Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОЗИЦИОННЫХ СИЛ

В. Н. Тхай

(Москва)

Решается задача устойчивости положения равновесия голономной механической системы, стесненной стационарными геометрическими связями и подверженной действию потенциальных и неконсервативных позиционных [1] сил. Предполагается, что характеристическое уравнение линейного приближения имеет чисто мнимые корни, среди которых нет равных. Рассматриваемая система обратима и в случае отсутствия в системе внутреннего резонанса в смысле [2] обладает полной устойчивостью по Биркгофу [3]: неустойчивость в конечном порядке может быть обнаружена только при внутреннем резонансе.

Для резонансов нечетного порядка сформулированы необходимые и достаточные условия устойчивости модельной системы и достаточные условия неустойчивости по Ляпунову. Из резонансов четного порядка исследован наиболее важный для приложений резонанс четвертого порядка, для которого в случае отсутствия вырождения получены необходимые и достаточные условия устойчивости в первом нелинейном приближении; показано, что из неустойчивости в третьем порядке следует неустойчивость по Ляпунову. Приведен пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим голономную механическую систему с n степенями свободы, стесненную стационарными геометрическими связями. Если за основные переменные, характеризующие состояние системы в любой момент времени t, принять независимые лагранжевы переменные q_s и скорости $q_s^{\boldsymbol{\cdot}} = dq_s / dt$, то уравнения движения системы можно записать в форме уравнений Лагранжа

$$(1.1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s(q) \quad (s = 1, \ldots, n), \quad 2T = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(q)\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_j^{\boldsymbol{\cdot}}$$

Здесь T — кинематическая энергия, а обобщенные силы Q_s зависят только от координат q; Q_s, a_{ij} — голоморфные функции от q. Как известно [1], любую непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу $Q(q) = (Q_1, \ldots, Q_n)$, зависящую только от положения системы, можно разложить на потенциальную и неконсервативную позиционную составляющие. Будем в дальнейшем предполагать, что неконсервативная позиционная составляющая силы Q не равна нулю.

Исследуем устойчивость положения равновесия системы (1.1), предполагая, без ограничения общности, что положению равновесия отвечают нулевые значения координат $q_s^\circ = 0$ и $Q_s(0) = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Разрешив систему (1.1) относительно старших производных, запишем ее в виде

$$(1.2) \qquad q_s^{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{n} b_{si}q_i + F_s(q) + \sum_{i,\,j=1}^{n} c_{sij}(q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \quad (s = 1, \ldots, n)$$

где F_s, c_{sij} — голоморфные функции $q_1, \ldots, q_n$, а разложения функций F_s начинаются членами не ниже второго порядка относительно q; b_{si} — постоянные.

Характеристическое уравнение системы

$$(1.3) \qquad \Delta(\varkappa^2) = \det \| b_{si} - \delta_{si}\varkappa^2 \| = 0$$

имеет лишь четные степени относительно $\varkappa$, следовательно, если среди корней (1.3) $\varkappa^2 = \lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ имеется хотя бы один комплексный или положительный, то положение равновесия неустойчиво [1]. Это возможно, например, при отсутствии потенциальных сил, если неконсервативные позиционные силы не равны нулю в линейном приближении [1]. Предположим, что $\lambda_s^2 < 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. Система (1.2) переходит в себя при линейной подстановке $R: t \to -t$, $q \to q$, $q^{\cdot} \to -q^{\cdot}$, т. е. является обратимой (обладает линейным автоморфизмом [4]). Поэтому если в системе нет внутреннего резонанса в смысле [2], то положение равновесия — точка полной устойчивости по Биркгофу [3, 5].

