Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 531.36

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВИНТОВОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ю. Н. Челноков

(Балаково)

Рассматриваются кинематические уравнения винтового движения твердого тела в параметрах, комплексные комбинации которых являются компонентами бикватерниона винтового перемещения тела. Устанавливается структура общего решения кинематических уравнений и исследуется один случай их интегрируемости в квадратурах.

1. Как известно, произвольное пространственное движение твердого тела эквивалентно винтовому движению. Введем в рассмотрение две системы координат: связанную с телом $O_2Y_1Y_2Y_3(Y)$ и опорную $O_1X_1X_2X_3(X)$, совпадающие в начальном положении. Конечное перемещение связанной системы координат Y относительно опорной X будем характеризовать дуальным вектором конечного винтового перемещения [1]

$$\boldsymbol{\Theta} = 2\mathbf{E}\,\mathrm{tg}\,(\Phi/2)$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичный винт оси ab винтового перемещения, $\Phi = \varphi + s\varphi^\circ$ — дуальный угол поворота тела, φ — обычный угол поворота тела вокруг оси ab, φ° — поступательное перемещение тела вдоль этой оси, s — символ Клиффорда, $s^2 = 0$.

Винту перемещения $\boldsymbol{\Theta}$ поставим в соответствие собственный бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}$, т. е. такой бикватернион [1, 2], компонентами которого являются дуальные параметры Родрига—Гамильтона Λ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0\mathbf{1} + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3$$

Здесь $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства [3], а величины Λ_j являются дуальными аналогами вещественных параметров Родрига—Гамильтона [3-5] и определяются соотношениями

$$\Lambda_0 = \cos\,(\Phi / 2), \quad \Lambda_i = \sin\,(\Phi / 2)\cos\Gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

в которых $\Gamma_i = \gamma_i + s\gamma_i^\circ$ — дуальный угол между осью винта $\boldsymbol{\Theta}$ и осью O_1X_i (O_2Y_i) [1], γ_i — обычный угол между осями ab и O_1X_i, γ_i° — кратчайшее расстояние между осями ab и O_1X_i.

Используя выражения тригонометрических функций дуального угла [1], параметры Λ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ представим в виде комплексных комбинаций вещественных величин λ_j и λ_j° $(j = 0, 1, 2, 3)$

$$\Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^\circ \quad (j = 0, 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Здесь λ_j — вещественные параметры Родрига — Гамильтона, определяемые соотношениями [3-5]

$$\lambda_0 = \cos(\varphi / 2), \qquad \lambda_i = \sin(\varphi / 2) \cos \gamma_i \ (i = 1, 2, 3)$$

Величины $\lambda_j{}^\circ$ выражаются соотношениями

$$(1.2) \qquad \lambda_0{}^\circ = \varphi^\circ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}\varphi^\circ \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\lambda_i{}^\circ = \varphi^\circ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varphi} + \gamma_i{}^\circ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \gamma_i} = \frac{1}{2}\varphi^\circ \cos\frac{\varphi}{2}\cos\gamma_i - \gamma_i{}^\circ \sin\frac{\varphi}{2}\sin\gamma_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Величины λ_j, $\lambda_j{}^\circ$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ условимся называть параметрами винтового движения твердого тела.

С учетом равенств (1.1) собственный бикватернион Λ принимает вид

$$\Lambda = \lambda + s\lambda^\circ, \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_v, \quad \lambda_v = \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$$

$$\lambda^\circ = \lambda_0{}^\circ + \lambda_v{}^\circ, \quad \lambda_v{}^\circ = \lambda_1{}^\circ \mathbf{i}_1 + \lambda_2{}^\circ \mathbf{i}_2 + \lambda_3{}^\circ \mathbf{i}_3$$

Здесь λ, λ° — собственные кватернионы. Мóтор мгновенного винта скоростей $\mathbf{U}$ (кинематического винта) твердого тела, отнесенный к полюсу O_2 (в его качестве может быть взят, например, центр масс тела), равен дуальному вектору $\omega + s\mathbf{v}$ [1]. Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости движения точки O_2 тела относительно базиса X, ω — вектор угловой скорости вращения тела в базисе X. Поэтому дуальные ортогональные проекции U_i $(i = 1, 2, 3)$ кинематического винта $\mathbf{U}$ на оси связанной системы координат имеют вид

$$(1.3) \qquad U_i = \omega_i + s v_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

где ω_i, v_i — проекции векторов ω и $\mathbf{v}$ на связанную ось O_2Y_i.

