Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 532.526

ОБ ОБТЕКАНИИ ВЫПУКЛОГО УГЛА ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

В. Н. Диесперов

(Москва)

Рассматривается обтекание выпуклого угла с прямолинейными образующими трансзвуковым потоком газа, когда реализуется течение Вальо-Лаурина [1]. Это означает, что во внешнем потенциальном потоке перед угловой точкой в ее окрестности известны все параметры течения [2–5]. Благоприятный градиент давления при приближении к угловой точке становится бесконечным.

Изучается взаимодействие пограничного слоя с внешним потенциальным течением в окрестности угловой точки. Решение ищется в виде возмущений к значению продольной составляющей U вектора скорости в угловой точке. В качестве малых параметров берутся расстояние от вершины угла вверх по течению и обратная величина числа Рейнольдса набегающего потенциального потока. Разложения параметров потока, справедливые в основной части пограничного слоя, затем сращиваются с разложениями во внешнем потенциальном течении и разложениями в тонкой пристеночной области, которую необходимо ввести, чтобы удовлетворить граничным условиям. Это позволило определить поведение U в окрестности прямолинейной образующей, соответствующее особенности Вальо-Лаурина. Как известно, знание поведения U и зависимости давления во внешнем потоке от толщины вытеснения пограничного слоя необходимо для определения всех характерных размеров в области свободного взаимодействия [6–13].

1. Обозначим через x, y декартову систему координат, начало которой помещено в вершину угла, а отрицательная полуось x совпадает с его прямолинейной образующей, v_x и v_y — компоненты вектора скорости, φ — потенциал течения, p — давление, ρ — плотность, T — температура, a — скорость звука, γ — отношение удельных теплоемкостей, L — характерный размер внешнего потенциального течения, μ — первый коэффициент вязкости, k — коэффициент теплопроводности; Re, Pr — числа Рейнольдса и Прандтля набегающего потока соответственно. В качестве характерных значений всех параметров потока берутся их критические значения. Они отмечаются звездочкой. Термодинамические переменные связаны уравнением состояния идеального газа. В дальнейшем все параметры течения и уравнения, их связывающие, предполагаются безразмерными.

Внешний поток в рассматриваемой области $x < 0$ потенциальный и описывается уравнениями Эйлера. В окрестности вершины угла решение можно искать в виде [1–5]

(1.1) $$\varphi = x + y^{7/4} f_0(\xi) + y^{9/4} f_1(\xi) + \ldots, \quad \xi = (1+\gamma)^{-1/3} x y^{-3/4}$$

Решение (1.1) при $x < 0$, $y = 0$ удовлетворяет условию непротекания $\partial\varphi / \partial y = v_y = 0$ и при $x > 0$, $y \to 0$ переходит в течение Прандтля —

Майера. В работах [3-5] также показано, что непрерывным образом продолжить решение (1.1) в область $x > 0$, $y \to 0$ невозможно, и необходимо ввести ударную волну.

Функции f_0 и f_1 удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{25}{16}\xi^2 - f_0'\right)f_0'' - \frac{25}{16}\xi f_0' + \frac{21}{16}f_0 = 0$$

$$\left(\frac{25}{16}\xi^2 - f_0'\right)f_1'' - \left(\frac{45}{16}\xi + f_0''\right)f_1' + \frac{45}{16}f_1 =$$
$$= \frac{(1+\gamma)^{-1/3}}{2}\left[(2\gamma-1)f_0'^2 f_0'' + \frac{1}{2}(7f_0 - 5\xi f_0')\left(f_0' - \frac{5}{2}\xi f_0''\right)\right]$$

Решение Вальо-Лаурина f_0 можно представить в параметрическом виде [2,3]

$$f_0 = C^3(t-1)^{-7/5}(7t^2 - 140\,t + 160)/21 \tag{1.2}$$
$$\xi = C(t-1)^{5/8}(t - {}^8/_5),\ 1 < t < \infty,\ C = \mathrm{const}$$

На основании решений (1.2) поведение компонент скоростей v_x, v_y, давления p и плотности ρ при $x < 0$ и $y \to 0$ имеет вид

$$v_x = 1 - d_0(-x)^{2/5} - d_1(-x)^{4/5} + \ldots,\quad v_y = -m_0 y(-x)^{-1/5} - \tag{1.3}$$
$$- m_1 y\ (-x^{1/5}) + \ldots$$
$$\rho = 1 + d_0(-x)^{2/5} + \left[d_1 + \frac{(1-\gamma)}{2}d_0^2\right](-x)^{4/5} + \ldots$$
$$p = 1 + \gamma d_0(-x)^{2/5} + \gamma d_1(-x)^{4/5} + \ldots,\quad m_0 = {}^2/_5(1 + $$
$$+ \gamma)\ d_0^2$$
$$d_0 = 3^{3/5}5^{2/5}(1+\gamma)^{-7/15}\ C^{6/5} > 0,\quad m_1 = \mathrm{const},\quad d_1 = \mathrm{const}$$