Рассматривая систему линейного приближения

$$(1.4) \qquad q_s^{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{n} b_{si}q_i \quad (s = 1, \ldots, n)$$

перейдем к комплексно-сопряженным переменным z_s, $\bar z_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ посредством линейной замены

$$(1.5) \qquad z_s = \sum_{j=1}^{n} p_{sj}(q_j^{\cdot} + \lambda_s q_j), \quad \bar z_s = \sum_{j=1}^{n} p_{sj}(-q_j^{\cdot} + \lambda_s q_j)$$

Чисто мнимые постоянные p_{sj} определим так, чтобы в новых переменных система (1.4) имела вид

$$(1.6) \qquad z_s^{\cdot} = \lambda_s z_s, \quad \bar z_s^{\cdot} = -\lambda_s \bar z_s \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Отсюда, подставляя (1.5) в (1.6) и учитывая, что q_s удовлетворяют (1.4), получим для вычисления постоянных p_{sj} $(s, j = 1, \ldots, n)$ следующие системы уравнений:

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} &(b_{11} - \lambda_s^2)p_{s1} + b_{21}p_{s2} + \ldots + b_{n1}p_{sn} = 0 \\ &b_{12}p_{s1} + (b_{22} - \lambda_s^2)p_{s2} + \ldots + b_{n2}p_{sn} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_{1n}p_{s1} + b_{2n}p_{s2} + \ldots + (b_{nn} - \lambda_s^2)\, p_{nn} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Так как λ_s^2 — корни характеристического уравнения (1.3), то определители систем (1.7) равны нулю и (1.7) допускает нетривиальное решение. Очевидно, при отсутствии среди λ_s^2 равных между собой имеем $\det \| p_{sj} \| \neq 0$, откуда немедленно следует невырожденность преобразования (1.5): определитель матрицы этого преобразования равен

$$2\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\{\det\|p_{sj}\|\}^2$$

Выразим q_s, $q_s^{\boldsymbol\cdot}$ через новые переменные z_s, $\bar z_s$. Из (1.6) имеем

$$z_s-\bar z_s=2\sum_{j=1}^{n}p_{sj}q_j^{\boldsymbol\cdot},\quad z_s+\bar z_s=2\lambda_s\sum_{j=1}^{n}p_{sj}q_j\quad(s=1,\ldots,n)$$

откуда (d_{sj} — чисто мнимые постоянные)

$$q_s=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{d_{sj}}{\lambda_j}(z_j+\bar z_j),\quad q_s^{\boldsymbol\cdot}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}d_{sj}(z_j-\bar z_j)\quad(s=1,\ldots,n)\tag{1.8}$$

Теперь запишем результат перехода к новым переменным в виде

$$\begin{gathered}z^{\boldsymbol\cdot}=\Lambda z+Z(z,\bar z),\quad \bar z^{\boldsymbol\cdot}=-\Lambda\bar z+\bar Z(z,\bar z)\\ z=(z_1,\ldots,z_n)\quad \bar z=(\bar z_1,\ldots,\bar z_n),\quad Z=(Z_1,\ldots,Z_n)\\ \bar Z=(\bar Z_1,\ldots,\bar Z_n),\quad \Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\end{gathered}\tag{1.9}$$

$$Z_s=\sum_{r=1}^{n}p_{sr}\left[F_r(q)+\sum_{i,j=1}^{n}c_{rij}(q)q_i^{\boldsymbol\cdot}q_j^{\boldsymbol\cdot}\right]\Bigg|_{(1.8)}\tag{1.10}$$

Здесь Z, $\bar Z$ — комплексно-сопряженные аналитические вектор-функции переменных z, $\bar z$, Λ — диагональная матрица собственных значений; запись выражений (1.10) означает, что в правых частях осуществлен переход к переменным z, $\bar z$ по формулам (1.8).

Согласно (1.8), (1.10), разложения функций Z_s, $\bar Z_s$ в ряды по степеням z, $\bar z$ имеют лишь чисто мнимые коэффициенты. Этот факт является следствием наличия в системе линейного автоморфизма R: $t\mapsto -t$, $z\mapsto\bar z$, $\bar z\to z$, который сохраняется и в нормальной форме [4]. В дальнейшем будет предполагаться, что нормальная форма системы (1.9), (1.10) записана в переменных u, v; z $\bar z\to u$, v.

