

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛН КЕЛЬВИНА НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КАНАЛА

А. И. Плис, В. И. Плис

(Москва)

Методом Винера — Хопфа строится решение задачи о дифракции поверхностных волн на конце плоскопараллельного канала во вращающемся бассейне постоянной глубины. Проводится асимптотический и численный анализ полученного решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный, вращающийся против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  бассейн конечной глубины  $h$ . Пусть на дно бассейна поставлены две вертикальные полубесконечные стенки. Выберем систему координат, как показано на фиг. 1; уравнения стенок канала  $y = \pm a$ ,  $x < 0$ , где  $2a$  — ширина канала.

Будем рассматривать в этом бассейне гармонические волновые движения поверхности жидкости, возвышения которых можно представлять в виде  $\xi(x, y) \exp(-i\sigma t)$ , где  $\sigma$  — частота этих колебаний. Остановимся на случае  $\sigma > 2\omega$ .

В рамках линейной теории длинных поверхностных волн [1] функция  $\xi(x, y)$  — решение волнового уравнения ( $g$  — ускорение свободного падения)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2\right)\xi(x, y) = 0, \quad \kappa^2 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh}$$

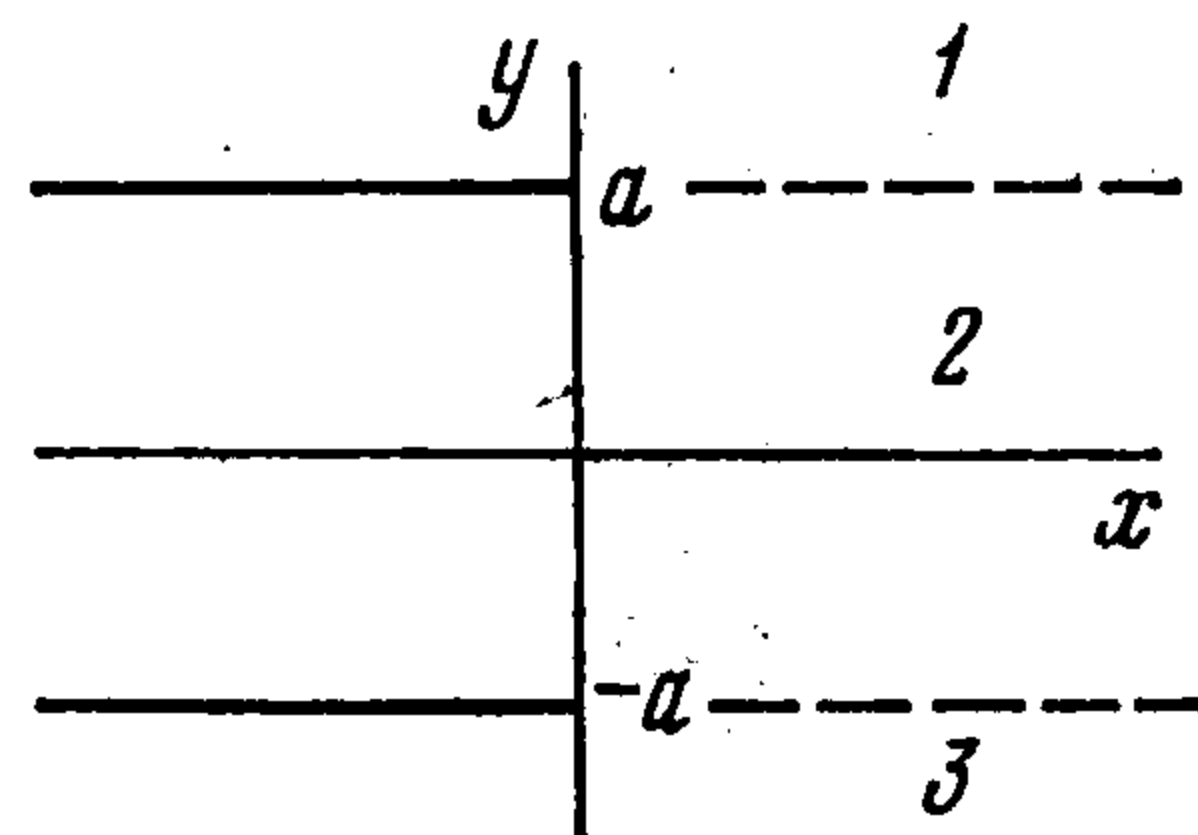
Пусть вдоль полубесконечной стенки в области  $y > a$ ,  $x < 0$  из бесконечности распространяется волна Кельвина единичной амплитуды

$$(1.1) \quad \xi_0(x, y) = \exp[i\eta\kappa x - l\eta\kappa(y - a)] \\ (l = 2\omega / \sigma, \eta = (1 - l^2)^{-1/2})$$

В результате дифракции волны (1.1) на краю стенки в бассейне появляются волны, отличные от  $\xi_0$ . Исследуем эти волны.

