращаясь в скачок, при прохождении трубы в одном направлении. Поэтому в случае длинных труб, по крайней мере для нечетных  $F$ , функция  $J(\tau)$  подобных участков не содержит. Следовательно, в сечении  $x = 0$ , помимо ударных волн, могут приходиться только  $c$ -характеристики, которые являются отражением от сечения  $x = X$  центрированных волн, возникших при отражении от левого конца трубы скачков уплотнения. Схематически это показано на фиг. 1, на которой тонкие линии — характеристики, а толстые — скачки.

Особый интерес представляет случай, когда ширина центрированной волны в направлении оси  $t$  после возврата в сечение  $x = 0$  равна  $T$ . Можно показать, что для длинных труб именно такая ситуация реализуется на резонансе. При этом начальная интенсивность по  $\varepsilon J$  каждого пучка равна  $1 / (\kappa + 1)n$ , а моменты отражения скачков от сечения  $x = 0$  для  $F = \sin 2\pi t$  совпадают с полупериодами. Хотя в данном случае (3.10) и (3.11) несправедливы, однако независимо от этого  $\varepsilon n \sim O(1)$ , что в силу (3.9) обеспечивает справедливость построенного решения, во всяком случае для  $n^{-1} \sim \delta \gg n^{-2}$ .



Фиг. 1

В рамках (3.9) такие же решения можно построить и при  $n \leq O(1)$ . Здесь  $\varepsilon \sim O(1)$ , а веер волн разрежения есть результат отражения от сечения  $x = 0$  пучка волн сжатия, а не ударной волны (на самом деле волны сжатия, содержащие скачок, могут фокусироваться не в точке, а на малом отрезке оси  $t$ ). Данные решения, тем не менее, не представляют интереса, так как для них не малы слагаемые, стоящие в (3.9) под символом « $O$ ». Вообще при колебании давления на одном из концов короткой трубы анализ околорезонансных режимов в используемом приближении нельзя провести столь полно, как в изученных выше случаях.

Наряду с только что отвергнутой здесь имеются следующие возможности.

Пусть  $|\Delta| \ll 1$ , но все же достаточно велико, чтобы  $\varepsilon |\Delta| \sim \delta \gg \max(\varepsilon^3, \varepsilon^2 |\Delta|)$ . Тогда  $\varepsilon \sim \delta / |\Delta|$ , а соответствующее упрощение равенства (3.10) совпадает с уравнением, которое при  $|\Delta| \ll 1$  можно получить из уравнения акустики (3.5). Последнее естественно, если учесть, что из  $\delta \gg \max(\varepsilon^3, \varepsilon^2 |\Delta|)$  в данном случае следует неравенство  $|\Delta| \gg \delta$ , обеспечивающее удаленность от резонанса.