2. Задача устойчивости. Из изложенного следует, что неустойчивость в конечном порядке может быть обнаружена лишь при наличии в системе внутреннего резонанса в смысле определения [2]. Решение задачи устойчивости для автономных систем дифференциальных уравнений по первым нелинейным членам в нормальной форме в случае внутреннего резонанса нечетного порядка K дано в [2]. Для рассматриваемой задачи эти результаты можно сформулировать следующим образом.

В полярных координатах

$$u_s=\sqrt{r_s}\exp(i\theta_s),\quad v_s=\sqrt{r_s}\exp(-i\theta_s)\quad(s=1,\ldots,n)\tag{2.1}$$

модельная система, полученная из нормальной формы отбрасыванием членов выше $K-1$ порядка, записывается в виде

$$\begin{gathered}r_s^{\boldsymbol\cdot}=2a_s\sin\theta\prod_{j=1}^{m}r_j^{p_j/2}\quad(s=1,\ldots,m)\\ \theta^{\boldsymbol\cdot}=\sum_{s=1}^{m}p_sa_s\cos\theta\prod_{j=1}^{m}r_j^{p_j/2-\delta_{sj}},\quad\theta=p_1\theta_1+\ldots+p_m\theta_m,\quad p_s>0\\ r_\alpha^{\boldsymbol\cdot}=0\quad(\alpha=m+1,\ldots,n)\end{gathered}\tag{2.2}$$

где a_s ($s = 1, \ldots, m$) — действительные постоянные, и представляет некоторый частный класс систем, рассмотренных в [2].

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием устойчивости модельной системы (2.2) является существование пары коэффициентов a_i, $a_j \neq \neq 0$, такой, что $\operatorname{sign} a_i a_j = -1$. Если же для любых пар a_i, a_j выполняется условие $\operatorname{sign} a_i a_j = 1$, то тривиальное решение системы (1.1) неустойчиво по Ляпунову.

Вопрос устойчивости модельной системы при наличии в системе вида (1.9), (1.10) нескольких резонансов нечетного порядка исследован в [6].

Исследуем устойчивость при наличии в системе внутреннего резонанса четного порядка, из них рассмотрим наиболее важные для приложений резонансы четвертого порядка.

Как известно [7], задача об устойчивости при резонансе четвертого порядка достаточно сложная и в общем случае не существует алгебраического критерия устойчивости даже для модельной системы [1]; удается получить лишь некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости. Однако для рассматриваемого класса механических систем (1.1) вопрос для модельной системы решается до конца; в случае отсутствия вырождения необходимые условия устойчивости являются также и достаточными.

Запишем, без ограничения общности, этот резонанс в виде

$$\sum_{i=1}^{m} p_i\lambda_i = 0, \quad p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 4, \quad m \leqslant 4, \quad m \leqslant n \tag{2.3}$$

Согласно [4] и изложенному в п. 1, модельная система, полученная из нормальной формы отбрасыванием членов выше третьего порядка, имеет вид

$$\begin{gathered} u_\alpha^{\bullet} = \lambda_\alpha u_\alpha + i u_\alpha \sum_{j=1}^{n} A_{\alpha j} u_j v_j + i B_\alpha \prod_{j=1}^{m} v_j^{p_j - \delta_{\alpha j}} \\ u_\beta^{\bullet} = \lambda_\beta u_\beta + i u_\beta \sum_{j=1}^{n} A_{\beta j} u_j v_j \quad (\alpha = 1, \ldots, m;\ \beta = m+1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $A_{\alpha j}$, $A_{\beta j}$, B_α — действительные постоянные, а комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

Рассмотрим невырожденный случай, когда ни один из коэффициентов B_α не обращается в нуль. В полярных координатах r_s, θ_s (по формулам (2.1)) система (2.4) запишется в виде

$$\begin{gathered} r_\alpha^{\bullet} = 2B_\alpha \sin\theta \prod_{j=1}^{m} r_j^{p_j/2}, \quad r_\beta^{\bullet} = 0 \\ (\alpha = 1, \ldots, m;\ \beta = m+1, \ldots, n) \\ \theta^{\bullet} = \sum_{j=1}^{n} A_j r_j + \sum_{k=1}^{m} p_j B_j \prod_{k=1}^{m} r_k^{p_k/2 - \delta_{jk}} \cos\theta \\ A_j = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha A_{\alpha j}, \quad \theta = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha \theta_\alpha \quad (j = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.5}$$