Для получения кинематических уравнений винтового движения твердого тела, устанавливающих зависимости между дуальными параметрами Родрига — Гамильтона, их производными и дуальными ортогональными проекциями кинематического винта на оси связанного трехгранника, применим к кинематическим уравнениям сферического движения тела в вещественных параметрах Родрига — Гамильтона [3-5] принцип перенесения Котельникова — Штуди [1]. Полученные таким образом уравнения запишем в двух эквивалентных матричных формах

$$(1.4) \qquad 2\Theta^\cdot = N_u \Theta, \quad 2N^\cdot = N_u N$$

$$\Theta^T = \| \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \|, \quad \Theta^{\cdot T} = \| \Lambda_0{}^\cdot, \Lambda_1{}^\cdot, \Lambda_2{}^\cdot, \Lambda_3{}^\cdot \|$$

$$N = \begin{Vmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_3 & -\Lambda_2 \\ \Lambda_2 & -\Lambda_3 & \Lambda_0 & \Lambda_1 \\ \Lambda_3 & \Lambda_2 & -\Lambda_1 & \Lambda_0 \end{Vmatrix}, \qquad N_u = \begin{Vmatrix} 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ U_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ U_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ U_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t, индекс T является символом транспонирования.

Кинематические уравнения (1.4) винтового движения тела представляют собой дуальные матричные линейные однородные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Перейдем в первом уравнении (1.4) от дуальных параметров Родрига — Гамильтона к вещественным параметрам винтового движения тела, воспользовавшись равенствами (1.1) и (1.3). В результате это дуальное уравнение распадается на два вещественных

$$(1.5)\qquad 2\theta^{\cdot} = n_\omega\theta,\quad 2\theta^{\circ\cdot} = n_\omega\theta^\circ + n_v\theta$$
$$\theta^T = \|\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\|,\quad \theta^{\circ T} = \|\lambda_0^\circ, \lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \lambda_3^\circ\|$$

Здесь матрицы n_ω и n_v имеют структуру матрицы N_u и составлены из проекций ω_i и v_i ($i = 1, 2, 3$) векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ на связанный базис.

Первое уравнение (1.5) является матричным кинематическим уравнением сферического движения тела вокруг точки O_2 в вещественных параметрах Родрига — Гамильтона. Оно не зависит от второго уравнения. Второе уравнение (1.5) зависит от первого и в отличие от него является неоднородным, характеризуя поступательное движение тела вместе с полюсом O_2.

Уравнения (1.5), а также каждое из дуальных уравнений (1.4) позволяют находить по заданным проекциям векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ на связанный базис и по заданным начальным условиям параметры λ_j, λ_j° винтового движения тела. Параметры Родрига — Гамильтона λ_j характеризуют ориентацию тела в опорной системе координат, а для определения поступательного движения тела необходимо воспользоваться следующими формулами:

$$(1.6)\qquad x_i, y_i = 2\left(\lambda_0\lambda_i^\circ - \lambda_0^\circ\lambda_i \pm \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\lambda_j\lambda_k^\circ\right)\quad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь x_i и y_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала O_1 системы координат X в полюс O_2, на оси опорного X и связанного Y базисов; ε_{ijk} — символ Леви-Чивита [4]; знак плюс соответствует x_i, минус — y_i.

Представим формулы (1.6) в кватернионной записи

$$(1.7)\qquad \mathbf{r}_X = 2\lambda^\circ\circ\lambda^* = 2(\lambda_0\boldsymbol{\lambda}_v^\circ - \lambda_0^\circ\boldsymbol{\lambda}_v + \boldsymbol{\lambda}_v\times\boldsymbol{\lambda}_v^\circ)$$
$$\mathbf{r}_Y = 2\lambda^*\circ\lambda^\circ = 2(\lambda_0\boldsymbol{\lambda}_v^\circ - \lambda_0^\circ\boldsymbol{\lambda}_v - \boldsymbol{\lambda}_v\times\boldsymbol{\lambda}_v^\circ)$$