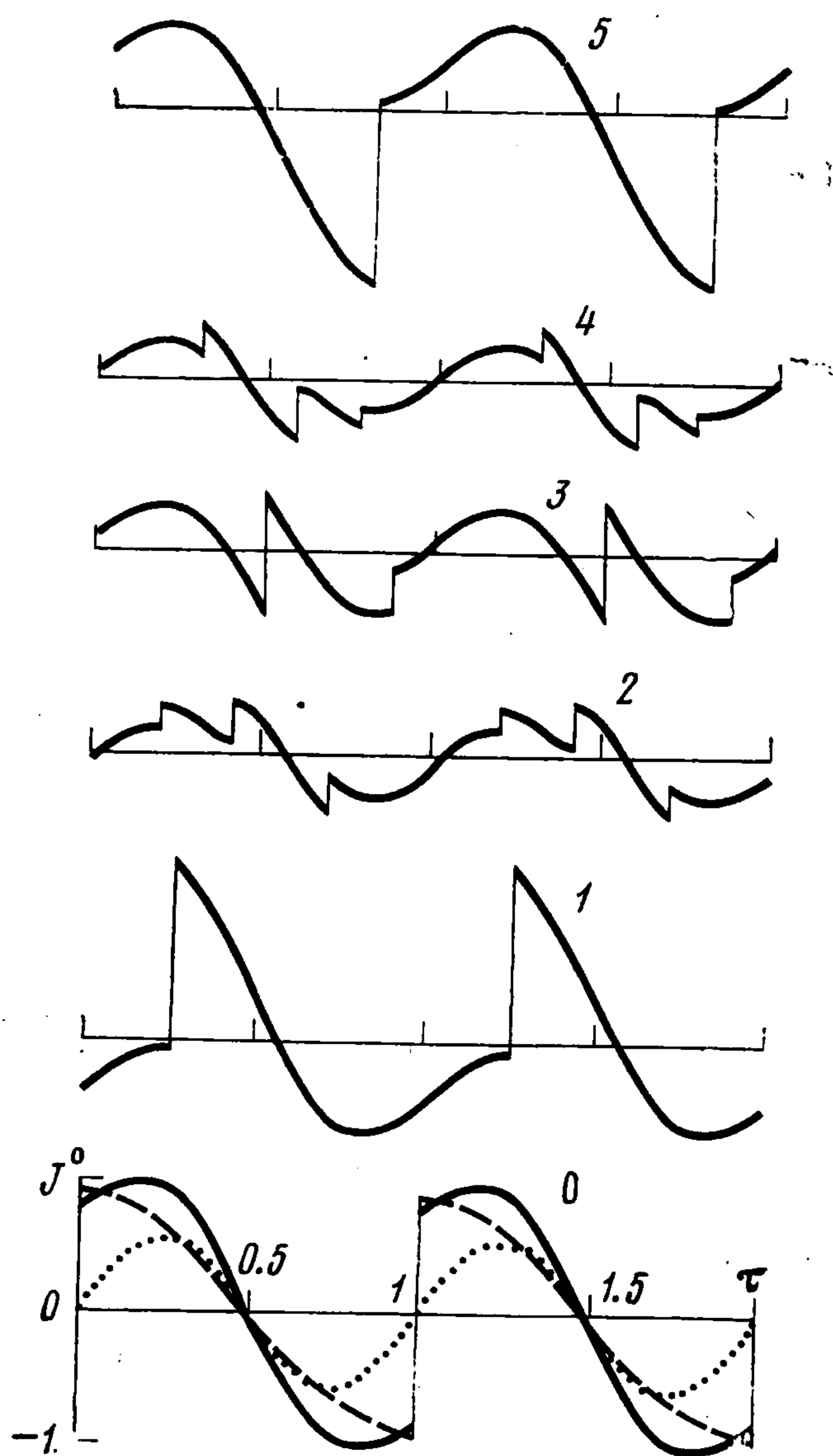
Рассмотрим, наконец, короткую трубу при  $|\Delta| \leq \delta$ . Теперь в (3.10) главным наряду с первым слагаемым правой части может быть только слагаемое порядка  $O(\varepsilon^3)$ . Отсюда, даже не зная его явного вида, находим, что  $\varepsilon \sim \delta^{1/3}$ , в отличие от  $\varepsilon \sim \delta^{1/2}$  в задаче о колебании скорости. Отметим, что необходимость включения в анализ при решении задачи о колебании давления или, что тоже, задачи о трубе с фиксированным давлением на одном из ее концов следует из исследований, выполненных в [6, 8-10], а зависимость  $\varepsilon \sim \delta^{1/3}$  впервые установлена в [10], а затем в [8].

Ввиду важности кубичных по  $\varepsilon$  членов для околорезонансных режимов с заданным и колеблющимся давлением, напомним, чем обусловлено их появление. Прежде всего это переход от (1.4) к (1.6). Если его не делать, то второе уравнение (3.4) заменится на