Разобьем бассейн на три области, как показано на фиг. 1. В области 1 ( $y > a$ ) полную амплитуду возвышений представим в виде  $\xi_0 + \xi_1$ , где  $\xi_0$  — падающая, а  $\xi_1$  — дифрагированная волна. В областях 2 ( $|y| < a$ ) и 3 ( $y < -a$ ), амплитуду возвышений обозначим соответственно через  $\xi_2$  и  $\xi_3$ . Для неизвестных функций  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) получим следующую краевую задачу: найти решения уравнений

$$(1.2) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2\right)\xi_j(x, y) = 0$$



Фиг. 1

удовлетворяющие краевым условиям на стенках канала и условиям непрерывности  $y$ -компонент скоростей и возвышений на продолжениях стенок

$$(1.3) \quad \begin{aligned} v_0(x, a+0) + v_1(x, a+0) &= 0 \\ v_2(x, |a-0|) &= 0, \quad v_3(x, -a-0) = 0 \quad (x < 0) \\ v_0(x, a+0) + v_1(x, a+0) &= v_2(x, a-0) \\ v_2(x, -a+0) &= v_3(x, -a-0) \\ \xi_0(x, a+0) + \xi_1(x, a+0) &= \xi_2(x, a-0) \\ \xi_2(x, -a+0) &= \xi_3(x, -a-0) \quad (x > 0) \end{aligned}$$

где  $v_j(x, y)$  — компонента скорости жидкости, параллельная оси  $y$  и связанная с  $\xi_j(x, y)$  соотношением

$$(1.4) \quad v_j(x, y) = -\frac{\sigma}{\kappa^2 h} \left( l \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \xi_j(x, y)$$

Наконец, дифрагированные волны должны удовлетворять «условию на ребре» в окрестности точек  $x = 0, y = \pm a$

$$(1.5) \quad \xi_j \sim r^{1/2} \quad (j = 1, 2, 3), \quad r = \sqrt{x^2 + (y \pm a)^2}$$

и условию излучения на бесконечности: решение должно содержать только расходящиеся волны.

Можно показать, что в классе ограниченных функций задача (1.1) — (1.5) имеет единственное решение.

**2. Система парных интегральных уравнений и ее решение.** Решение задачи (1.1) — (1.5) проведем по методу Винера — Хоцфа [2]. Для этого предположим, что волновое число  $\kappa$  обладает малой положительной мнимой частью, т. е.  $\kappa = \kappa_0 + i\varepsilon$ , а в окончательных результатах устремим  $\varepsilon$  к нулю. Введение в  $\kappa$  мнимой добавки соответствует предположению о поглощении жидкостью энергии волновых движений.

Введем неизвестные функции  $Z_1(\alpha), Z_2(\alpha), Z_2'(\alpha), Z_3(\alpha), A(\alpha), B(\alpha)$  комплексного переменного  $\alpha$  по формулам

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \xi_{1,3}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{1,3}(\alpha) \exp[i\alpha x + i\gamma(\pm y - a)] d\alpha \\ \xi_2(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\alpha) \sin \gamma(y + a) + B(\alpha) \sin \gamma(y - a)] \exp(i\alpha x) d\alpha \\ \xi_2(x, a - 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_2(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha \\ \xi_2(x, -a + 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_2'(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha \end{aligned}$$

где  $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}$ , а ветвь корня выбрана так, что  $\text{Im } \gamma > 0$ .

Видно, что эти функции не являются независимыми:

$$A(\alpha) = \frac{Z_2(\alpha)}{\sin 2\gamma a}, \quad B(\alpha) = -\frac{Z_2'(\alpha)}{\sin 2\gamma a}$$

Вычислим  $y$ -компоненту скорости жидкости в областях 1 и 3 и введем новые неизвестные функции  $V_1(\alpha)$  и  $V_3(\alpha)$  по формулам

$$(2.2) \quad v_{1,3}(x, y) = \frac{\sigma^2}{\kappa^2 h} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{1,3}(\alpha) \exp[i\alpha x + i\gamma(\pm y - a)] d\alpha$$

Справедливы следующие соотношения:

$$Z_{1,3}(\alpha) = \frac{V_{1,3}(\alpha)}{\pm \gamma - i\alpha l}$$

Применив формулу (1.4) к функции  $\xi_2(x, y)$  из (2.1) и воспользовавшись условиями непрерывности скоростей на полупрямых  $|y| = a$ ,  $x > 0$ , получаем зависимость  $Z_2(\alpha)$  и  $Z_2'(\alpha)$  от  $V_1(\alpha)$  и  $V_3(\alpha)$

$$Z_2(\alpha) = i \frac{V_1(\alpha)(\alpha l \sin 2\gamma a - \gamma \cos 2\gamma a) + \gamma V_3(\alpha)}{(\gamma^2 + \alpha^2 l^2) \sin 2\gamma a}$$

$$Z_2'(\alpha) = i \frac{-\gamma V_1(\alpha) + (\gamma \cos 2\gamma a + \alpha l \sin 2\gamma a) V_3(\alpha)}{(\gamma^2 + \alpha^2 l^2) \sin 2\gamma a}$$