[1] См. *Шноль Э. Э., Хазин Л. Г.* Несуществование алгебраического критерия асимптотической устойчивости при резонансе 1 : 3. Препринт ин-та прикл. матем., № 45, М., 1977.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что система (2.5) имеет следующие первые интегралы:

(2.6)
$$W_\alpha = B_\alpha r_1 - B_1 r_\alpha = h_\alpha \quad (\alpha = 2, \ldots, m)$$
$$W_\beta = r_\beta = h_\beta \quad (\beta = m+1, \ldots, n)$$
$$W = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \left(\prod_{j=1}^{m} B_j^{1-\delta_{\alpha j}}\right) r_\alpha^2 + 4\prod_{j=1}^{m} B_j r_j^{p_j/2} \cos\theta +$$
$$+ \frac{4}{m} \sum_{\beta=m+1}^{n} A_\beta r_\beta \left(\sum_{\alpha=1}^{m} r_\alpha \prod_{j=1}^{m} B_j^{1-\delta_{\alpha j}}\right) = h$$

где h_ν ($\nu = 2, \ldots, n$), h — произвольные постоянные. Следовательно, если среди коэффициентов B_α ($\alpha = 1, \ldots, m$) есть смена знака, то из первого и второго интегралов (2.6) можно составить линейный относительно r_s ($s = 1, \ldots, n$) знакоопределенный интеграл, что доказывает устойчивость модельной системы (2.4).

Пусть все B_α одного знака. Из интегралов (2.6) образуем функцию

$$V(r_1, \ldots, r_n, \theta) = W^2 + \sum_{\nu=2}^{n} W_\nu^4$$

Очевидно, функция V будет определенно-положительной относительно $r_1, \ldots, r_n$, если на многообразии

(2.7) $$W_\nu = 0 \quad (\nu = 2, \ldots, n)$$

$W \neq 0$. На (2.7) функция W имеет вид

$$W_* = \left(\prod_{j=1}^{m} B_j / B_1^2\right)\left[\sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha B_\alpha + 4\cos\theta \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2}\right] r_1^2$$

и не обращается в нуль, если

(2.8) $$\left|\sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha B_\alpha\right| > 4\prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2}$$

Таким образом, если все B_α одного знака, то при выполнении (2.8) функция V — функция Ляпунова для (2.5), удовлетворяющая теореме об устойчивости [8].

Пусть теперь в (2.8) знак неравенства меняется на противоположный и все B_α одного знака. Тогда модельная система имеет частное решение типа растущего луча

$$r_\alpha = \gamma_\alpha r, \quad r_\beta = 0, \quad r^\cdot = \gamma r^2, \quad \theta = \theta_0; \quad \gamma, \gamma_\alpha > 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, m; \ \beta = m+1, \ldots, n)$$

Действительно, подставляя это решение в (2.5), получим

$$r^\cdot = 2r^2 \left(\frac{B_\alpha}{\gamma_\alpha} \prod_{j=1}^{m} \gamma_j^{p_j/2}\right) \sin\theta, \quad \theta^\cdot = \left[\sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \gamma_\alpha + 4B_1 \prod_{j=1}^{m} \gamma_j^{p_j/2} \cos\theta\right] r$$

откуда

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{B_2}{B_1}, \ldots, \quad \gamma_m = \frac{B_m}{B_1}, \quad 4\,|\cos\theta_0| \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} =$$

$$= \left|\sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha B_\alpha\right|, \quad B_1 \sin\theta_0 > 0$$

Следовательно, в этом случае модельная система неустойчива.

Вопрос устойчивости для модельной системы решен полностью. Заметим, что системы интегралов (2.6) достаточно, чтобы свести задачу интегрирования модельной системы к квадратурам.