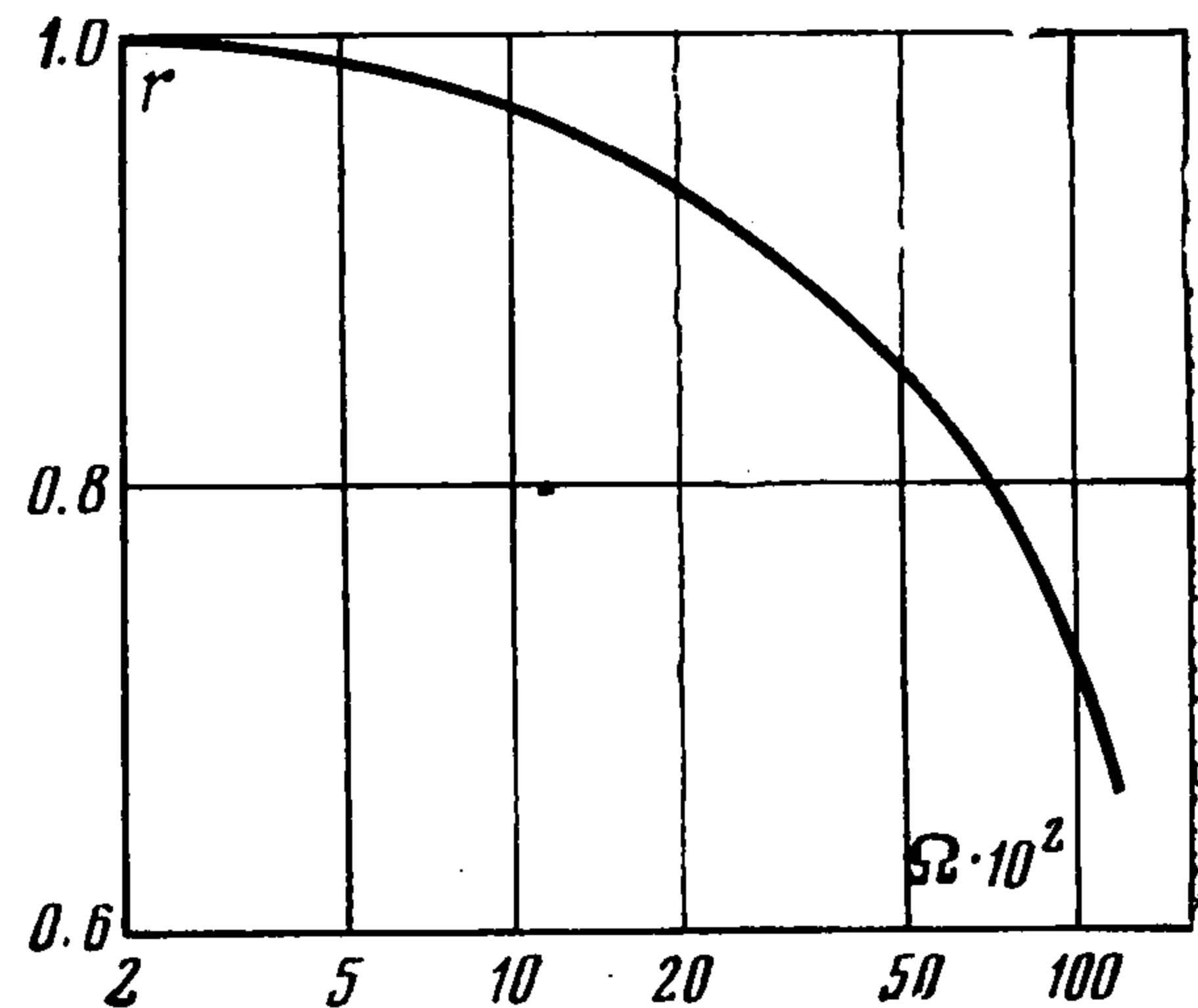
более точное равенство

$$\tau = \xi^0 + [2n + O(\varepsilon\gamma)] / [1 + \varepsilon(\kappa + 1)J(\xi^0)/4]$$