Подставляя интегральные представления возвышений в последние четыре краевых условия (1.3), складывая и вычитая их, получаем следующие интегральные уравнения, справедливые при  $x > 0$ :

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\alpha x) V_s(\alpha) L(\alpha)}{\alpha^2 - \eta^2 \kappa^2} d\alpha = \frac{a}{2\eta^2} \exp(i\eta \kappa x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\alpha x) V_a(\alpha) M(\alpha)}{\alpha^2 - \eta^2 \kappa^2} d\alpha = -i \frac{a}{2\eta^2} \exp(i\eta \kappa x)$$

$$V_a(\alpha) = (V_1(\alpha) - V_3(\alpha)) / 2, \quad V_s(\alpha) = (V_1(\alpha) + V_3(\alpha)) / 2$$

$$L(\alpha) = \frac{a\gamma \exp(-i\gamma a)}{\cos \gamma a}, \quad M(\alpha) = \frac{a\gamma \exp(-i\gamma a)}{\sin \gamma a}$$

Воспользовавшись интегральным представлением для скоростей (2.2) и первыми тремя краевыми условиями (1.3), получаем интегральные уравнения, справедливые при  $x < 0$

$$(2.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} V_s(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} V_a(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha = 0$$

Таким образом, исходная задача (1.1) — (1.5) сведена к решению системы парных интегральных уравнений (2.3), (2.4) для неизвестных функций  $V_s(\alpha)$  и  $V_a(\alpha)$  комплексного переменного  $\alpha$ .

Для решения системы (2.3), (2.4) проведем факторизацию ядер интегральных уравнений  $L(\alpha)$  и  $M(\alpha)$ , т. е. представим их в виде  $L(\alpha) = L_+(\alpha)L_-(\alpha)$  и  $M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha)$ , где сомножители со знаком плюс аналитичны в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\alpha$  и не имеют там нулей, а сомножители со знаком минус обладают аналогичными свойствами в нижней полуплоскости комплексного переменного  $\alpha$ .

Факторизация ядер  $L(\alpha)$  и  $M(\alpha)$  неоднократно проводилась в литературе [3], поэтому приведем лишь окончательный результат этой процеду-

ры ( $C$  — постоянная Эйлера)

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_+(\alpha)} &= \sqrt{\frac{\cos \kappa a}{\kappa a (1 + \alpha/\kappa)}} \exp \left[ -i \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha\gamma}{\pi} \ln \left( \frac{\alpha + i\gamma}{\kappa} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{i\alpha a}{\pi} \left( 1 - C + \ln \frac{\pi}{2\kappa a} + i \frac{\pi}{2} \right) \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha_{2n-1}} \right) \exp \left[ \frac{2i\alpha a}{\pi(2n-1)} \right] \\ \frac{1}{M_+(\alpha)} &= \sqrt{\frac{\sin \kappa a}{\kappa a}} \exp \left[ \frac{\alpha\gamma}{\pi} \ln \left( \frac{\alpha + i\gamma}{\kappa} \right) + \frac{i\alpha a}{\pi} \left( 1 - C + \ln \frac{2\pi}{\kappa a} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. i \frac{\pi}{2} \right) \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha_{2n}} \right) \exp \left[ \frac{2i\alpha a}{2\pi n} \right] \\ \alpha_n &= - \sqrt{\kappa^2 - \left( \frac{\pi n}{2a} \right)^2} \end{aligned}$$

Ищем решение системы (2.3) — (2.4) в виде

$$(2.5) \quad V_s(\alpha) = \frac{P}{L_-(\alpha)}, \quad V_a(\alpha) = \frac{Q}{M_-(\alpha)}$$

где  $P$  и  $Q$  — неизвестные постоянные. При таком выборе функций  $V_s(\alpha)$  и  $V_a(\alpha)$  уравнения (2.4) удовлетворяются тождественно. Для определения постоянных  $P$  и  $Q$  подставляем (2.5) в интегральные уравнения (2.3) и в результате вычисления вычетов в полюсе  $\alpha = \eta\kappa$  находим

$$(2.6) \quad P = \frac{\kappa a}{2\pi i \eta L_+(\eta\kappa)}, \quad Q = \frac{-\kappa a}{2\pi \eta M_+(\eta\kappa)}$$

Найденное решение (2.5), (2.6) удовлетворяет условию на ребре (1.5), которое, согласно теореме о связи асимптотики функции и ее фурье-образа для функций  $V_s(\alpha)$  и  $V_a(\alpha)$ , принимает вид  $V_s(\alpha), V_a(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Знание функций  $V_s(\alpha)$  и  $V_a(\alpha)$ , а вместе с ними функций

$$(2.7) \quad \begin{aligned} V_1(\alpha) &= V_s(\alpha) + V_a(\alpha) = \frac{P_1}{L_-(\alpha)} + \frac{Q}{M_-(\alpha)} \\ V_2(\alpha) &= V_s(\alpha) - V_a(\alpha) = \frac{P}{L_-(\alpha)} - \frac{Q}{M_-(\alpha)} \end{aligned}$$

полностью решает задачу определения возвышений жидкости во всех областях бассейна.

