

МЕДЛЕННОЕ АСИММЕТРИЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ КАПЕЛЬ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

А. З. Зинченко

(Москва)

Строится точное решение уравнений Стокса в случае движения двух сферических капель в вязкой среде со скоростями, перпендикулярными линии центров. Представлены численные результаты по расчету гидродинамических сил. Обсуждается предельный переход к известным в литературе решениям. Исследуется поведение гидродинамических сил при касании сфер.

Отысканию точного решения уравнений Стокса в случае движения двух твердых сферических частиц в вязкой среде посвящена обширная литература. Решение [1] соответствует медленному вращению частиц вокруг линии центров. Поступательное движение сфер вдоль линии центров рассмотрено в работах [2-4]. Эти решения построены в бисферических координатах и позволяют представить гидродинамические силы в виде бесконечных рядов, для общих членов которых находятся аналитические выражения. В работах [5, 6] развит метод точного решения уравнений Стокса для асимметричного случая, когда твердые сферы движутся поступательно вдоль или вращаются около осей, перпендикулярных линии центров. Здесь также гидродинамические силы представляются бесконечными рядами, но общие члены рядов не могут быть найдены явно, а определяются через решение системы разностных уравнений. Наиболее полный анализ асимметричной задачи, численные результаты и подробная библиография содержатся в работах [7-9]. В силу линейности задачи Стокса результаты [1-9] позволяют рассчитывать взаимодействие двух твердых сфер, движущихся произвольным образом.

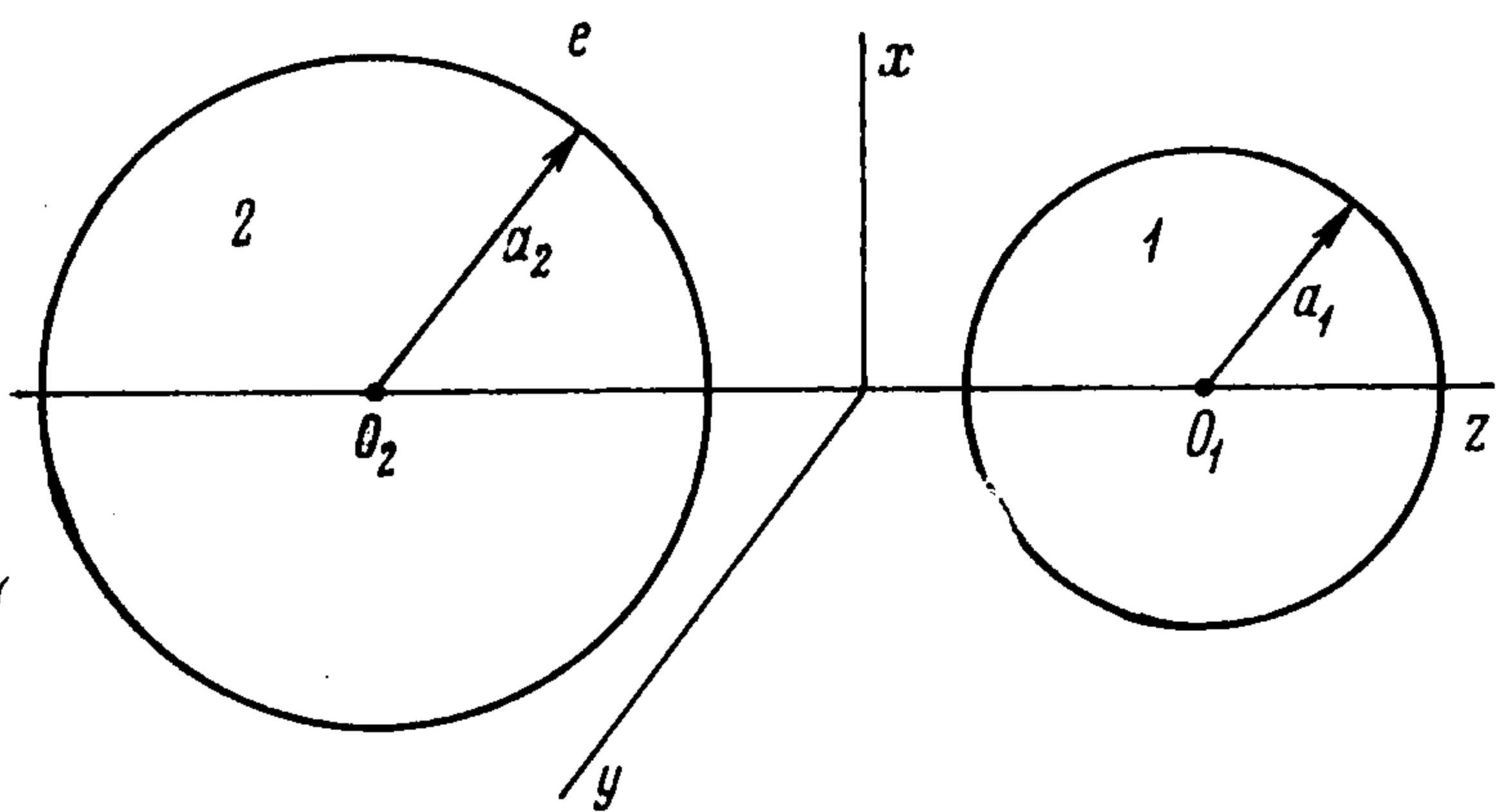
Для жидких сфер известно точное решение [10, 11] осесимметричной задачи, когда частицы движутся вдоль линии центров. В предлагаемой работе строится точное решение для асимметричного случая, когда капли имеют скорости, перпендикулярные линии центров. Представлены численные результаты по расчету гидродинамических сил. В силу линейности задачи предлагаемое решение вместе с результатами [10, 11] позволяет рассчитывать взаимодействие произвольно движущихся капель.