Здесь $\mathbf{r}_X = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{r}_Y = y_1\mathbf{i}_1 + y_2\mathbf{i}_2 + y_3\mathbf{i}_3$ — гиперкомплексные отображения вектора $\mathbf{r}$ на опорный и связанный базисы [3]; кватернион λ^* является сопряженным кватерниону λ : $\lambda^* = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}_v$; знак $\circ$ означает кватернионное умножение; $\boldsymbol{\lambda}_v$ и $\boldsymbol{\lambda}_v^\circ$ — векторные части кватернионов λ и λ°; скалярные части кватернионов $\lambda^\circ\circ\lambda^*$ и $\lambda^*\circ\lambda^\circ$ равны нулю, так как $\lambda_0\lambda_0^\circ + \lambda_1\lambda_1^\circ + \lambda_2\lambda_2^\circ + \lambda_3\lambda_3^\circ = 0$.

2. Докажем формулы (1.7). Конечное перемещение тела эквивалентно одной из двух последовательностей перемещений (фигура):

1) последовательности поступательного перемещения тела со скоростью полюса O_2, характеризуемого винтом $\boldsymbol{\Theta}_p = 2\mathbf{E}_p\,\mathrm{tg}\,(\Phi_p/2) = 2\mathbf{E}_p\,\mathrm{tg}\,\times$ $\times\,(s\varphi_p^\circ/2)$, и сферического движения тела вокруг полюса O_2, характеризуемого винтом $\boldsymbol{\Theta}_h = 2\mathbf{E}_h\,\mathrm{tg}\,(\Phi_h/2) = 2\mathbf{E}_h\,\mathrm{tg}\,(\varphi_h/2)$;

2) последовательности сферического движения тела вокруг полюса O_2, характеризуемого винтом $\boldsymbol{\Theta}_h' = 2\mathbf{E}_h'\,\mathrm{tg}\,(\varphi_h/2)$, и поступательного перемещения тела, характеризуемого винтом $\boldsymbol{\Theta}_p$.

Сказанное проиллюстрируем условной схемой

$$X \xrightarrow{\Theta} Y \backsim X \xrightarrow{\Theta_p} Y'' \xrightarrow{\Theta_h} Y \backsim X \xrightarrow{\Theta_h'} Y^* \xrightarrow{\Theta_p} Y$$

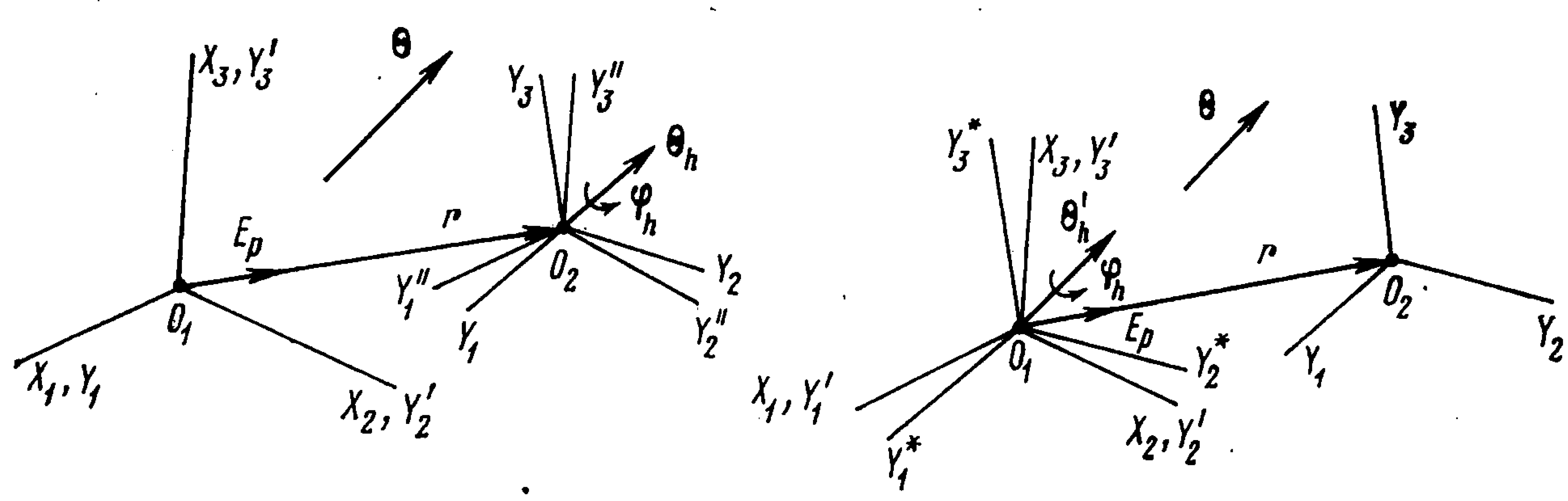
Здесь символ $\backsim$ означает знак эквивалентности.