**3. Формулы для возвышений.** Начнем с изучения возвышений в области 2 при  $x < 0$ , т. е. внутри канала. Исходя из (2.1) можно получить следующее интегральное представление возвышений в области 2:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \xi_2(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\alpha x)}{\gamma^2 + \alpha^2 l^2} \left[ \frac{V_s(\alpha)}{\cos \gamma a} (\gamma \sin \gamma y + \alpha l \cos \gamma y) + \right. \\ &+ \left. \frac{V_a(\alpha)}{\sin \gamma a} (\alpha l \sin \gamma y - \gamma \cos \gamma y) \right] d\alpha \end{aligned}$$

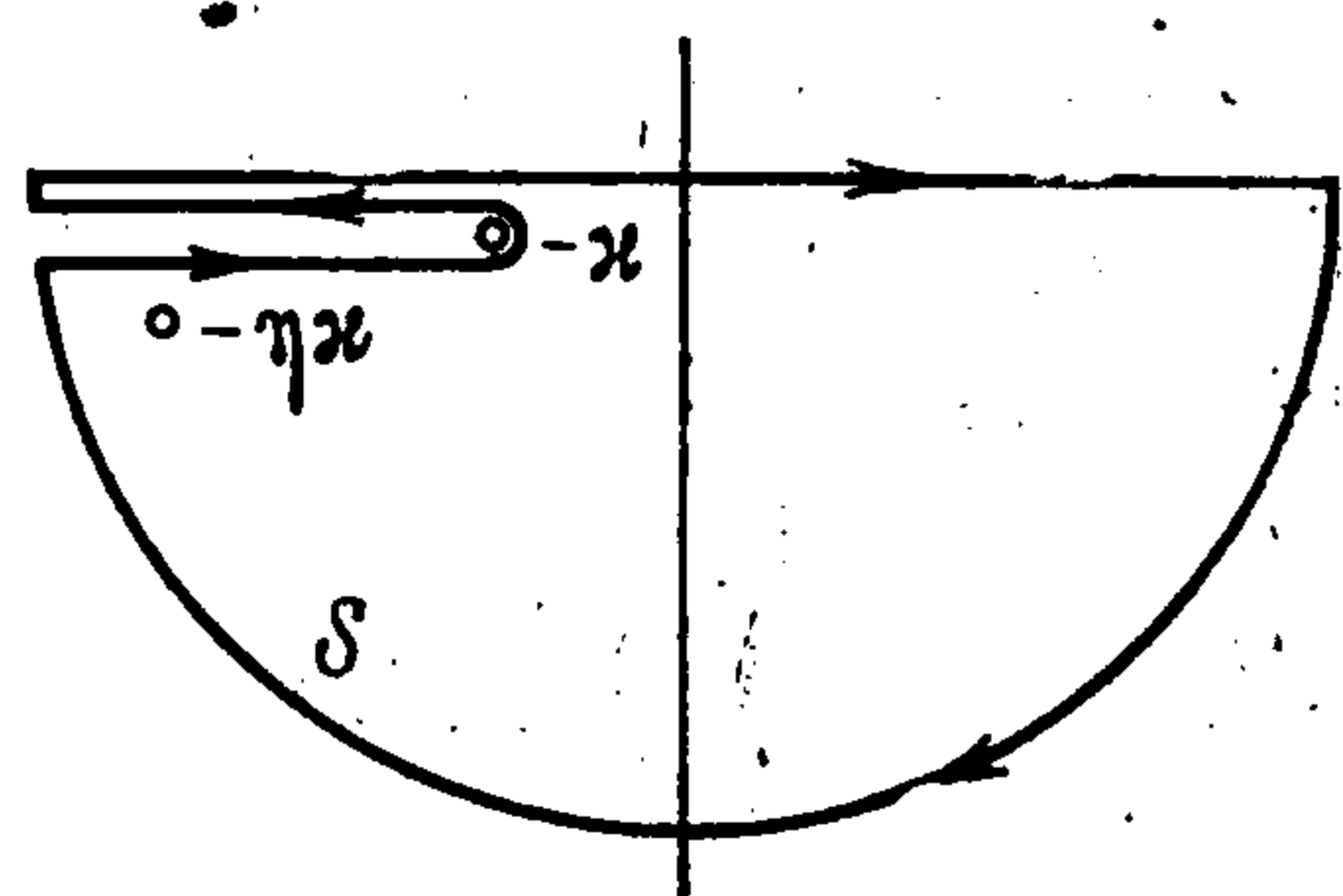
Для вычисления входящего в (3.1) интеграла достаточно воспользоваться леммой Жордана и найти вычеты подынтегральной функции в простых полюсах

$$\alpha_0 = -\eta\kappa, \quad \alpha_k = - \sqrt{\kappa^2 - \left( \frac{\pi k}{2a} \right)^2} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