В работе [12] предпринята попытка получить методом отражений асимптотическое решение рассматриваемой задачи, применимое при больших расстояниях между поверхностями сфер. Однако ниже показано, что решение [12] содержит ошибки.

1. Постановка задачи. Точное решение уравнений Стокса. Жидкие сферы имеют радиусы a_1 , a_2 , динамические вязкости μ_1 , μ_2 и движутся перпендикулярно линии центров со скоростями V_1 , V_2 в среде с вязкостью μ_e . Числа Рейнольдса предполагаются малыми, и задача исследуется в приближении Стокса. В качестве граничных условий предполагаем непротекание жидкостей через поверхности контакта, непрерывность скорости и касательного напряжения на поверхностях сфер; на бесконечности жидкость покоится. Поверхностное натяжение на границах раздела жидкостей будем считать достаточно большим, что позволяет пренебречь от-

клонением формы частиц от сферической и не рассматривать граничное условие непрерывности нормальных напряжений.

Рассмотрим декартову систему координат (x, y, z) и связанную с ней цилиндрическую систему координат (r, θ, z) с осью z вдоль линии центров



O_2O_1 (см. фигуру); полуплоскость $y = 0, x > 0$ соответствует $\theta = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что в декартовой системе координат $V_i = (\delta_i V, 0, 0)$, где $\delta_i = 0$ или $\delta_i = 1$ ($i = 1, 2$). Структура решения предполагается такой же, как и в работах [5-8], и компоненты скорости жидкости в

трех областях течения, отмеченных на фигуре символами 1, 2, e, будем искать в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} v_r &= V (rF/c + \chi + \psi) \cos \theta \\ v_\theta &= V (\chi - \psi) \sin \theta, \quad v_z = V (zF/c + 2\Phi) \cos \theta \end{aligned}$$

Параметр c с размерностью длины определен в (1.3). Неизвестные функции F, χ, ψ, Φ удовлетворяют уравнениям

$$(1.2) \quad \begin{aligned} L_1 F &= L_1 \Phi = L_2 \chi = L_0 \psi = 0 \\ L_m &= \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + \partial^2 / \partial z^2 - m^2 r^{-2} \end{aligned}$$

Как известно [8], в этом случае уравнение Стокса $\text{rot}(\Delta v) = 0$ удовлетворяется тождественно.

Используя бисферическую систему координат

$$z = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad r = \frac{c \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad \mu = \cos \xi$$

можно найти параметр c и величины $\eta_1 > 0, \eta_2 < 0$ так, чтобы сфера радиуса a_i была координатной поверхностью $\eta = \eta_i = \text{const}$, положив

$$(1.3) \quad \operatorname{ch} \eta_1 = \frac{(1 + \varepsilon)(1 + k) + k\varepsilon^2/2}{1 + k + k\varepsilon}, \quad \operatorname{sh} \eta_2 = -k \operatorname{sh} \eta_1, \quad c = a_1 \operatorname{sh} \eta_1$$

Здесь εa_1 — зазор между сферами, $k = a_1 / a_2$.

Как следует из результатов [8], решения уравнений (1.2) можно искать в виде

$$(1.4) \quad \begin{aligned} F &= \zeta \sin \xi \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) P_n'(\mu), \quad \Phi = \zeta \sin \xi \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\eta) P_n'(\mu) \\ \chi &= \zeta \sin^2 \xi \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n(\eta) P_n''(\mu), \quad \Psi = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\eta) P_n(\mu) \\ \zeta &= (\operatorname{ch} \eta - \mu)^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь $P_n(\mu)$ — полином Лежандра n -й степени, а $f_n, \varphi_n, \chi_n, \psi_n$ — линейные комбинации функций $\exp[(n + 1/2)\eta], \exp[-(n + 1/2)\eta]$. Наряду с $f_n, \varphi_n, \chi_n, \psi_n$ введем функции $\alpha_n(\eta), \beta_n(\eta), \gamma_n(\eta)$ с помощью

преобразования

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \alpha_n &= 5f_n + 2\psi_n - 2(n-1)(n+2)\chi_n \\ \beta_{n-1} &= -(n-1)f_{n-1} - \psi_{n-1} + (n-2)(n-1)\chi_{n-1} \\ \gamma_{n+1} &= (n+2)f_{n+1} - \psi_{n+1} + (n+2)(n+3)\chi_{n+1} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Для устранения особенностей поля скоростей в точках $z = \pm c, r = 0$, лежащих внутри сфер, положим

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \beta_n^1 \\ \gamma_n^1 \\ \varphi_n^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_n^1 \\ K_n^1 \\ M_n^1 \\ A_n^1 \end{pmatrix} \exp[-(n+1/2)\eta], & \begin{pmatrix} \alpha_n^2 \\ \beta_n^2 \\ \gamma_n^2 \\ \varphi_n^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_n^2 \\ L_n^2 \\ N_n^2 \\ B_n^2 \end{pmatrix} \exp[(n+1/2)\eta] \end{aligned}$$

Во внешней области

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_n^e \\ \beta_n^e \\ \gamma_n^e \\ \varphi_n^e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_n^e \\ K_n^e \\ M_n^e \\ A_n^e \end{pmatrix} \exp[-(n+1/2)\eta] + \begin{pmatrix} J_n^e \\ L_n^e \\ N_n^e \\ B_n^e \end{pmatrix} \exp[(n+1/2)\eta] \end{aligned}$$

Верхними индексами e и i ($i = 1, 2$) отмечаются величины, относящиеся к указанным на фигуре областям.