Покажем теперь, что неустойчивость, обнаруженная в модельной системе, сохраняется и в полной системе. Предполагая выполненным приведение системы (1.9) к нормальной форме до членов третьего порядка включительно, перейдем к полярным координатам по формулам (2.1). Результат всегда можно записать в виде

$$(2.9) \qquad r_\alpha^{\cdot} = 2 \operatorname{sign} B_\alpha \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} r_j^{p_j/2} \sin\theta + R_\alpha(r_*, \theta_*)$$

$$\prod_{j=1}^{m} r_j^{p_j/2} \theta^{\cdot} = \prod_{j=1}^{m} r_j^{p_j/2} \left[\sum_{j=1}^{m} A_j |B_j| r_j + \sum_{\beta=m+1}^{n} A_\beta r_\beta + \right.$$

$$\left. + \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha \operatorname{sign} B_\alpha \prod_{j=1}^{m} r_j^{p_j/2 - \delta_{\alpha j}} \cos\theta \right] + \Phi(r_*, \theta_*)$$

$$r_\beta^{\cdot} = R_\beta(r_*, \theta_*) \quad (\alpha = 1, \ldots, m^{\cdot}, \quad \beta = m+1, \ldots, n)$$

$$r_* = (r_1, \ldots, r_n), \quad \theta_* = (\theta_1, \ldots, \theta_n), \quad \|r_*\| = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{1/2}\right)^2$$

$$\Phi \sim O(\|r_*\|^{7/2}), \quad R_{\alpha,\beta} \sim O(\|r_*\|^{5/2})$$

Теперь вместо переменных r_α введем следующие переменные:

$$r_1, \; r_2 = r_1(1 + x_2), \ldots, \quad r_m = r_1(1 + x_m)$$

которым отвечают уравнения

$$(2.10) \qquad r_1 x_\alpha^{\cdot} = -2 r_1^2 x_\alpha \operatorname{sign} B_\alpha |B_1|^{p_j/2} \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} (1 + x_j)^{p_j/2} \sin\theta +$$

$$+ R_\alpha - R_1(1 + x_\alpha)$$

и рассмотрим функцию

$$V = r_1 \left[\pm \sum_{\alpha=1}^{m]} r_\alpha \prod_{j=1}^{m} r_j^{p_j/2} \sin\theta - \sum_{\beta=m+1}^{n} r_\beta^{3(1-\gamma)} - \sum_{\mu=2}^{m} x_\mu^{10}\right]$$

$$(0 < \gamma < 1/3)$$

где знак плюс берется, когда все B_α положительные, минус — когда все B_α отрицательные. Вычисляя производную от функции V, в силу уравнений (2.9), (2.10), получим в области $V > 0$

$$V^{\cdot} = \pm 2 \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} r_j^{p_j/2} \sin\theta \Big[\pm \sum_{\alpha=1}^{m} r_\alpha \prod_{j=1}^{m} r_j^{p_j/2} \sin\theta -$$

$$- \sum_{\beta=m+1}^{n} r_\beta^{3(1-\gamma)} - \sum_{\mu=2}^{m} x_\mu^{10} \Big] +$$

$$+ m \Big[2 \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} \sin^2\theta + 4 \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} + \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha |B_\alpha| \cos\theta \Big] r_1^5 \pm$$

$$\pm 20 r_1^2 \sum_{\mu=2}^{m} |B_1|^{p_1/2} x_\mu^{10} \prod_{j=2}^{m} |B_j|^{p_j/2} \sin\theta + o(r_1^5)$$

В силу условия

$$4 \prod_{j=1}^{m} |B_j|^{p_j/2} \geqslant \Big| \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha B_\alpha \Big| \tag{2.11}$$

производная $V^{\cdot} > 0$ в области $V > 0$. Тем самым выполнены все условия теоремы Четаева о неустойчивости [9].

Теорема 2. Если $B_\alpha \neq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$, то необходимым и достаточным условием устойчивости модельной системы (2.4) является выполнение одного из условий: а) существует пара коэффициентов B_i, B_j $(i \neq j)$, такая, что $\operatorname{sign} B_i B_j = -1$; б) для всевозможных пар коэффициентов B_i, B_j $\operatorname{sign} B_i B_j = 1$ и справедливо условие (2.8).