Из разложений (1.3) следует, что градиент давления в окрестности вершины угла благоприятный и

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2}{5}\gamma d_0(-x)^{-3/5} - \frac{4}{5}\gamma d_1(-x)^{-1/5} \to -\infty,\quad (-x) \to 0 \tag{1.4}$$

2. В результате взаимодействия движущегося газа с поверхностью угла ($x < 0$) формируется пограничный слой, на который воздействует внешний поток с благоприятным градиентом давления (1.4). Уравнения, описывающие пограничный слой, возьмем в обычном виде

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial Y} = 0 \tag{2.1}$$
$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial v_x}{\partial Y} = -\frac{1}{\gamma\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial Y}\right),\quad \frac{\partial p}{\partial Y} = 0$$
$$\frac{1}{\gamma}v_x\frac{dp}{dx} - \frac{p}{\rho}\left(v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + V_y\frac{\partial\rho}{\partial Y}\right) = \frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial Y}\left(k\frac{\partial T}{\partial Y}\right) +$$
$$+ \mu(\gamma-1)\left(\frac{\partial v_x}{\partial Y}\right)^2$$
$$Y = \mathrm{Re}^{1/2}y,\quad v_y = \mathrm{Re}^{-1/2}V_y,\quad \mathrm{Re} = \mu_* / (\rho_* a_* L)$$

Будем в дальнейшем считать, что коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят линейным образом от температуры: $\mu = T$, $k = T$.

Решение системы (2.1) должно удовлетворять следующим граничным условиям. При $Y = 0$, $x < 0$ компоненты скоростей $v_x = V_y = 0$, температура поверхности угла либо равна постоянной, либо $\partial T / \partial Y = 0$ (случай теплоизолированной стенки). При $Y \to \infty$, $x < 0$ компонента скорости v_x и плотность ρ должны сращиваться с разложениями (1.3).

Пусть имеется решение, удовлетворяющее поставленным условиям. Обозначим через $U(Y)$ профиль продольной составляющей вектора скорости в точке $x = 0$, $U(Y) = v_x(0, Y)$, а через $R(Y)$ — значение плотности. Будем искать решение системы (2.1) в окрестности вершины угла в виде разложений

(2.2)
$$p = 1 + \gamma d_0 (-x)^{2/5} + \gamma d_1 (-x)^{4/5} + \ldots$$
$$v_x = U(Y) + (-x)^{2/5} [u_{00} \ln(-x) + u_{01}] + (-x)^{4/5} [u_{10} \ln^2 \times$$
$$\times (-x) + u_{11} \ln(-x) + u_{12}] + \ldots$$
$$V_y = (-x)^{-3/5} [V_{00} \ln(-x) + V_{01}] + (-x)^{-1/5} [V_{10} \ln^2(-x) +$$
$$+ V_{11} \ln(-x) + V_{12}] + \ldots$$
$$\rho = R(Y) + (-x)^{2/5} [\rho_{00} \ln(-x) + \rho_{01}] + (-x)^{4/5} [\rho_{10} \ln^2 \cdot$$
$$\cdot (-x) + \rho_{11} \ln(-x) + \rho_{12}] + \ldots$$

При $Y \to \infty$ сразу имеем $R = U = 1$. Функции от Y, входящие в разложения (2.2), удовлетворяют системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Их можно записать в общем виде

(2.3)
$$-\frac{2}{5}(n+1)(\rho_{ni} U + u_{ni} R) + \frac{d}{dY}(R V_{ni}) = P_{ni}^1$$
$$-\frac{2}{5}(n+1) U R u_{ni} + U' R V_{ni} = P_{ni}^2$$
$${}^2/_5 (n+1) U \rho_{ni} - R' V_{ni} = P_{ni}{}^3$$

Система (2.3) сводится к решению одного уравнения

(2.4)
$$U V_{ni}' - U' V_{ni} = [U(P_{ni}^1 + P_{ni}^3) - P_{ni}^2] / R$$

После решения уравнения (2.4) функции u_{ni} и ρ_{ni} находятся по формулам

(2.5)
$$u_{ni} = \frac{5}{2(n+1)} \left[\frac{U'}{U} V_{ni} - \frac{P_{ni}^2}{UR}\right], \quad \rho_{ni} = \frac{5}{2(n+1)} \left[\frac{R'}{U} V_{ni} + \frac{P_{ni}^3}{U}\right]$$