В результате получаем

$$(3.2) \quad \xi_2(x, y) = -2\pi l \eta^2 \frac{V_1(-\eta x) - V_3(-\eta x) \exp(-2l\eta a)}{1 - \exp(-4l\eta a)} \times \\ \times \exp[-i\eta x + l\eta(y - a)] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [R_k \sin(\gamma_k y - \varphi_k) + T_k \cos(\gamma_k y - \varphi_k)] \exp(-i\alpha_k x) \\ \sin \varphi_k = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_k^2 + (\alpha_k l)^2}}, \quad \cos \varphi_k = \frac{\alpha_k l}{\sqrt{\gamma_k^2 + (\alpha_k l)^2}} \\ R_k = 2\pi i (-1)^k \cos \frac{\pi k}{2} \frac{\gamma_k V_a(\alpha_k)}{\alpha_k a \sqrt{\gamma_k^2 + (\alpha_k l)^2}}, \quad \alpha_k = -\sqrt{x^2 - \gamma_k^2} \\ T_k = 2\pi i (-1)^k \sin \frac{\pi k}{2} \frac{\gamma_k V_s(\alpha_k)}{\alpha_k a \sqrt{\gamma_k^2 + (\alpha_k l)^2}}, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{2a}$$

Первое слагаемое в (3.2) описывает волну Кельвина, распространяющуюся в канале, а бесконечная сумма соответствует прогрессивным и затухающим волнам. При этом действительным  $\alpha_k$  соответствуют прогрессивные волны, а мнимым — экспоненциально затухающие при удалении в глубь канала от его открытого конца. При данном значении безразмерной [ширины канала  $ka$  число [прогрессивных волн равно целой части числа  $2ka / \pi$ .



Фиг. 2

Для возвышений в области 3 справедливо следующее интегральное представление:

$$(3.3) \quad \xi_3(x, y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\alpha x - i\gamma(y + a)]}{\gamma + ial} V_3(\alpha) d\alpha$$

При  $x < 0$  можно воспользоваться теоремой о вычетах (контур интегрирования в плоскости  $\alpha$  показан на фиг. 2) и представить возвышения  $\xi_3(x, y)$  в виде

$$(3.4) \quad \xi_3(x, y) = -2\pi l \eta^2 V_3(-\eta x) \exp[-i\eta x + l\eta(y + a)] + \\ + \int_S \frac{\exp[i\alpha x - i\gamma(y + a)]}{\gamma + ial} V_3(\alpha) d\alpha$$

Первое слагаемое в (3.4) описывает волну Кельвина, распространяющуюся в области 3 в отрицательном направлении оси  $x$  вдоль стенки  $y = -a$ , второе слагаемое — интеграл по берегам разреза  $S$  (см. фиг. 2) — описывает сложное волновое движение и для любой точки рассматриваемой области может быть получено численным интегрированием на ЭВМ.

Интеграл (3.3) для возвышений поверхности на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от входа в канал можно оценить по методу перевала. Для этого вводим полярные координаты  $r, \theta$  по формулам

$$x = r \sin \theta, \quad y + a = -r \cos \theta, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

Оценивая интеграл для  $\xi_3(x, y)$  по методу перевала, получаем следующее выражение для возвышений жидкости на больших расстояниях:

$$(3.5) \quad \xi_3(r, \theta) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \Theta(\theta) \exp \left[ i \left( kr - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$kr \gg 1, \quad \Theta(\theta) = \frac{\cos \theta V_3(k \sin \theta)}{\cos \theta + il \sin \theta}$$

Можно показать, что при  $kr \gg 1$  возвышение в областях 1 и 2 описывается аналогичной формулой. Из (3.5) видно, что на больших расстояниях от входа в канал возвышения представляют собой расходящиеся затухающие цилиндрические волны с угловым распределением амплитуды  $|\Theta(\theta)|$ .

4. Распространение волны Кельвина из канала. Пусть в бассейне, изображенном на фиг. 1, вдоль стенки  $y = -a$ ,  $x < 0$  внутри канала в положительном направлении оси  $x$  распространяется волна Кельвина единичной амплитуды

$$(4.1) \quad \xi_0(x, y) = \exp [i\eta kx - l\eta k(y + a)]$$

Решение задачи о дифракции этой волны на открытом конце канала проводится по методу, изложенному в пп. 1, 2, и приводит к двум системам парных интегральных уравнений

$$(4.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} V_a(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha = 0, \quad x < 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_a(\alpha) M(\alpha) \exp(i\alpha x)}{\alpha^2 - \eta^2 k^2} d\alpha = i a \eta^2 \operatorname{sh}(l\eta k a) \exp(i\eta kx - l\eta k a), \quad x > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_s(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha = 0, \quad x < 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_s(\alpha) L(\alpha) \exp(i\alpha x)}{\alpha^2 - \eta^2 k^2} d\alpha = \frac{a \eta^2}{2} \operatorname{ch}(l\eta k a) \exp(i\eta kx - l\eta k a), \quad x > 0$$

В приведенных уравнениях обозначения совпадают с принятыми в пп. 1, 2. Решение системы (4.2) проводится методом факторизации, неизвестные функции ищутся в виде

$$(4.3) \quad V_s(\alpha) = F / L_-(\alpha), \quad V_a(\alpha) = G / M_-(\alpha)$$