Если же все B_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ одного знака и выполняется (2.11), то положение равновесия системы (1.1) неустойчиво по Ляпунову.

Отметим, что все выводы работы справедливы не только для систем (1.1) с позиционными силами, но и для любых обратимых систем в смысле известного определения (см. [5], стр. 35). Это следует из работ [4, 5]. Пусть, например, на систему (1.1), кроме позиционных сил действуют дополнительно силы

$$Q^*_s = \sum_{i, j=1}^{n} f_{sij}(q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \quad (s = 1, \ldots, n)$$

где f_{sij} — голоморфные функции q. Тогда все преобразования п. 1 остаются в силе, и в результате приходим к (1.9), (1.10). Силы указанного вида имеют место, например, в неголономных системах Чаплыгина [10].

3. Пример. Модель упругого стержня под действием следящей силы [1]. Одна группа задач на исследование устойчивости с неконсервативными позиционными силами связана с упругими системами, подверженными действию так называемых следящих сил, т. е. сил, линия действия которых совпадает с касательной к упругой оси стержня. В качестве модели этих систем может быть рассмотрена одна механическая задача (см. [1], стр. 210).

Сохраняя обозначения [1], поставим задачу об устойчивости положения равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, решенную в линейном приближении.

Уравнения возмущенного движения, разрешенные относительно старших производных, запишем в виде

$$\varphi_s^{\cdot\cdot} = b_{s1}\varphi_1 + b_{s2}\varphi_2 + \Phi_s + \ldots \quad (s = 1, 2)$$

$$b_{11} = -[(c_1 + c_2 - Fl_1)\, a_{22} + c_2 a_{12}] / \Delta, \quad b_{12} = [(c_2 - Fl_1) a_{22} + c_2 a_{12}] / \Delta$$

$$b_{21} = [(c_1 + c_2 - Fl_1)\, a_{21} + c_2 a_{11}] / \Delta, \quad b_{22} = -[(c_2 - Fl_1)\, a_{21} + c_2 a_{11}] / \Delta$$

$$\Delta\Phi_1 = a_{12}(a_{22}\varphi_2^{\cdot} - a_{12}\varphi_1^{\cdot})(\varphi_1^{\cdot} - \varphi_2^{\cdot})(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}\left(c_2 a_{12} - \frac{Fl_1 a_{22}}{3}\right) \times$$

$$\times (\varphi_1 - \varphi_2)^3 - a_{12}^2 (b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

$$\Delta\Phi_2 = a_{12}(a_{11}\varphi_1{}^{\cdot} - a_{12}\varphi_2{}^{\cdot})(\varphi_1{}^{\cdot} - \varphi_2{}^{\cdot})(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{Fl_1a_{12}}{6}(\varphi_1 - \varphi_2)^3 +$$
$$+ \frac{a_{12}}{2}[(c_1 + c_2 - Fl_1 - 2a_{12}b_{21})\varphi_1 - (c_2 - Fl_1 + 2a_{12}b_{22})\varphi_2](\varphi_1 - \varphi_2)^2$$
$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$$

Невыписанные члены имеют порядок выше третьего относительно φ_s, $\varphi_s{}^{\cdot}$ $(s = 1, 2)$.

Для того чтобы характеристическое уравнение

$$\varkappa^4 + a\varkappa^2 + b = 0,\ a = -(b_{11} + b_{22}),\ b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

имело чисто мнимые корни, необходимо и достаточно выполнение условий

(3.1) $$a > 0,\ b > 0,\ a^2 - 4b \geqslant 0$$

Из этих неравенств можно найти наименьшее значение следящей силы F, при котором сохраняется устойчивость системы в линейном приближении. (При отсутствии следящей силы система устойчива [1].)

Найдем частоты системы

$$\omega_1{}^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},\quad \omega_2{}^2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},\quad \omega_1{}^2 \geqslant \omega_2{}^2$$

Согласно изложенному в п. 1, если ни при каких целях $p \geqslant 1$ не выполняются соотношения $\omega_1{}^2 = p^2\omega_2{}^2$, то система вполне устойчива по Биркгофу.