При $i = 0$, $n = 0$ система (2.3) однородная и ее решение имеет вид

(2.6)
$$V_{00} = A_{00} U(Y), \quad \rho_{00} = {}^5/_2 A_{00} R'(Y), \quad u_{00} = {}^5/_2 A_{00} U'(Y)$$

Решение системы (2.4), (2.5) при $n = 0$, $i = 1$ можно представить в виде

(2.7)
$$V_{01} = \left[A_{01} + \frac{2}{5} d_0 I(Y)\right] U(Y)$$
$$U_{01} = \left[\frac{5}{2} A_{01} - \frac{25}{4} A_{00} + d_0 I(Y)\right] U'(Y) - \frac{d_0}{UR}$$
$$\rho_{01} = \left[\frac{5}{2} A_{01} - \frac{25}{4} A_{00} + d_0 I(Y)\right] R'(Y) + d_0 R$$
$$I(Y) = \int_Y^\infty \frac{1 - U^2 R}{U^2 R} dY$$

Поведение $U(Y)$ и $R(Y)$ при $Y \to \infty$ предполагается таким, что интеграл $I(Y)$ сходится. Выпишем теперь решение для функций с индексами $n = 1$, $i = 0$. Имеем

$$V_{10} = A_{10}U(Y) + {}^5/_2\, A_{00}{}^2U'(Y) \tag{2.8}$$
$$u_{10} = {}^5/_4\, [A_{10}U'(Y) + {}^5/_2\, A_{00}{}^2\, U''(Y)]$$
$$\rho_{01} = {}^5/_4\, [A_{10}\, R'(Y) + {}^5/_2\, A_{00}{}^2\, R''(Y)]$$

Решения с индексами $n = 1$, $i = 1$, 2 из-за громоздкости выписываться не будут. Отметим, что в случае $n = 1$, $i = 1$ правые части системы (2.3) при $Y \to \infty$ стремятся к нулю. Это означает, что

$$\lim V_{11} = A_{11},\ \lim u_{11} = \lim \rho_{11} = 0,\ Y \to \infty \tag{2.9}$$

В случае $n = 1$, $i = 2$ имеем

$$\lim P_{12}{}^2 = {}^4/_5\, d_1,\ \lim P_{12}{}^3 = {}^4/_5\, d_1 + {}^2/_5\, (1 - \gamma)\, d_0{}^2$$
$$\lim \{[(P_{12}{}^2 + P_{12}{}^3)\, U - P_{22}{}^2] / R\} = -\, {}^2/_5\, (1 + \gamma)\, d_0{}^2,\ Y \to \infty$$

Отсюда и из уравнений (2.4), (2.5) следует

$$V_{12} = A_{12} - {}^2/_5\, (1 + \gamma)\, d_0{}^2Y + o(1),\ u_{12} = -\, d_1 + o(1) \tag{2.10}$$
$$\rho_{12} = d_1 + {}^1/_2\, (1 - \gamma)\, d_0{}^2 + o(1),\ Y \to \infty$$

Отметим, что в правые части системы (2.3) в рассматриваемых приближениях диссипативные члены не входят. Таким образом, в основной части пограничного слоя течение вихревое, влиянием диссипативных факторов в нем можно пренебречь и описывается оно разложениями (2.2).

Наконец, срастим разложения (1.3), (2.2). Внешняя переменная y связана с внутренней Y соотношением $y = \mathrm{Re}^{-1/2}\, Y$. Из формул (2.6) — (2.10) следует, что внешнее разложение внутреннего разложения (2.2) для v_x, ρ полностью совпадает с их разложениями (1.3) во внешнем потенциальном потоке. Для v_y имеем

$$v_y = -\, {}^2/_5\, (1 + \gamma)\, d_0{}^2 y + \mathrm{Re}^{-1/2}\, \{[A_{00}\ln(-x) + A_{01}]\, (-x)^{-3/5} + O[(-x)^{-1/5}\ln(-x)]\} \tag{2.11}$$

Таким образом, получаем, что для сращивания v_y в первом приближении в потенциальном потоке необходимо рассматривать в разложениях (2.2) члены до порядка $(-x)^{-1/5}$ включительно.