С помощью результатов [8] найдем, что уравнение неразрывности $\operatorname{div} v = 0$ для внешней области эквивалентно двум соотношениям

$$(1.8) \quad \begin{aligned} I_n^e + K_{n-1}^e + M_{n+1}^e - 2(2n+1)A_n^e + 2(n-1)A_{n-1}^e + \\ + 2(n+2)A_{n+1}^e = 0 \\ J_n^e + L_{n-1}^e + N_{n+1}^e + 2(2n+1)B_n^e - 2(n-1)B_{n-1}^e - \\ - 2(n+2)B_{n+1}^e = 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Для внутренних областей уравнения неразрывности также приводят к двум разностным уравнениям: для области 1 следует взять первое соотношение (1.8) и заменить всюду индекс e на единицу, а для области 2 — второе равенство (1.8), в котором J_n^e и т. д. заменяются на J_n^2 и т. д.

Условия непрерывности скорости жидкости на поверхностях сфер дают

$$(1.9) \quad \begin{aligned} f_n^i - f_n^e &= \frac{2}{\operatorname{sh} \eta} \left[\frac{n-1}{2n-1} Z_{n-1}^i + \frac{n+2}{2n+3} Z_{n+1}^i - \operatorname{ch} \eta Z_n^i \right] \\ \psi_n^i - \psi_n^e &= \frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} Z_{n+1}^i - \frac{n(n-1)}{2n-1} Z_{n-1}^i \right] \\ \chi_n^i - \chi_n^e &= \frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \left[\frac{1}{2n-1} Z_{n-1}^i - \frac{1}{2n+3} Z_{n+1}^i \right] \\ Z_n^i &= \varphi_n^i - \varphi_n^e, \quad \eta = \eta_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

С помощью (1.5)–(1.9) условия соленоидальности поля скоростей во внутренних областях можно представить в виде

$$(1.10) \quad \begin{aligned} I_n^e + 2(2n+1)A_n^e + \exp(2\eta_2) [K_{n-1}^e - 2(n-1)A_{n-1}^e] + \\ + \exp(-2\eta_2) [M_{n+1}^e - 2(n+2)A_{n+1}^e] + \exp[(n+1/2)\eta_2] X_n^2 = 0 \\ J_n^e - 2(2n+1)B_n^e + \exp(-2\eta_1) [L_{n-1}^e + 2(n-1)B_{n-1}^e] + \\ + \exp(2\eta_1) [N_{n+1}^e + 2(n+2)B_{n+1}^e] + \exp[-(n+1/2)\eta_1] X_n^1 = 0 \\ (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$X_n^i = \frac{4}{\operatorname{sh} \eta_i} \left[\frac{n-1}{2n-1} Z_{n-1}^i + \frac{n+2}{2n+3} Z_{n+1}^i + \left(\frac{|\operatorname{sh} \eta_i|}{2n+1} - \operatorname{ch} \eta_i \right) Z_n^i \right]$$

$$i = 1, 2$$

Для упрощения записи граничных условий непротекания и непрерывности касательных напряжений введем в окрестности каждой поверхности вектор относительной скорости жидкости $\mathbf{v}_* = \mathbf{v} - \mathbf{V}_i$ и величины

$$(1.11) \quad u_\eta = -\mu F \operatorname{sh} \eta + 2(1 - \mu \operatorname{ch} \eta) \Phi - (\chi + \psi - \delta_i) \sin \xi \operatorname{sh} \eta$$

$$u_\xi = -\frac{1}{\sin \xi} \left[(\operatorname{ch} \eta - \mu) F + \frac{2(\operatorname{ch} \eta - \mu)^2}{\operatorname{sh} \eta} \Phi + \frac{(\mu \operatorname{ch} \eta - 1)}{\operatorname{sh} \eta} u_\eta \right]$$

которые отличаются от соответствующих ковариантных компонент вектора \mathbf{v}_* множителем $(cV \cos \theta)^{-1} (\operatorname{ch} \eta - \mu)^2$. Условия непротекания $u_\eta^e = 0$ на поверхностях сфер принимают вид

$$(1.12) \quad \frac{v_{n+1}^e}{2n+3} - \frac{\beta_{n-1}^e}{2n-1} + \frac{2 \operatorname{ch} \eta}{\operatorname{sh} \eta} \left[\frac{n-1}{2n-1} \Phi_{n-1}^e + \frac{n+2}{2n+3} \Phi_{n+1}^e \right] - \frac{2\Phi_n^e}{\operatorname{sh} \eta} =$$

$$= \delta_i \sqrt{2} \left\{ \frac{\exp[-(n-1/2)|\eta|]}{2n-1} - \frac{\exp[-(n+3/2)|\eta|]}{2n+3} \right\}$$

$$n \geq 1, \eta = \eta_i, i = 1, 2$$

С учетом (1.7) равенства (1.8), (1.10), (1.12) составляют систему шести линейных уравнений относительно $I_n^e, J_n^e, K_{n-1}^e, L_{n-1}^e, M_{n+1}^e, N_{n+1}^e$ (в этом смысле преобразования (1.5)). Разрешая эту систему, найдем выражения неизвестных через A_m^e, B_m^e ($n-1 \leq m \leq n+1$) и X_n^1, X_n^2 . Соответствующие формулы весьма громоздки и здесь не приводятся.