Приведем систему линейного приближения к виду (1.6). Найденная матрица $\| p_{sj} \|$ имеет вид

$$p_{s1} = -i\,(b_{22} + \omega_s{}^2) \,/\, b_{12},\ p_{s2} = i \quad (s = 1, 2)$$

откуда

(3.2) $$\varphi_1 = \frac{b_{12}}{2(\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2)}\left[\frac{z_1 + \bar z_1}{\omega_1} - \frac{z_2 + \bar z_2}{\omega_2}\right],\quad \varphi_2 = \frac{1}{2(\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2)} \times$$
$$\times \left[\frac{b_{22} + \omega_2{}^2}{\omega_1}(z_1 + \bar z_1) - \frac{b_{22} + \omega_1{}^2}{\omega_2}(z_2 + \bar z_2)\right]$$
$$\varphi_1{}^{\cdot} = \frac{b_{12}i}{2(\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2)}[(z_1 - \bar z_1) - (z_2 - \bar z_2)],\quad \varphi_2{}^{\cdot} = \frac{i}{2(\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2)} \times$$
$$\times [(b_{22} + \omega_2{}^2)(z_1 - \bar z_1) - (b_{22} + \omega_1{}^2)(z_2 - \bar z_2)]$$

В результате указанного преобразования система приобретает вид

(3.3) $$z_1{}^{\cdot} = i\omega_1 z_1 - \frac{b_{22} + \omega_1{}^2}{b_{12}}\, i\Phi_1{}^*(z, \bar z) + i\Phi_2{}^*(z, \bar z) + \ldots$$
$$z_2{}^{\cdot} = i\omega_2 z_2 - \frac{b_{22} + \omega_2{}^2}{b_{12}}\, i\Phi_1{}^*(z, \bar z) + i\Phi_2{}^*(z, \bar z) + \ldots$$

где $\Phi_1{}^*$, $\Phi_2{}^*$ — функции Φ_1, Φ_2 после замены (3.2).

Пусть в системе имеет место резонанс $\omega_1 = 3\omega_2$, для наличия которого достаточно выполнения условия

(3.4) $$9a^2 = 100b > 0$$

Тогда после нормализации система (3.3) имеет вид

(3.5) $$u_1{}^{\cdot} = i\omega_1 u_1 + iu_1(A_{11}\,|\,u_1\,|^2 + A_{12}\,|\,u_2\,|^2) + iB_1u_2{}^3 + \ldots$$
$$u_2{}^{\cdot} = i\omega_2 u_2 + iu_2(A_{21}\,|\,u_1\,|^2 + A_{22}\,|\,u_2\,|^2) + iB_2u_1v_2{}^2 + \ldots$$

Действительные постоянные A_{ij}, B_i $(i, j = 1, 2)$ — коэффициенты правых частей (3.3) при тех же произведениях переменных, что и в (3.5), если в (3.3) z, $\bar z$ заменить на u, v. Не выписывая громоздкий вид их, на основе теоремы 2 сделаем следующие выводы.

Если наряду с условием (3.4) выполняются следующие неравенства:

(3.6) $$B_1B_2 < 0,\quad 4\,|\,B_1B_2\,| \geqslant |\,(A_{11} - 3A_{21})\,B_1 - (A_{12} - 3A_{22})\,B_2\,|\,\sqrt{-B_1/B_2}$$

то положение равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ неустойчиво. Если же второе неравенство в (3.6) меняется на противоположное или $B_1B_2 > 0$, то устойчивость гарантируется для укороченной до кубических членов системы.

Автор благодарит А. Л. Куницына за обсуждение работы, в также рецензента за полезные замечания.

Поступила 11 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1976.
2. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
3. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
4. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1979.
5. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1973.
6. *Жавнерчик В. Э.* Об устойчивости автономных систем при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
7. *Куницын А. Л.* Об асимптотической устойчивости резонансных систем. ПММ, 1978, т. 42, вып. 6.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
9. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
10. *Чаплыгин С. А.* Избр. тр. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. М., «Наука», 1976.