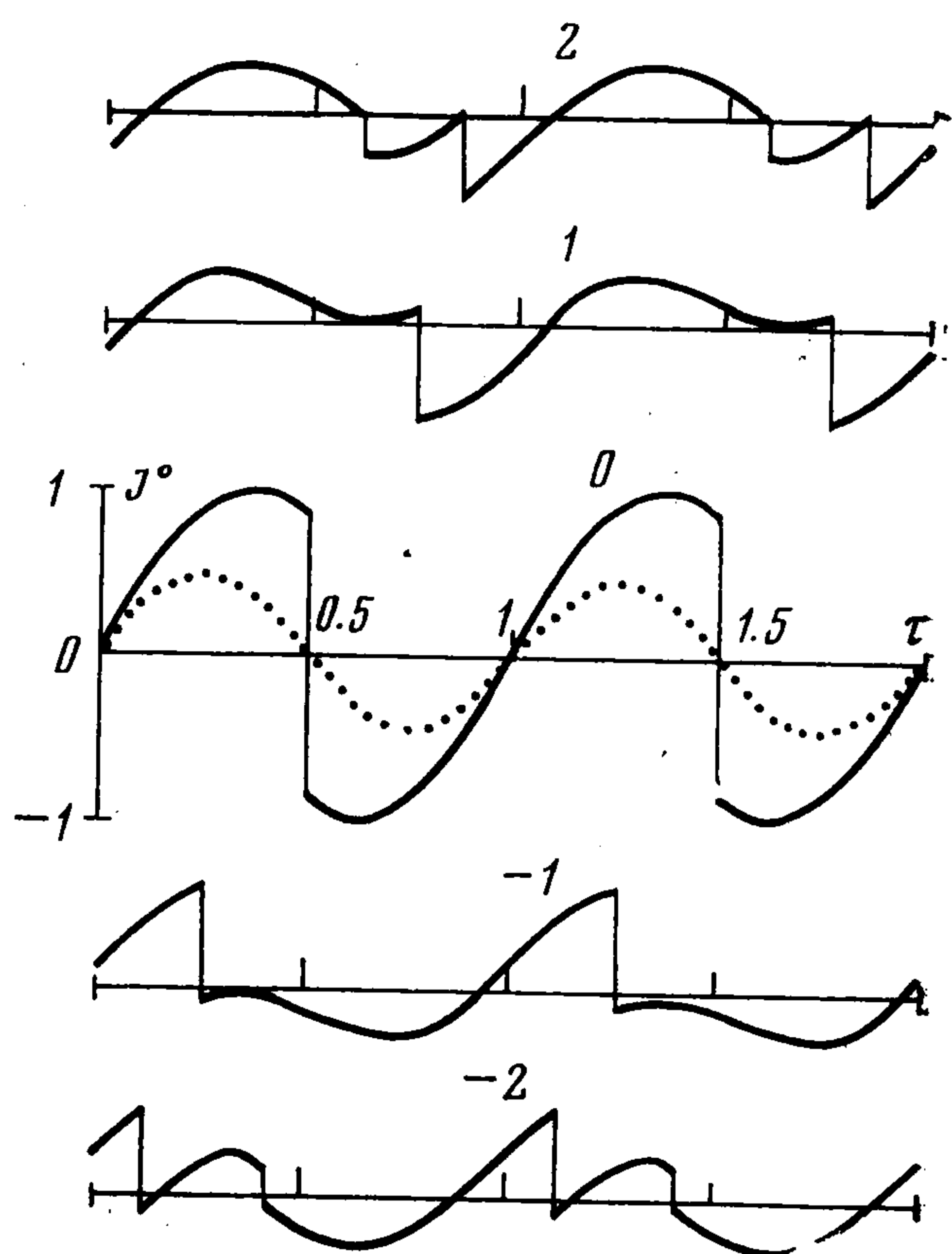
Тем не менее, точность полученного приближения и теперь недостаточна из-за ряда причин. Главные из них: пренебрежение взаимодействием волн разных семейств и изменением инвариантов на скачках (о нецелесообразности учета роста энтропии говорилось в начале статьи) и использование правила (1.9). Что же касается линеаризации граничного условия при  $x = 0$  в задаче о колебании скорости, то связанные с этим по-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

грешности, хотя и будут того же порядка, однако не носят принципиального характера. Действительно, условие  $u(t, 0) = f(\tau)$  можно рассматривать как точное равенство, не связанное с линеаризацией граничного условия в задаче о поршне.