3. Однако с помощью разложений (2.2) невозможно удовлетворить граничным условиям на поверхности угла. Поэтому в пристеночной области необходимо ввести тонкий подслой, в котором вязкость играет определяющую роль. Как следует из (2.2), толщина вытеснения пограничного слоя $\delta \sim \mathrm{Re}^{-1/2}\, (-x)^{2/5} \ln(-x)$. Роль теплопроводности в формировании течения второстепенна, так как при заданных температурных условиях на поверхности угла и малых скоростях движения сжимаемость газа проявляется слабо. Решение в подслое будем искать в виде

$$v_x = (-x)^{1/5}u_0(\eta) + (-x)^{3/5}u_1(\eta) + \ldots,\ \rho = R(0) + (-x)^{2/5}\rho_1(\eta) + \ldots \tag{3.1}$$
$$V_y = (-x)^{-2/5}V_0(\eta) + V_1(\eta) + \ldots$$
$$p = 1 + \gamma d_0\, (-x)^{2/5} + \gamma d_1\, (-x)^{4/5} + \ldots,\quad \eta = Y / (-x)^{2/5}$$

Показатели степеней ($-x$) перед первыми членами в разложениях v_x и V_y и в автомодельной переменной η определяются из условия, чтобы члены в уравнениях неразрывности и движения (2.1) имели одинаковый порядок вдоль линий $\eta = \text{const}$. Это эквивалентно требованию, чтобы в формировании течения в подслое силы трения, инерции и давления играли одинаковую роль. Температура находится из уравнения состояния

$$T = \frac{1}{R(0)}\left[1 + (-x)^{2/5}\left(\gamma d_0 - \frac{\rho_1}{R(0)}\right) + \ldots\right]$$

Введем функцию тока

$$\Psi = (-x)^{3/5} F_0(\eta) + (-x) F_1(\eta) + \ldots$$

Функции F_0 и F_1 и компоненты скоростей связаны соотношениями

$$u_0 = F_0', \quad V_0 = {}^3/_5 F_0 - {}^2/_5 \eta F_0', \quad u_1 = F_1' - \frac{\rho_1 u_0}{R(0)} \tag{3.2}$$
$$V_1 = F_1 - {}^2/_5\, \eta F_1' - \rho_1 V_0 / R(0)$$

Для определения функций в первом приближении получаем уравнение для F_0

$$-\frac{1}{R^2(0)}\frac{d^3F_0}{d\eta^3} + \frac{3}{5}F_0\frac{d^2F_0}{d\eta^2} - \frac{1}{5}\left(\frac{dF_0}{d\eta}\right)^2 = \frac{2}{5}\frac{d_0}{R(0)} \tag{3.3}$$

Для определения функций второго приближения F_1 и ρ_1 получаем систему

$$-\frac{1}{R^2(0)}F_1''' + \frac{3}{5}F_0F_1'' - \frac{4}{5}F_0'F_1' + F_0''F_1 - \frac{4}{5}\frac{d_1}{R(0)} = \tag{3.4}$$
$$= \frac{1}{R(0)}\left\{\frac{3}{5}\left[-\rho_1 F_0'^2 + F_0\frac{d}{d\eta}(\rho_1 F_0')\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{R(0)}\frac{d}{d\eta}\left[\left(\gamma d_0 - \frac{\rho_1}{R(0)}\right)F_0''\right]\right\} = E_1$$
$$\frac{1}{R^2(0)\,\mathrm{Pr}}\rho_1'' + \frac{2}{5}u_0(\rho_1 - \eta\rho_1') - V_0\rho_1' = (\gamma - 1)u_0'^2 +$$
$$+ \frac{2}{5}R(0)\,d_0u_0 = N_1$$

Граничные условия для уравнений (3.4), (3.3) следующие. При $\eta \to \infty$ разложения (3.1) должны сращиваться с разложениями (2.2). При $Y = 0$ величины $F_0 = F_0' = F_1 = F_1' = 0$. Если температура поверхности угла постоянна, то $\rho_1(0) = \gamma R(0)$; если же поверхность угла теплоизолирована, то $\rho'_1(0) = 0$. Следует отметить, что уравнения (3.4) линейные и решение второго уравнения не зависит от первого.

При $\eta \to 0$ решения F_0, ρ_1, F_1 можно представить в виде

$$F_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\eta^{n+2}, \quad \rho_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\eta^n, \quad F_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\varkappa_n\eta^{n+2} \tag{3.5}$$

В разложениях (3.5) коэффициент β_0 произвольный, $\beta_1 = -15^{-1} d_0R^2(0)$, $\beta_2 = 0$, остальные β_n ($n \geqslant 2$) определяются через β_0 и β_1. Коэффициенты ω_0, ω_1 произвольные, остальные ω_n ($n \geqslant 2$) определяются через ω_0, ω_1, β_0 и β_1. Величина $\varkappa_0$ также произвольна, а $\varkappa_n$ ($n \geqslant 1$) выражаются через $\varkappa_0$, β_0, β_1, ω_0, ω_1.