Постоянные  $F$  и  $G$  оказываются такими:

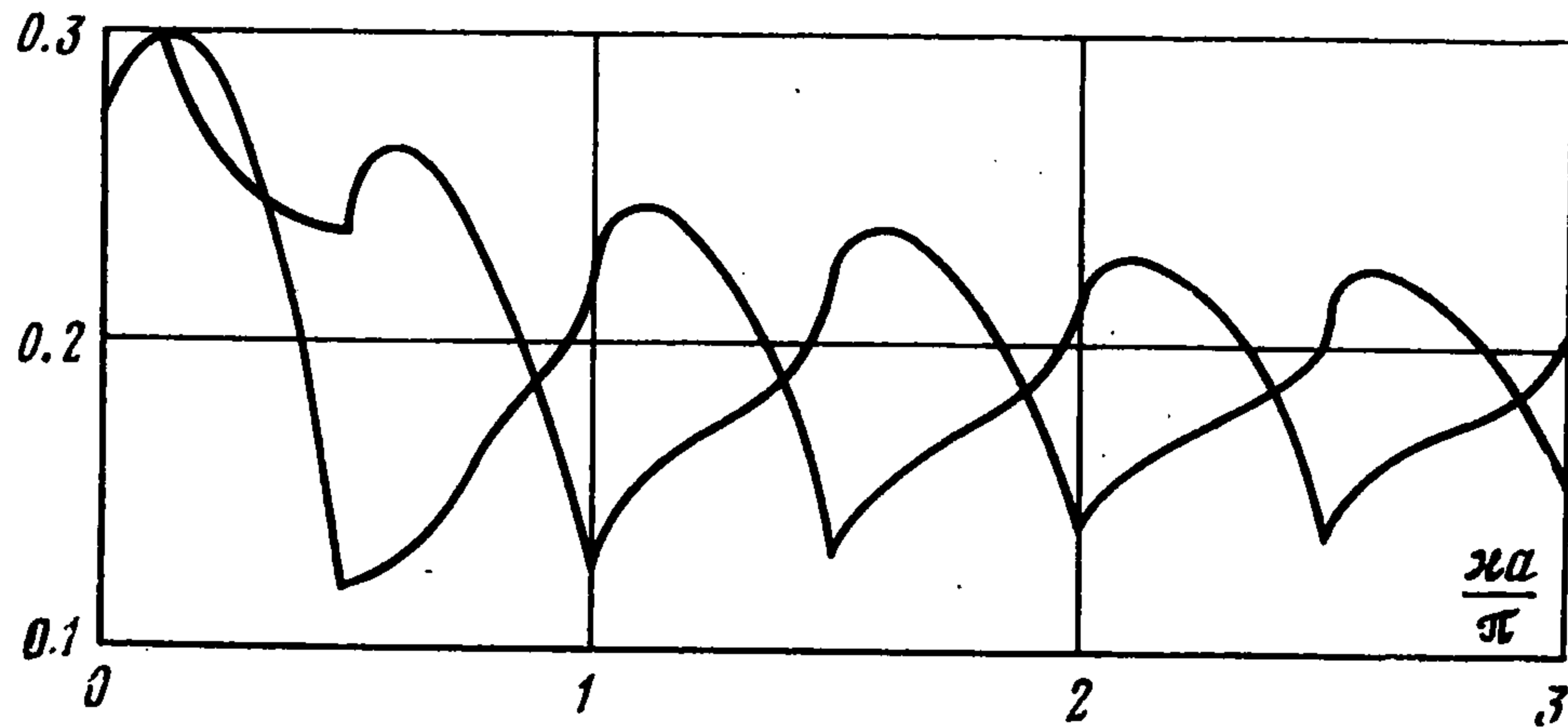
$$(4.4) \quad F = \frac{ka}{2\pi i \eta L_+(\eta k)} [1 - \exp(-2l\eta k a)]$$