Коэффициенты всех функций $\varphi_n, f_n, \chi_n, \psi_n$ могут быть выражены через $A_m^e, B_m^e, Z_m^1, Z_m^2$ ($n-2 \leq m \leq n+2$) с помощью (1.9) и преобразования, обратного к (1.5)

$$(1.13) \quad 3(2n+1) f_n = (2n+1) \alpha_n + 2(n+2) \beta_n + 2(n-1) \gamma_n$$

$$6(2n+1) \chi_n = -(2n+1) \alpha_n - (2n+7) \beta_n - (2n-5) \gamma_n$$

$$6(2n+1) \psi_n = -(2n+1) n(n+1) \alpha_n - (n+1)(n+2) \times$$

$$\times (2n+3) \beta_n - n(n-1)(2n-1) \gamma_n$$

Остается удовлетворить граничным условиям непрерывности касательных напряжений, которые в проекциях на направления ξ и θ дают соответственно

$$(1.14) \quad \partial u_\xi^e / \partial \eta = \lambda_i \partial u_\xi^i / \partial \eta$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [(\operatorname{ch} \eta - \mu) (\chi^e - \psi^e + \delta_i)] = \lambda_i \frac{\partial}{\partial \eta} [(\operatorname{ch} \eta - \mu) (\chi^i - \psi^i + \delta_i)]$$

$$\lambda_i = \mu_i / \mu_e, \eta = \eta_i, i = 1, 2$$

Учитывая (1.11) и условия непротекания, величины $\partial u_\xi / \partial \eta$ при $\eta = \eta_i$ представим в виде

$$(1.15) \quad -\frac{3 \operatorname{sh} \eta}{2 \sin \xi} F - \frac{3(\operatorname{ch} \eta - \mu)}{\sin \xi} \Phi - \sin \xi \operatorname{ch} \eta \frac{DF}{\partial \eta} +$$

$$+ (\mu \operatorname{ch} \eta - 1) \frac{D}{\partial \eta} (\chi + \psi - \delta_i) - 2 \operatorname{sh} \eta \sin \xi \frac{D\Phi}{\partial \eta}$$

$$D / \partial \eta = \partial / \partial \eta - 1/2 \operatorname{sh} \eta (\operatorname{ch} \eta - \mu)^{-1}$$

Используя (1.15), (1.4), (1.9), (1.5) и (1.13), первое соотношение (1.14) можно представить в виде разностного уравнения

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad & \frac{3(\lambda_i - 1)}{1 + \lambda_i} \left\{ f_n^e \operatorname{sh} \eta + 2 \left[\varphi_n^e \operatorname{ch} \eta - \frac{n-1}{2n-1} \varphi_{n-1}^e - \frac{n+2}{2n+3} \varphi_{n+1}^e \right] \right\} + \\
 & + \operatorname{ch} \eta \left[\frac{n+2}{2n+3} (\gamma_{n+2}^\pm - \beta_n^\pm) + \frac{n-1}{2n-1} (\gamma_n^\pm - \beta_{n-2}^\pm) - (2n+1) f_n^\pm \right] + \\
 & + (n+2) f_{n+1}^\pm + (n-1) f_{n-1}^\pm + \beta_{n-1}^\pm - \gamma_{n+1}^\pm + \\
 & + 2 \operatorname{sh} \eta \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2n+3} \varphi_{n+2}^\pm + \frac{(n-1)(n-2)}{2n-1} \varphi_{n-2}^\pm - \right. \\
 & \left. - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \varphi_n^\pm \right] + \\
 & + \frac{4\lambda_i}{(1+\lambda_i) |\operatorname{sh} \eta|} \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)} Z_{n-2}^i - \frac{2(n-1)^2 \operatorname{ch} \eta}{(2n-1)^2} Z_{n-1}^i + \right. \\
 & + \frac{2}{2n+1} \left[\frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+5)} - 1 \right] Z_n^i + \frac{2(n+2)^2 \operatorname{ch} \eta}{(2n+3)^2} Z_{n+1}^i - \\
 & \left. - \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} Z_{n+2}^i \right\} = \\
 & = \frac{2^{3/2} \delta_i \operatorname{sh} \eta (\lambda_i - 1)}{1 + \lambda_i} \left\{ \operatorname{ch} \eta \left[\frac{n+2}{2n+3} \exp(- (n + 3/2) |\eta|) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{n-1}{2n-1} \exp(- (n - 1/2) |\eta|) \right] - \exp(- (n + 1/2) |\eta|) \right\} \quad (n \geq 1) \\
 & (1 + \lambda_i) (n + 1/2) f_n^\pm = df_n^e / d\eta \pm \lambda_i (n + 1/2) f_n^e \\
 & \eta = \eta_i, \quad i = 1, 2
 \end{aligned}$$

Величины β_n^\pm , γ_n^\pm , φ_n^\pm определяются аналогично f_n^\pm , причем верхний знак следует взять при $i = 1$, нижний — в случае $i = 2$.

Покажем, что с помощью второго соотношения (1.14) величины f_n^\pm могут быть выражены через A_m^e , B_m^e , Z_m^1 , Z_m^2 , причем $n - 1 \leq m \leq n + 1$; подстановка соответствующих выражений для f_{n-1}^\pm и f_{n+1}^\pm в (1.16) даст возможность получить два разностных уравнения четвертого порядка относительно A_n^e , B_n^e , Z_n^1 , Z_n^2 .