4. Как уже указывалось, в процессе исследования была создана численная процедура, позволившая эффективно решать полученные уравнения, разумеется, без учета членов порядка  $\varepsilon^2 n$  и т. п. Ее работоспособность подтвердили многочисленные расчеты, небольшая часть которых, отвечающая  $F(\tau) = \sin 2\pi\tau$  и  $\kappa = 1.4$ , приведена на фиг. 2—4.

В задаче о колебании скорости результаты расчетов сравнивались с аналогичными результатами, полученными по формулам [1]. Последние, как уже отмечалось,

справедливы лишь при сравнительно малых  $K_\varepsilon \equiv \varepsilon n \max |J'(\tau)|$ . В рассматриваемых примерах множитель  $\max |J'(\tau)| \approx 2\pi$  и потому существен. При  $K_\varepsilon \ll 1$  результаты, полученные разными способами, практически не отличаются. Это, а также равенство (1.10), в силу которого интеграл по периоду от  $J(\tau)$  должен сохраняться (что всегда проверялось), можно рассматривать как обоснование для  $K_\varepsilon \ll 1$  принятого в [1] правила введения разрыва. С ростом  $K_\varepsilon$  или  $K_\delta \equiv 2\pi\delta n$  отличие результатов приобретает не только количественный, но и качественный характер. Сказанное демонстрирует фиг. 2, на которой сплошными кривыми показаны шесть «осциллограмм»:  $J^\circ(\tau) \equiv \varepsilon J(\tau) / (\varepsilon J)^*$ , где  $(\varepsilon J)^* = \max(\varepsilon J)$  на резонансе. В рассмотренном случае амплитуда колебаний скорости при  $x = 0$  была достаточно большой:  $\delta(\kappa + 1) = 0.08$ , а  $n \approx 3$  и, следовательно,  $K_\delta \sim O(1)$ . Резонансная осциллограмма помечена на фиг. 2 цифрой «0» и отвечает  $2n = 6$ ,  $k = 5$  и  $\Delta = \nu \equiv 2n - [2n] = 0$ , где целое число  $k$  введено согласно равенству:  $2n = k + 1 + \Delta$ . Сплошные кривые, помеченные на фиг. 2 цифрами 1, ..., 5, соответствуют таким  $2n$ ,  $k$ ,  $\nu$  и  $\Delta$ : 6.15, 5, 0.15, 0.15; 6.4, 5, 0.4, 0.4; 6.5, 5(6), 0.5, 0.5(-0.5); 6.6, 5(6), 0.6, 0.6(-0.4); 6.85, 5(6), 0.85, 0.85(-0.15). В трех последних случаях в скобках указаны «дополнительные значения  $k$  и  $\Delta$ , которые характеризуют близость режима к соседнему резонансу». Как следует из (3.4) и (1.9), в рассматриваемой задаче

$$(4.1) \quad J(\tau, \Omega, -\Delta) = -J(-\tau, \Omega, \Delta)$$

Даже для «крайних» кривых на фиг. 2 параметр подобия  $\Omega \equiv \delta n(\kappa + 1) / \alpha$  различается не более чем на 15%. Поэтому сравнение кривых 1 и 5 или 2 и 4 демонстрирует справедливость (4.1). Для резонанса на фиг. 2 изображены также: пунктиром — синусоида  $\delta F(\tau) / (\varepsilon J)^*$ , дающая колебания скорости при  $x = 0$ , а штрихами — осциллограмма, рассчитанная по [1]. Различие сплошной и штриховой кривых показывает погрешности (при  $K_\delta \sim O(1)$ ) теории [1]. Заметим, кстати, что для режимов, для которых на периоде образуется более одного скачка, принятое в [1] правило введения скачка дает один разрыв.

При  $K_\varepsilon \ll 1$  в силу (3.4) и (3.8), а также формул [1] вблизи «полуволнового» резонанса  $\varepsilon \sim \delta^{1/2}$  или в «переменных подобия»  $\varepsilon / \delta \sim \Omega^{-1/2}$ . В частности, разность  $\varepsilon J$  на скачке оказывается равной  $4\delta / \sqrt{\pi\Omega}$ . С ростом  $\Omega$ , а следовательно  $K_\delta$  и  $K_\varepsilon$ , наблюдается растущее отклонение от этих закономерностей. Сказанное иллюстрирует фиг. 3, на которой для полуволнового резонанса в зависимости от  $\Omega$  построено отношение  $r$  интенсивности скачка к  $4\delta / \sqrt{\pi\Omega}$ .