Асимптотическое поведение решения F_0 при $\eta \to \infty$ имеет вид

$$(3.6)\qquad F_0 = B_0\eta^{3/2} + B_{00}\eta^{1/2}\ln\eta + B_{01}\eta^{1/2} + \ldots$$
$$B_{00} = -\frac{2}{3}\frac{d_0}{B_0R(0)},$$

Функции ρ_1 и F_1 находятся из решения неоднородных уравнений. Правые части E_1 и N_1 при $\eta \to \infty$ ведут себя как $O(\eta)$ и $O(\sqrt{\eta})$. Асимптотическое поведение ρ_1 и F_1 при $\eta \to \infty$ имеет вид

$$(3.7)\qquad \rho_1 = C_1\eta - \frac{4}{9}\frac{d_0C_1}{B_0^2R(0)}\ln\eta + C_{01}\ldots$$
$$F_1 = M_1\eta^{5/2} + M_{10}\eta^{3/2}\ln\eta + M_{11}\eta^{3/2} + \ldots$$

Найденные асимптотические разложения F_0 и F_1 при $\eta \to 0$ и $\eta \to \infty$ по своему характеру совпадают с разложениями, полученными в работах [14,15]. В разложениях решений F_0, F_1, ρ_1 (3.6), (3.7) оставлено столько членов, чтобы произвести сращивание разложений (3.1) с членами разложений (2.2) порядка $(-x)^{2/5}$ включительно. Если считать $(-x)^{2/5}$ малым параметром, то внешняя переменная Y и внутренняя η связаны соотношением $\eta = Y/(-x)^{2/5}$.

Выпишем внешнее разложение внутреннего разложения, переписанное во внешних переменных

$$v_x = {}^3/_2 B_0Y^{1/2} + \frac{5}{2}MY^{3/2} - {}^1/_5 B_{00}Y^{-1/2}(-x)^{2/5}\ln(-x) +$$
$$+ [{}^1/_2 B_{00}\ln Y + (B_{00} + {}^1/_2 B_{01})]\, Y^{-1/2}(-x)^{2/5} + \ldots,\quad \rho = R(0) +$$
$$+ C_1Y + \ldots$$
$$M = M_1 - \frac{3}{5}C_1B_0,$$
$$V_y = -{}^4/_{25} B_{00}Y^{1/2}(-x)^{-3/5}\ln(-x) +$$
$$+ [{}^2/_5 B_{00}\ln Y + {}^2/_5(B_{01} - B_{00})]Y^{1/2}(-x)^{-3/5} + \ldots$$

Сравнение с внутренним разложением внешнего разложения (2.2), переписанным во внешних переменных, дает связи между постоянными и поведение функций $U(Y)$, $R(Y)$ при $Y \to 0$. Имеем

$$A_{00} = \left(\frac{4}{15}\right)^2\frac{d_0}{B_0^2R(0)},\qquad A_{01} = \frac{4}{15}\frac{d_0}{B_0^2R(0)} - \frac{2}{5}b_0d_0$$
$$b_0 = \int\limits_0^\infty \frac{1 - U^2R}{R}\left[U^{-2} - \frac{4}{9B_0^2}Y^{-1}\right]dY -$$
$$- \frac{4}{9B_0^2}\int\limits_0^\infty \ln Y\frac{d}{dY}\left[\frac{1 - U^2R}{R}\right]dY$$
$$U(Y) = \frac{3}{2}B_0Y^{1/2} + \frac{5}{2}MY^{3/2} + \ldots,\qquad R(Y) = R(0) + C_1Y + \ldots$$

4. Обратимся опять к разложению (2.11). Видно, что во внешнем потоке благодаря вытесняющему влиянию пограничного слоя (точнее подслоя) в разложение (1.1) необходимо ввести члены, пропорциональные $\mathrm{Re}^{-1/2}$

$$\varphi = x + y^{7/4}f_0(\xi) + y^{9/4}f_1(\xi) + \mathrm{Re}^{-1/2}[y^{1/4}\ln y\, f_{-10}(\xi) +$$
$$+ y^{1/4}f_{-11}(\xi)] + \ldots = \varphi_0 + \mathrm{Re}^{-1/2}\varphi_{-1}$$