Выражая величину $(\operatorname{ch} \eta - \mu) (\chi - \psi + \delta_i)$ из уравнения неразрывности $\operatorname{div} \mathbf{v}_* = 0$, записанного в окрестности сферы радиуса a_i в бисферических координатах, получим из (1.14)

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad & \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{3 \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \mu} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] (u_\eta^e - \lambda_i u_\eta^i) + \\
 & + \left[\frac{3 \sin \xi \operatorname{sh} \eta}{(\operatorname{ch} \eta - \mu)^2} - \frac{2 \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \mu} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] (u_\xi^e - \lambda_i u_\xi^i) = 0, \quad \eta = \eta_i, \quad i = 1, 2
 \end{aligned}$$

С учетом (1.11) и условий непротекания уравнение (1.17) представим в виде

$$\begin{aligned}
 (1.18) \quad & \left[2 \frac{D}{\partial \eta} - \mu \operatorname{sh} \eta \frac{D^2}{\partial \eta^2} \right] (F^e - \lambda_i F^i) + \left[2 (1 - \mu \operatorname{ch} \eta) \frac{D^2}{\partial \eta^2} + \right. \\
 & \left. + 2 \right] (\Phi^e - \lambda_i \Phi^i) - \sin \xi \operatorname{sh} \eta \frac{D^2}{\partial \eta^2} [(\chi^e + \psi^e - \delta_i) - \lambda_i (\chi^i + \psi^i - \delta_i)] = \\
 & = 0, \quad \eta = \eta_i, \quad i = 1, 2
 \end{aligned}$$

Используя (1.4), (1.5), (1.9) и (1.12), представим (1.18) в разностном виде

$$(1.19) \quad f_n^\pm = \frac{2(1-\lambda_i)}{1+\lambda_i} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \eta}{2n+3} [\delta_i \sqrt{2} \exp(-(n+3/2)|\eta|) + \gamma_{n+1}^e] + \right. \\ \left. + \frac{2(n+2) \operatorname{ch} \eta}{2n+3} \Phi_{n+1}^e - \Phi_n^e \right\} \mp \frac{\lambda_i}{2(1+\lambda_i)} X_n^i \quad (n \geq 1) \\ \eta = \eta_i, \quad i = 1, 2$$

Здесь также верхний знак следует взять при $i = 1$, нижний — в случае $i = 2$.

Полученное представление для величин f_n^\pm вместе с выражениями коэффициентов $I_n^e, J_n^e, K_{n-1}^e, L_{n-1}^e, M_{n+1}^e, N_{n+1}^e$ через A_m^e, B_m^e ($n-1 \leq m \leq n+1$) и X_n^1, X_n^2 позволяет получить из (1.16) два разностных уравнения четвертого порядка относительно $A_n^e, B_n^e, Z_n^1, Z_n^2$. Вторую пару уравнений четвертого порядка получим, если используем для f_n^\pm другое выражение, исходя из первого равенства (1.13).

Замечание. Если попытаться непосредственно привести условия (1.14) к четырем разностным уравнениям относительно $A_n^e, B_n^e, Z_n^1, Z_n^2$, то два из этих уравнений будут содержать разности шестого, а два других — разности восьмого порядка.

Окончательную систему уравнений запишем в виде

$$(1.20) \quad \sum_{k=-2}^2 T_n^k \mathbf{w}_{n+k} = \delta_1 S_n^1 + \delta_2 S_n^2, \quad n \geq 1 \\ T_n^k = 0, \quad n+k < 1$$

Здесь \mathbf{w}_n — вектор-столбец, составленный из компонент

$$A_n^e \exp[-(n+1/2)\eta_2], B_n^e \exp[(n+1/2)\eta_1], Z_n^1, Z_n^2$$

Отыскание аналитических выражений для элементов матриц T_n^k четвертого порядка и векторов S_n^j было бы весьма трудоемким; вместо этого была составлена подпрограмма для ЭВМ, позволяющая находить T_n^k и S_n^j для любого n численно согласно изложенной схеме.

В качестве необходимого условия регулярности течения вплоть до поверхностей сфер требуем, чтобы решение \mathbf{w}_n системы (1.20) стремилось к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Зная \mathbf{w}_n , можно определить все функции $\varphi_n, f_n, \chi_n, \psi_n$.

2. Расчет гидродинамического взаимодействия сфер. Заметим, что моменты гидродинамических сил относительно центров частиц всегда равны нулю. Действительно, момент сил, действующих на сферу радиуса a_i , равен

$$(2.1) \quad \int_{S_i} (\mathbf{R} \times \mathbf{p}_n^e) dS$$

Здесь S_i — поверхность сферы, \mathbf{R} — вектор, соединяющий центр сферы и текущую точку поверхности, \mathbf{p}_n — вектор напряжения. Учитывая коллинеарность вектора \mathbf{R} вектору нормали и условия непрерывности касательных напряжений, вектор \mathbf{p}_n^e в (2.1) можно заменить на \mathbf{p}_n^i , далее

воспользоваться теоремой Гаусса — Остроградского, а также бездивергентностью тензора напряжений, следующей из уравнений Стокса.