$$G = \frac{ka}{2\pi \eta M_+(\eta k)} [1 + \exp(-2l\eta k a)]$$

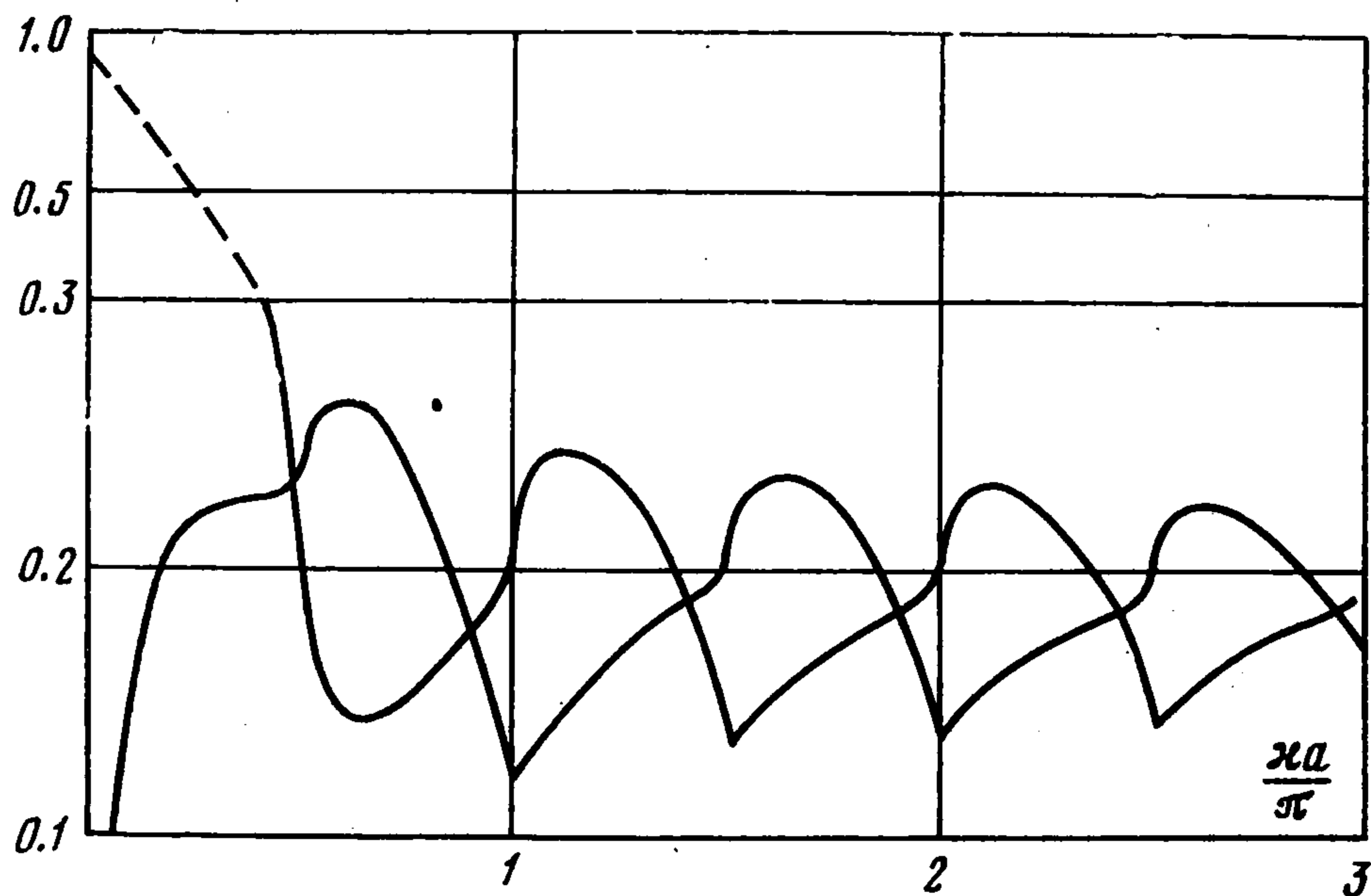
Найденные функции  $V_s(\alpha)$  и  $V_a(\alpha)$  полностью решают задачу дифракции волны Кельвина, распространяющейся из канала в бассейн.

Исследование возникающих в этом случае волновых движений жидкости проводится так же, как это сделано в п. 3. Кратко охарактеризуем поле возвышений. В канале в отрицательном направлении оси  $x$  будет

распространяться волна Кельвина, отраженная от открытого конца, в том же направлении будут распространяться прогрессивные волны (число которых равно целой части  $2ka / \pi$ ) и бесконечное число затухающих. Наконец, во всех трех областях на больших расстояниях от входа в ка-