Функция f_{-11} удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{25}{16}\xi^2 - f_0'\right) f_{-11}'' - \left[\frac{35}{16}\xi + f_0''\right] f_{-11}' - \frac{3}{16} f_{-11} = -\frac{1}{4} f_{-10} + \frac{5}{4}\xi f_{-10}' \tag{4.1}$$

Функция f_{-10} удовлетворяет однородному уравнению (4.1). При $\xi \to -\infty$ асимптотическое поведение f_{-10}, f_{-11} описывается разложениями

$$f_{-10} = D_{-10}^s [\xi^{1/5} + O(\xi^{-7/5})] + D_{-10}^a [\xi^{-3/5} + O(\xi^{-11/5})]$$
$$f_{-11} = D_{-11}^s [\xi^{1/5} + O(\xi^{-7/5})] + D_{-11}^a [\xi^{-3/5} + O(\xi^{-11/5})] + {}^4/_5\, D_{-10}^a \xi^{-3/5} \ln \xi$$

Индекс s соответствует симметрическому решению, a — антисимметрическому. Пользуясь найденными разложениями, получим асимптотическое поведение компонент скоростей при $x < 0$, $y \to 0$, соответствующих потенциалу φ_{-1}

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}^{-1/2}\frac{\partial\varphi_{-1}}{\partial y} = \left(-\frac{x}{\beta}\right)^{1/5} D_{-10}^s Y^{-1} + \frac{4}{5}\mathrm{Re}^{-1/2} D_{-10}^a \left(-\frac{x}{\beta}\right)^{-3/5} \ln\left(-\frac{x}{\beta}\right) + \\
&+ \mathrm{Re}^{-1/2} D_{-11}^a \left(-\frac{x}{\beta}\right)^{-3/5} + O(\mathrm{Re}^{-1}) \\
&\mathrm{Re}^{-1/2}\frac{\partial\varphi_{-1}}{\partial x} = -\mathrm{Re}^{-1/2} \ln \mathrm{Re}^{-1/2} \frac{1}{5\beta} D_{-10}^s \left(-\frac{x}{\beta}\right)^{-4/5} - \\
&- \mathrm{Re}^{-1/2}\left[\frac{1}{5\beta} D_{-10}^s \ln Y + \frac{1}{5\beta} D_{-11}^s\right]\left(-\frac{x}{\beta}\right)^{-4/5} + O(\mathrm{Re}^{-1}) \\
&\beta = (1+\gamma)^{1/3}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Видно, что если потребовать, чтобы разложение давления в основной части пограничного слоя не зависело от координаты Y, нужно положить $D_{-10}{}^s = 0$.

Решение в основной части пограничного слоя, индуцированное потенциалом $\mathrm{Re}^{-1/2}\varphi_{-1}$, будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&v_x = U(Y) + O[(-x)^{2/5} \ln(-x)] + \mathrm{Re}^{-1/2}[u_{-10} \ln(-x) + \\
&+ u_{-11}] (-x)^{-4/5} + \ldots \\
&V_y = O[(-x)^{-3/5} \ln(-x)] + \mathrm{Re}^{-1/2}[V_{-10} \ln(-x) + V_{-11}] \times \\
&\times (-x)^{-3/5} + \ldots \\
&\rho = R(Y) + O[(-x)^{2/5} \ln(-x)] + \mathrm{Re}^{-1/2}[\rho_{-10} \ln(-x) + \\
&+ \rho_{-11}] (-x)^{-4/5} + \ldots \\
&p = 1 + O[(-x)^{2/5}] + \gamma\, \mathrm{Re}^{-1/2} d_{-1} (-x)^{-4/5} + \ldots \\
&d_{-1} = {}^1/_5 (1+\gamma)^{-1/15} D_{-11}{}^s
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Неизвестные функции в (4.3) удовлетворяют системам уравнений (2.3). Выпишем сразу их решения

$$\begin{aligned}
&V_{-10} = A_{-10} U(Y), \quad \rho_{-10} = -{}^5/_4 A_{-10} R'(Y), \quad u_{-10} = \\
&= -{}^5/_4 A_{-10}\, U'(Y) \\
&u_{-11} = -\left[\frac{5}{4} A_{-11} + \frac{25}{16} A_{-10} - d_{-1} I(Y)\right] U(Y) - \frac{d_{-1}}{UR} \\
&\rho_{-11} = -\left[\frac{5}{4} A_{-11} + \frac{25}{16} A_{-10} - d_{-1} I(Y)\right] R'(Y) + d_{-1} R \\
&V_{-11} = \left[A_{-11} - \frac{4}{5} d_{-1} I(Y)\right] U(Y)
\end{aligned}$$