Из (1.1) следует, что только x -компоненты сил могут быть отличны от нуля. Положим

$$f_n^e(\eta) = C_n^e \exp[(n + 1/2)\eta] + D_n^e \exp[-(n + 1/2)\eta]$$

Как следует из результатов [8], независимо от граничных условий на поверхностях сфер для x -компонент сил, действующих на частицы, справедливы формулы

$$(2.2) \quad F_1^x = -\pi\mu_e a_1 V \operatorname{sh} \eta_1 8\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)C_n^e$$

$$F_2^x = \pi\mu_e a_2 V \operatorname{sh} \eta_2 8\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)D_n^e$$

Суммы рядов (2.2) вычислялись следующим образом. Из двух уравнений (1.19) можно найти

$$(2.3) \quad n(n+1) \begin{pmatrix} C_n^e \\ D_n^e \end{pmatrix} = \sum_{j=-1}^1 R_n^j \mathbf{w}_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \delta_j \mathbf{G}_n^j, \quad n \geq 1$$

Матрицы R_n^j и векторы \mathbf{G}_n^j определялись численно. Далее, применяя метод матричной прогонки к системе (1.20), можно выразить \mathbf{w}_n через \mathbf{w}_{n+1} и \mathbf{w}_{n+2} (начальные значения прогоночных коэффициентов определяются последним условием (1.20)). Поэтому можно написать, используя (2.3),

$$\sum_{m=1}^{n-1} m(m+1) \begin{pmatrix} C_m^e \\ D_m^e \end{pmatrix} = Q_n^0 \mathbf{w}_n + Q_n^{-1} \mathbf{w}_{n-1} + \delta_1 \mathbf{H}_n^1 + \delta_2 \mathbf{H}_n^2$$

Матрицы Q_n^k и векторы \mathbf{H}_n^j определяются рекуррентно. Как показывают численные расчеты, всегда $Q_n^0, Q_n^{-1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\mathbf{w}_n \rightarrow 0$, то для вычисления сил достаточно найти пределы $\mathbf{H}_n^1, \mathbf{H}_n^2$ при $n \rightarrow \infty$.

Подчеркнем, что предложенный алгоритм использует лишь прямую прогонку.

В случае произвольного движения сфер со скоростями $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$, перпендикулярными линии центров, гидродинамические силы представим в виде

$$\mathbf{F}_1 = -6\pi\mu_e a_1 [\Lambda_{11} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) + \Lambda_{12} \mathbf{V}_2]$$

$$\mathbf{F}_2 = -6\pi\mu_e a_2 [\Lambda_{21} (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \Lambda_{22} \mathbf{V}_2]$$

В работе [12] найдена зависимость между коэффициентами сопротивления, эквивалентная соотношению

$$(2.4) \quad \Lambda_{11} - k^{-1}\Lambda_{21} = \Lambda_{12}$$

В таблице представлены результаты расчетов коэффициентов Λ_{ij} для $k = 0.1, 0.5, 1.0$ и различных ε и λ ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). При $k = 0.1, 0.5$ для каждой пары λ, ε указан столбец величин $\Lambda_{11}, \Lambda_{21}, \Lambda_{22}$, а при $k = 1.0$ — столбец $\Lambda_{11}, \Lambda_{21}$ (поскольку $\Lambda_{22} = \Lambda_{11} - \Lambda_{21}$ при $k = 1$).

Вычисления были проведены с удвоенной точностью на БЭСМ-6. Как показали расчеты, при малых ε погрешность вычислений с обычной точ-

k	λ	$\epsilon=10.0$	5.0	1.0	0.1	0.01	0.001
0.1	0.0	0.6703	0.6722	0.6617	0.6301	0.6224	0.6215
		0.0160	0.0210	0.0276	0.0284	0.0283	0.0283
		0.6545	0.6522	0.6506	0.6511	0.6512	0.6513
	10.0	0.9844	1.0036	1.1322	1.4441	1.6085	1.6470
		0.0365	0.0512	0.0840	0.1215	0.1384	0.1424
		0.9467	0.9446	0.9483	0.9511	0.9514	0.9514
	30.0	1.0052	1.0270	1.1848	1.6352	1.9860	2.1271
		0.0382	0.0538	0.0904	0.1424	0.1782	0.1925
		0.9656	0.9637	0.9681	0.9717	0.9723	0.9724
	10^7	1.0167	1.0402	1.2174	1.7806	2.3998	2.9497
		0.0391	0.0552	0.0944	0.1581	0.2211	0.2767
		0.9760	0.9741	0.9791	0.9832	0.9842	0.9848
0.5	0.0	0.6686	0.6719	0.6871	0.6955	0.6955	0.6954
		0.0257	0.0420	0.0859	0.1123	0.1157	0.1160
		0.6429	0.6299	0.6022	0.5904	0.5892	0.5891
	10.0	0.9759	0.9869	1.0625	1.2217	1.2854	1.2968
		0.0551	0.0919	0.2124	0.3416	0.3807	0.3875
		0.9208	0.8949	0.8431	0.8286	0.8303	0.8312
	30.0	0.9959	1.0076	1.0910	1.2897	1.3992	1.4316
		0.0574	0.0958	0.2234	0.3737	0.4365	0.4546
		0.9385	0.9117	0.8585	0.8442	0.8473	0.8496
	10^7	1.0068	1.0190	1.1071	1.3355	1.5018	1.6030
		0.0587	0.0980	0.2297	0.3954	0.4872	0.5413
		0.9482	0.9209	0.8669	0.8526	0.8569	0.8620
1.0	0.0	0.6678	0.6701	0.6856	0.7051	0.7083	0.7087
		0.0278	0.0479	0.1142	0.1677	0.1760	0.1769
	10.0	0.9733	0.9806	1.0411	1.1811	1.2361	1.2457
		0.0592	0.1032	0.2703	0.4787	0.5406	0.5503
	30.0	0.9931	1.0008	1.0660	1.2286	1.3104	1.3328
		0.0617	0.1075	0.2832	0.5158	0.6040	0.6260
	10^7	1.0040	1.0119	1.0799	1.2579	1.3696	1.4277
		0.0630	0.1099	0.2905	0.5394	0.6570	0.7136