На фиг. 4, построенной по тому же принципу, что и фиг. 2, нанесены осциллограммы, рассчитанные для задачи о колебании давления с  $\delta(\kappa + 1) / \kappa = 0.08$  и  $k = 6$ . Теперь  $4n = 2k + 1 + \Delta$ , «четвертьволновому» резонансу ( $\Delta = 0$ ) соответствует кривая, помеченная цифрой 0, а кривые, помеченные цифрами 1, -1, 2 и -2, построены для следующих «наборов»  $2n$ ,  $\nu$  и  $\Delta$ : 6.65, 0.65, 0.3; 6.35, 0.35, -0.3, 6.75, 0.75, 0.5 и 6.25, 0.25 и -0.5. Как и в предыдущем случае, в рассматриваемой задаче выполняется равенство (4.1), что видно и из фиг. 4. На фиг. 2 разрывы в осциллограммах отвечают распространяющимся от левого конца трубы вправо скачкам уплотнения, а на фиг. 4 — пучкам волн разрежения. Те и другие — результат отражения приходящих сюда справа ударных волн.

Авторы благодарят А. Н. Руденко, привлечшего их внимание к данной проблеме.

Поступила 15 III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, pt 1, p. 44—64.
2. Lin C. C. On a perturbation theory based on the method of characteristics. J. Math. and Phys., 1954, vol. 33, No. 2, p. 117—134.
3. Boa-Teh Chu, Ying S. J. Thermally driven nonlinear oscillations in a pipe with traveling shock waves. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 11, p. 1625—1637.

4. *Boa-Teh Chu*. Analysis of a self-sustained thermally driven nonlinear vibration. *Phys. Fluids*, 1963, vol. 6, No. 11, p. 1638—1644.
5. *Mortell M. P., Varley E.* Finite amplitude waves in bounded media: nonlinear free vibrations of an elastic panel. *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 1970, vol. 318, No. 1533, p. 169—196.
6. *Mortell M. P.* Resonant oscillations: a regular perturbation approach. *J. Math. Phys.*, 1971, vol. 12, No. 7, p. 1069—1075.
7. *Seymour B. R., Mortell M. P.* Resonant acoustic oscillations with damping: small rate theory. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 58, pt 2, p. 353—373.
8. *Jimenez J.* Non-linear gas oscillations in pipes, pt 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 59, p. 23—46.
9. *Keller J. J.* Third order resonances in closed tubes. *ZAMP*, 1976, Bd 27, H. 3, S. 303—323.
10. *Collins W. D.* Forced oscillations of systems governed by one-dimensional non-linear wave equations. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1971, vol. 24, pt 2, p. 129—153.
11. *Chester W.* Resonant oscillations of water waves. I. Theory. *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 1968, vol. 306, No. 1484, p. 5—22.
12. *Keller J. J.* Subharmonic non-linear acoustic resonances in closed tubes. *ZAMP*, 1975, Bd 26, H. 4, S. 395—405.
13. *Keller J. J.* Resonant oscillations in closed tubes: the solution of Chester's equation. *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 77, pt 2, p. 279—304.
14. *Keller J. J.* Nonlinear acoustic resonances in shock tubes with varying cross-sectional area. *ZAMP*, 1977, Bd. 28, H. 1, S. 107—122.
15. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. *ПММ*, 1945, т. 9, вып. 4.
16. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
17. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
18. *Simons G. A.* Decay of a diamond shock pattern. *AIAA Journal*, 1972, vol. 10, No. 8, p. 1037—1043.
19. *Крайко А. Н., Осипов А. А.* Затухание периодической последовательности слабых ударных волн в каналах со звукопоглощающими стенками. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 4.
20. *Думнов Г. Е.* Колебания газа в трубах под воздействием периодически меняющегося давления. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1978, № 5.