На основании найденных решений можно показать, что разложения (4.3) сращиваются с разложениями v_x, ρ во внешнем потенциальном потоке и индуцируют возмущение потенциала

$$\mathrm{Re}^{-1} y^{-5/4} \left[f_{-20}(\xi) \ln y + f_{-21}(\xi)\right]$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности угла, необходимо, как и раньше, ввести вязкий подслой. Решение в нем будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
(4.4)\qquad & v_x = (-x)^{1/5}u_0 + (-x)^{2/5}u_1 + \mathrm{Re}^{-1/2}(-x)^{-1}\ u_{-1} + \ldots\\
& V_y = (-x)^{-2/5}\ V_0 + V_1\ (\eta) + \mathrm{Re}^{-1/2}(-x)^{-8/5}\ V_{-1} + \ldots\\
& \rho = R\,(0) + (-x)^{2/5}\rho_1\,(\eta) + \mathrm{Re}^{-1/2}\ (-x)^{-4/5}\rho_{-1}\,(\eta) + \ldots
\end{aligned}
$$

Введя функцию F_{-1} по формулам

$$u_{-1} = F_{-1}{}',\ V_{-1} = -\,{}^{3}/_{5}\,F_{-1} - {}^{2}/_{5}\ \eta\ F'_{-1}$$

получим для определения решения в подслое следующую систему:

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad & -\frac{1}{R^2(0)}F'''_{-1} + \frac{3}{5}F_0F''_{-1} + \frac{4}{5}F_0{}'F'_{-1} - \frac{3}{5}F_0{}''F_{-1} = -\frac{4}{5}\,\frac{\dot a_1}{R\,(0)}\\
& \frac{1}{R^2(0)\,\mathrm{Pr}}\rho''_{-1} - V_0\rho_{-1} - u_0\left(-\frac{6}{5}\rho_{-1} + \frac{2}{5}\eta\rho'_{-1}\right) =\\
& = R\,(0)\left[-\frac{4}{5}d_{-1}u_0 + \frac{2}{5}d_0u_{-1}\right] + u_{-1}\left[-\frac{2}{5}\rho_1 + \frac{2}{5}\eta\rho_1{}'\right] +\\
& + V_{-1}\rho_1{}' + 2\,(\gamma - 1)\,u_0{}'u'_{-1}
\end{aligned}
$$

Асимптотическое поведение решений F_{-1}, ρ_{-1} при $\eta \to 0$ совпадает с поведением F_1, ρ_1. При $\eta \to \infty$

$$F_{-1} = M_{-1}\eta^{-3/2} - \frac{2}{3}\,\frac{d_{-1}}{B_0R\,(0)}\,\eta^{1/2}\ln\eta + \ldots,\qquad \rho_{-1} = C_{-1}\eta^{-2} + \ldots$$

Сращивание разложений (4.4) с разложениями, справедливыми в основной части пограничного слоя и внешнем потенциальном потоке, дает связи между постоянными в решениях и новые члены в разложениях $v\,(Y)$ и $R\,(Y)$ при $Y \to 0$

$$
\begin{aligned}
& U\,(Y) = {}^{3}/_{2}\ B_0Y^{1/2} + {}^{5}/_{2}\ MY^{3/2} - {}^{3}/_{2}\ \mathrm{Re}^{-1/2}Y^{-5/2}\ M_{-1} + \ldots\\
& R\,(Y) = R\,(0) + C_1Y + \mathrm{Re}^{-1/2}\ C_{-1}Y^{-2} + \ldots\\
& A_{00} = {}^{4}/_{5}\,(1 + \gamma)^{1/5}\ D_{-10}{}^{a},\ A_{10} = -{}^{4}/_{5}\,(1 + \gamma)^{1/5}\ln\beta\ D_{-10}{}^{a} +\\
& + (1 + \gamma)^{1/5}\ D_{-11}{}^{a}\\
& A_{-10} = -\frac{32}{225}\,\frac{d_{-1}}{B_0{}^2R\,(0)},\qquad A_{-11} = \frac{4}{5}d_{-1}b_0 + \frac{8}{45}\,\frac{d_{-1}}{B_0{}^2R\,(0)}
\end{aligned}
$$

5. Сравнение членов в разложении давления (4.3) и в разложениях (4.4) вдоль линий $\eta = \mathrm{const}$ показывает, что члены, обусловленные вытесняющим действием пограничного слоя, на расстояниях $(-x) \sim \mathrm{Re}^{-5/12}$ становятся одного порядка с членами, обусловленными внешним потенциальным потоком. Это означает, что в окрестности вершины угла возникает область свободного взаимодействия, соответствующая особенности Вальо-Лаурина. Этот результат может быть получен и иным путем [12, 13]. Для этого необходимо знать поведение $U(Y)$ при $Y \to 0$ и связь толщины вытеснения пограничного слоя с давлением, которое оно индуцирует.