ностью иногда оказывалась недостаточно малой, особенно для больших λ . При $\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$ предложенное решение вообще неприменимо: условия (1.14) означают равенство нулю касательных напряжений во внутренних областях при $\eta = \eta_i$, поэтому система (1.20) имеет неединственное решение, так как решение однородной системы соответствует произвольному вращению твердых сфер около осей, проходящих через центры и параллельных оси y . Однако равенство нулю моментов сил сохраняется в пределе $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \infty$, поэтому при больших, но конечных λ_1, λ_2 коэффициенты Λ_{ij} должны быть близки к соответствующим величинам Λ_{ij}^s для твердых сфер, движущихся со свободным вращением. Значения Λ_{ij}^s могут быть получены следующим образом. Если твердая сфера радиуса a_i имеет поступательную скорость $(V_i, 0, 0)$ и вращательную $(0, \Omega_i, 0)$ (в декартовой системе координат), то сила F_i^x и момент сил G_i^y , действующих на сферу,

могут быть представлены согласно [7,8] в виде

$$F_i^x = 6\pi\mu_e a_i \sum_{j=1}^2 (F_{ij}^t V_j + F_{ij}^r a_j \Omega_j)$$

$$G_i^y = 8\pi\mu_e a_i^2 \sum_{j=1}^2 (G_{ij}^t V_j + G_{ij}^r a_j \Omega_j)$$

(с некоторым отличием в обозначениях от [7,8]). Выражая угловые скорости через поступательные, из условий равенства нулю моментов G_i^y найдем Λ_{ij}^s как функции от шестнадцати коэффициентов $F_{ml}^t, F_{ml}^r, G_{ml}^t, G_{ml}^r$. Для некоторых пар k, ε из таблицы величины Λ_{ij}^s можно вычислить, используя табулированные в работах [7,8] значения $F_{ij}^t, F_{ij}^r, G_{ij}^t, G_{ij}^r$. Оказывается, что при тех же k, ε и $\lambda = 10^7$ приводимые в таблице значения Λ_{ij} с высокой степенью точности совпадают с соответствующими значениями Λ_{ij}^s (например, значения Λ_{11} и Λ_{11}^s различаются не более чем на единицу младшего десятичного разряда). Заметим, что метод расчета Λ_{ij}^s в принципе отличен от предлагаемого в данной работе способа вычисления Λ_{ij} .

В работе [12] методом отражений получена асимптотическая формула для F_1^x , переходящая при $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \infty$ в приближенную формулу [13] для твердых сфер, движущихся перпендикулярно линии центров без вращения. Авторы [12] ошибочно полагают, что это обстоятельство подтверждает правильность полученного ими решения. Но поскольку $\Lambda_{ij} \rightarrow \Lambda_{ij}^s$, то правильная асимптотическая формула для F_1^x при $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \infty$ должна была бы согласовываться с известным асимптотическим решением для твердых сфер, движущихся со свободным вращением (см. [13]). В действительности такого согласования нет, поэтому можно утверждать, что формула [12] содержит ошибки. Аккуратное вычисление по методу [12] дает следующий результат:

$$(2.5) \quad F_1^x \simeq -2\pi\mu_e a_1 p_1 \left\{ V_1^x \left[1 + \frac{1}{16} p_1 p_2 a_1 a_2 + \frac{1}{8} p_1 q_2 a_1 a_2^3 + \frac{1}{8} q_1 p_2 a_1^3 a_2 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{256} p_1^2 p_2^2 a_1^2 a_2^2 \right] - V_2^x \left[\frac{1}{4} p_2 a_2 + \frac{1}{4} q_2 a_2^3 + \frac{1}{4} q_1 p_1^{-1} p_2 a_1^2 a_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{64} p_1 p_2^2 a_1 a_2^2 + \frac{3}{64} q_1 p_2^2 a_1^3 a_2^2 + \frac{3}{64} p_1 p_2 q_2 a_1 a_2^4 + \frac{1}{1024} p_1^2 p_2^3 a_1^2 a_2^3 \right] \left. \right\}$$

$$p_i = (1 + \lambda_i)^{-1} (2 + 3\lambda_i), \quad q_i = (1 + \lambda_i)^{-1} \lambda_i, \quad \alpha_i = a_i / l$$

Здесь l — расстояние между центрами сфер. Коэффициенты при $\alpha_1 \alpha_2^3, \alpha_1 \alpha_2^4, \alpha_1^3 \alpha_2^2$ в работе [12] определены неверно. Сравнение с численными результатами показывает, что формула (2.5) является правильным асимптотическим разложением F_1^x при $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$. При $k = 0.5, \varepsilon = 10$ и при всех λ значения коэффициентов Λ_{ij} , вычисленные по формуле (2.5), совпадают с точными значениями не менее чем до четырех значащих цифр. Однако для почти соприкасающихся сфер формула (2.5) дает, как правило, большую погрешность, особенно при больших λ_1, λ_2 . Например, при $k = 0.25, \varepsilon = 0.005, \lambda = 30$ из формулы (2.5) следует, что $\Lambda_{11} = 1.12, \Lambda_{21} = 0.20, \Lambda_{22} = 0.921$, в то время как точное решение дает следующие значения: $\Lambda_{11} = 1.6371, \Lambda_{21} = 0.32021, \Lambda_{22} = 0.92885$. Кроме того, формула (2.5) не дает немонотонного поведения коэффициентов $\Lambda_{11}, \Lambda_{21}$ при изменении ε , которое в общем случае имеет место (см. таблицу).