Фиг. 3



Фиг. 4

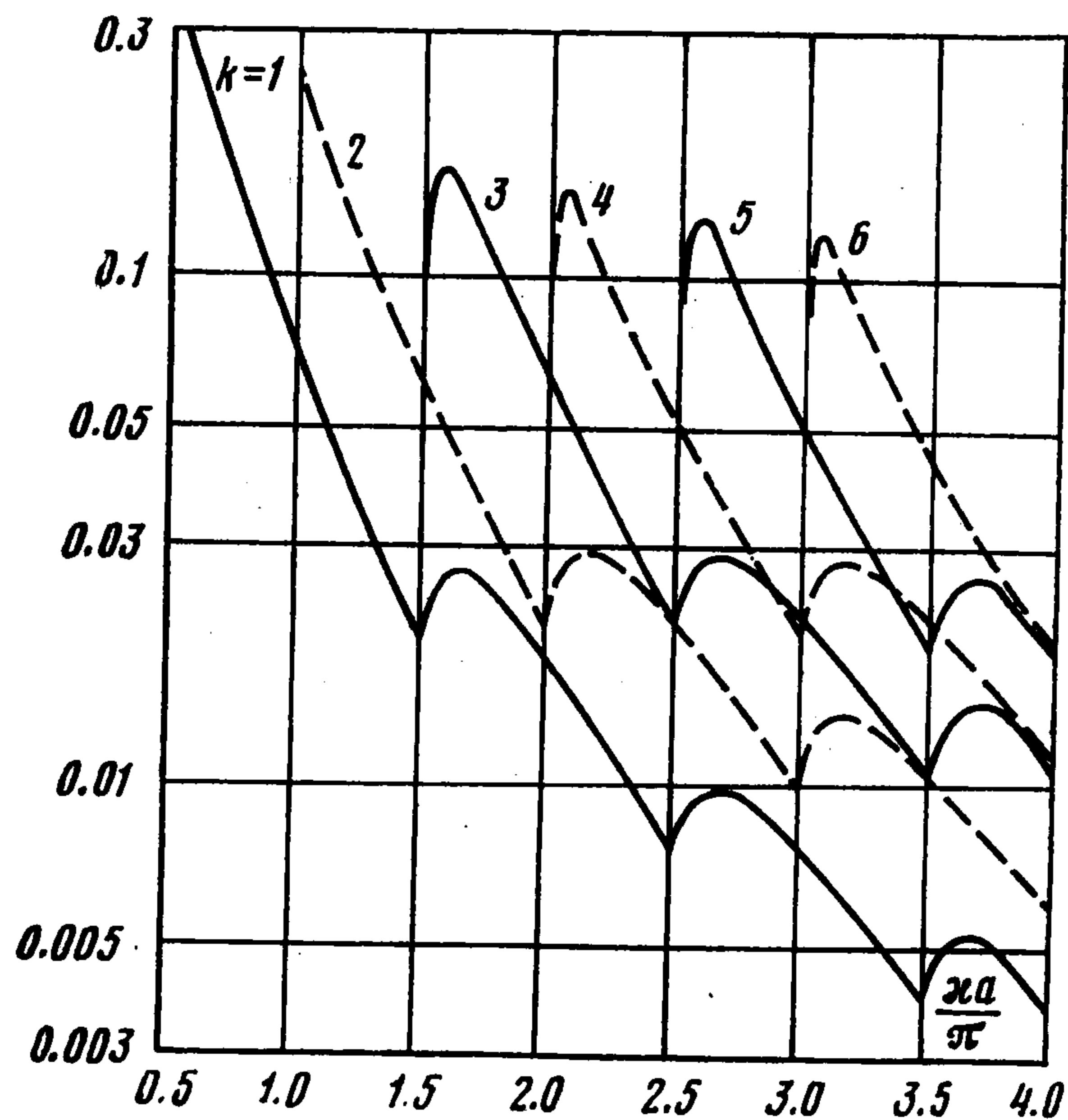
нал возвышения жидкости будут представлять собой расходящиеся затухающие цилиндрические волны.

Амплитуды двух кельвиновских, прогрессивных, затухающих и цилиндрических волн определяются по формулам (3.2), (3.4), (3.5), при этом значения входящих в эти выражения функций  $V_1(\alpha)$  и  $V_3(\alpha)$  вычисляются по формулам (2.7) с учетом (4.3) и (4.4).<sup>4</sup>

5. Интерпретация результатов численного анализа. На фиг. 3 приведена зависимость амплитуд кельвиновских волн от ширины канала  $ka$  в случае, когда первоначальная волна распространяется в области 1, а на фиг. 4 — те же зависимости для случая кельвиновской волны, приходящей из канала (часть графика на фиг. 4, показанная штриховой линией, дана в логарифмическом масштабе). В каждом из этих случаев при любых  $ka$  существуют две кельвиновские волны. Видно, что для малых  $ka$  во втором случае волна Кельвина, достигнув открытого конца канала, почти полностью от него отражается, в то время как в первом случае при тех же  $ka$  амплитуды обеих дифрагированных кельвиновских волн сравнимы по величине. С ростом «ширины» канала при  $ka = \pi n / 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) будут возникать прогрессивные волны. На фиг. 3, 4 возникновению прогрессивных волн соответствуют характерные изломы в точках  $ka = \pi n / 2$ , связанные с перестройкой амплитуд волновых движений поверхности при зарождении новой прогрессивной волны.

Описанное физическое явление характерно не только для гидродинамики, но и для электродинамики [4], ядерной физики [5] и носит там название порогового явления.

Фигура 5 иллюстрирует зависимость амплитуд первых прогрессивных волн от ширины канала  $ka$  в случае, когда первоначальная волна распространяется в области 1.



Фиг. 5

Поскольку в канале существует два независимых семейства прогрессивных волн, различающихся свойством симметрии, то рождение прогрессивной волны одной из симметрий приводит к перестройке спектра волн только этой симметрии. Это положение прослеживается на фиг. 5.

Отметим, что в приведенном решении как частный случай содержатся результаты работы [6].

Авторы благодарят С. Я. Секерж-Зеньковича и С. А. Габова за обсуждение результатов.

Поступила 11 III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.—Л., ОНТИ, 1936.
2. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., «Мир», 1974.
4. Болотовский Б. М., Лебедев А. Н. О пороговых явлениях в классической электродинамике. Ж. эксп. и теор. физики, 53, 4 (10), 1967.
5. Вааь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1966.
6. Габов С. А., Рубан П. И., Секерж-Зенькович С. Я. Дифракция волн Кельвина на полубесконечной стенке в полуограниченном бассейне. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1975, 15, № 6.