Пусть основной профиль $U\,(Y) = O\,(Y^z)$, $Y \to 0$, $z > 0$. Область свободного взаимодействия имеет трехпалубную структуру [6–9]. Вблизи стенки лежит вязкий несжимаемый подслой, в котором силы давления, инерции и трения взаимно уравновешиваются. Обозначим черточкой сверху переменные и параметры потока, которые в подслое по порядку величины сравнимы с единицей. С учетом уравнений неразрывности и импульсов (2.1) имеем

$$x = \mathrm{Re}^{-\alpha}\bar{x}, \quad Y = \mathrm{Re}^{-\beta}\bar{Y}, \quad \Delta p = \mathrm{Re}^{-\tau}\bar{p}, \quad v_x = \mathrm{Re}^{-\beta z}\bar{v}_x \tag{5.1}$$
$$V_y = \mathrm{Re}^{\alpha-\beta(1+z)}\bar{V}_y, \quad \tau = 2\beta z, \quad \alpha = \beta(2+z)$$

В основной части пограничного слоя решение ищется в виде

$$v_x = U(Y) + \mathrm{Re}^{-\varkappa}u_0(x, Y) + \ldots, \quad V_y = \mathrm{Re}^{-\varkappa+\alpha}v_0(x, Y) \tag{5.2}$$

В формулах (5.1), (5.2) показатели α, β, τ, $\varkappa$ необходимо определить. В трансзвуковом диапазоне скоростей угол отклонения потока θ связан с относительным изменением давления Δp соотношением $\Delta p = O(\theta^{2/3})$ и определяется вытесняющим действием вязкого подслоя. Отсюда получаем недостающие соотношения для α, β, τ, $\varkappa$: $\varkappa = \beta$, $\varkappa - \alpha + 1/2 = 3\tau / 2$. В результате имеем

$$\alpha = \frac{2+z}{2(1+4z)}, \quad \beta = \frac{1}{2(1+4z)}, \quad \varkappa = \beta, \quad \tau = \beta$$

При $z = 1/2$ эти формулы дают $\alpha = 5/12$, $\beta = 1/6$. При $z = 1$ (блазиусовский профиль) $\alpha = 3/10$, $\beta = 1/10$, что совпадает с результатами работы [12].

Автор благодарит О. С. Рыжова за внимание к работе.

Поступила 5 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vaglio-Laurin R.* Transonic rotational flow over a convex corner. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 1.
2. *Фалькович С. В.*, *Чернов И. А.* Обтекание тел вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. *Есин А. И.*, *Фалькович С. В.*, *Чернов И. А.* Течение идеального газа в окрестности выпуклого угла с переходом через скорость звука. IV Всес. съезд по теоретической и прикладной механике. Киев, «Наукова думка», 1976.
4. *Бойченко В. С.*, *Лифшиц Ю. Б.* Трансзвуковое течение около выпуклого угла. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2.
5. *Шифрин Э. Г.* О скачке уплотнения при трансзвуковом обтекании выпуклого угла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
6. *Lighthill M. J.* On boundary layers and upstream influence. II. Supersonic flows without separation. Proc. Roy. Soc. A, 1953, vol. 217, No. 1131.
7. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
8. *Stewartson K.*, *Williams P. G.* Self-induced separation. Proc. Roy. Soc. A, 1969, vol. 312, No. 1509.
9. *Messiter A. F.* Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate. SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 18, No. 1.
10. *Сычев В. В.* О ламинарном отрыве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
11. *Рубан А. И.* О ламинарном отрыве от точки излома твердой поверхности. Уч. Зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.
12. *Messiter A. F.*, *Feo A.*, *Melnik R. E.* AIAA J., 1971, vol. 9, No. 6.
13. *Рыжов О. С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока. Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 5.
14. *Ackerberg R. C.* Boundary-layer separation at a free streamline, p. 1. Two-dimensional flow. J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, pt 2.
15. *Ackerberg R. C.* Boundary-layer separation at a free streamline, pt. 2. Numerical results. J. Fluid Mech., 1971, vol. 46, pt 4.