3. Поведение коэффициентов Λ_{ij} при касании сфер. Рассмотрим диссипативную функцию E , соответствующую движению двух жидких сфер

$$\frac{E}{2} = \mu_e \int_{D_e} e^{jk} e_{jk} d\tau + \sum_{i=1}^2 \mu_i \int_{D_i} e^{jk} e_{jk} d\tau$$

Здесь D_e, D_i — области, отмеченные на фигуре символами e, i ($i = 1, 2$), e_{jk} — компоненты тензора скоростей деформаций. Граничные условия на поверхностях сфер позволяют представить E как квадратичную форму от скоростей, $E = -(\mathbf{F}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{F}_2 \mathbf{V}_2)$. Точно так же представляется диссипативная функция E^s для случая движения двух твердых сфер со свободным вращением. С учетом граничных условий для разности $E^s - E$ (при одинаковых $\varepsilon, a_i, \mathbf{V}_i$) можно получить выражение

$$\frac{E^s - E}{2} = \mu_e \int_{D_e} \varepsilon^{jk} \varepsilon_{jk} d\tau + \sum_{i=1}^2 \mu_i \int_{D_i} \varepsilon^{jk} \varepsilon_{jk} d\tau, \quad \varepsilon_{jk} = e_{jk}^s - e_{jk}$$

Компоненты e_{jk}^s тензора скоростей деформаций соответствуют случаю движения твердых сфер. Из положительной определенности квадратичных форм E и $E^s - E$ с учетом (2.4) можно получить неравенства

$$(3.1) \quad 0 < \Lambda_{11} < \Lambda_{11}^s, \quad 0 < \Lambda_{22} + \Lambda_{21} < \Lambda_{22}^s + \Lambda_{21}^s \\ (\Lambda_{21})^2 < k\Lambda_{11} (\Lambda_{22} + \Lambda_{21})$$

Из асимптотических формул [9] для коэффициентов $F_{ij}^t, F_{ij}^r, G_{ij}^t, G_{ij}^r$ следует, что величины Λ_{ij}^s остаются конечными при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем

$$(3.2) \quad \Lambda_{ij}^s(k, \varepsilon) = \Lambda_{ij}^s(k, 0) + O(|\ln \varepsilon|^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Из (3.1) следует, что и для жидких сфер коэффициенты Λ_{ij} не имеют сингулярности при $\varepsilon \rightarrow 0$ (в отличие от осесимметричного случая, см. [14]). Кроме того, численные расчеты показывают, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированных k, λ_1, λ_2

$$(3.3) \quad \Lambda_{ij}(k, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2) = \Lambda_{ij}(k, 0, \lambda_1, \lambda_2) + O(\varepsilon)$$

В силу (3.2) соотношение (3.3) неравномерно по λ_1, λ_2 при $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \infty$. Автор благодарит А. М. Головина за полезное обсуждение.

Поступила 27 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffery G. B. On the steady rotation of a solid of revolution in a viscous fluid. Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1915, vol. 14, No. 1242, p. 327—338.
2. Stimson M., Jeffery G. B. The motion of two spheres in a viscous fluid. Proc. Roy. Soc. A, 1926, vol. 111, No. 757, p. 110—116.
3. Cooley M. D. A., O'Neill M. E. On the slow motion of two spheres in contact along their line of centres through a viscous fluid. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, vol. 66, No. 2, p. 407—415.
4. Cooley M. D. A., O'Neill M. E. On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere. Mathematika, 1969, vol. 16, Pt1, No. 31, p. 37—49.
5. Dean W. R., O'Neill M. E. A slow motion of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere. Mathematika, 1963, vol. 10, Pt 1, No. 19, p. 13—24.
6. O'Neill M. E. A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving sphere. Mathematika, 1964, vol. 11, Pt 1, No. 21, p. 67—74.
7. Davis M. H. The slow translation and rotation of two unequal spheres in a viscous fluid. Chem. Engng Sci., 1969, vol. 24, No. 12, p. 1769—1776.
8. O'Neill M. E., Majumdar S. R. Asymmetrical slow viscous fluid motions caused by the translation or rotation of two spheres. Part I. The determination of exact solutions for any values of the ratio of radii and separation parameters. Z. angew. Math. und Phys., 1970, vol. 21, No. 2, p. 164—179.

9. *O'Neill M. E., Majumdar S. R.* Asymmetrical slow viscous fluid motions caused by the translation or rotation of two spheres. Part II. Asymptotic forms of the solution when the minimum clearance between the spheres approaches zero. *Z. angew. Math. und Phys.*, 1970, vol. 21, No. 2, p. 180—189.
 10. *Rushton E., Davies G. A.* The slow unsteady settling of two fluid spheres along their line of centres. *Appl. Sci. Res.*, 1973, vol. 28, No. 1/2, p. 37—61.
 11. *Haber S., Hetsroni G., Solan A.* On the low Reynolds number motion of two droplets. *Internat. J. Multiphase Flow*, 1973, vol. 1, No. 1, p. 57—71.
 12. *Hetsroni G., Haber S.* Low Reynolds number motion of two drops submerged in an unbounded arbitrary velocity field. *Internat. J. Multiphase Flow*, 1978, vol. 4, No. 1, p. 1—17.
 13. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
 14. *Зинченко А. З.* К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса. *ПММ*, 1978, т. 42, вып. 5.
-