Винтам $\mathbf{\Theta}_p$, $\mathbf{\Theta}_h$ для первой последовательности перемещений и винтам $\mathbf{\Theta}_h'$, $\mathbf{\Theta}_p$ для второй последовательности перемещений поставим в соответствие собственные бикватернионы $\mathbf{P}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$, $\mathbf{P}'$

$$\mathbf{P} = 1 + s\mathbf{p}^\circ, \quad \mathbf{P}' = 1 + s\mathbf{p}^{\circ\prime}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{h}'$$

$$\mathbf{z} = z_0 + z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3; \quad \mathbf{z} = \mathbf{p}^\circ, \mathbf{p}^{\circ\prime}, \mathbf{h}, \mathbf{h}'$$

В силу принципа перенесения Котельникова — Штуди [1] собственный бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ результирующего конечного перемещения определяется через собственные бикватернионы составляющих перемещений по правилу,



являющемуся дуальным аналогом правила нахождения собственного кватерниона результирующего поворота по собственным кватернионам составляющих поворотов [3]. Поэтому имеем $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P} \circ \mathbf{H} = \mathbf{H}' \circ \mathbf{P}'$, следовательно,

$$\boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^\circ = (1 + s\mathbf{p}^\circ) \circ \mathbf{h} = \mathbf{h}' \circ (1 + s\mathbf{p}^{\circ\prime})$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}' = \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{p}^\circ = \boldsymbol{\lambda}^\circ \circ \boldsymbol{\lambda}^*, \quad \mathbf{p}^{\circ\prime} = \boldsymbol{\lambda}^* \circ \boldsymbol{\lambda}^\circ \tag{2.1}$$

Компоненты p_j° и $p_j^{\circ\prime}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ кватернионов $\mathbf{p}^\circ$ и $\mathbf{p}^{\circ\prime}$ находятся из формул, аналогичных формулам (1.2). При этом следует иметь в виду, что для рассматриваемого перемещения $\mathbf{\Theta}_p$ поступательное перемещение $\varphi_p^\circ = r$, угол поворота φ_p и кратчайшее расстояние β_i° $(\beta_i^{\circ\prime})$ между осью O_1X_i (O_2Y_i) и осью винта $\mathbf{\Theta}_p$ равны нулю, а направляющие косинусы $\cos \beta_i$ и $\cos \beta_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ оси винта $\mathbf{\Theta}_p$ в осях опорного X и связанного Y базисов равны соответствующим направляющим косинусам вектора $\mathbf{r}$ в этих же базисах, так как ось винта $\mathbf{\Theta}_p$ проходит через начала систем координат X и Y и совпадает с прямой, на которой лежит вектор $\mathbf{r}$. Поэтому

$$\mathbf{p}^\circ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} x_k\mathbf{i}_k, \quad \mathbf{p}^{\circ\prime} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} y_k\mathbf{i}_k \tag{2.2}$$

$$x_k = r\cos\beta_k, \quad y_k = r\cos\beta_k'$$

Из выражений (2.2) видно, что гиперкомплексные отображения $\mathbf{r}_X$ и $\mathbf{r}_Y$ вектора $\mathbf{r}$ связаны с кватернионами $\mathbf{p}^\circ$ и $\mathbf{p}^{\circ\prime}$ равенствами $\mathbf{r}_X = 2\mathbf{p}^\circ$, $\mathbf{r}_Y = 2\mathbf{p}^{\circ\prime}$. Тогда, учитывая соотношения (2.1), получаем формулы (1.7).

Заметим, что, установив одно из гиперкомплексных отображений вектора $\mathbf{r}$, например, $\mathbf{r}_X$, другое его гиперкомплексное отображение $\mathbf{r}_Y$ можно найти, пользуясь следующим правилом преобразования координат неизменного вектора на опорный и связанный базисы [3]:

$$\mathbf{r}_Y = \lambda^* \circ \mathbf{r}_X \circ \lambda$$

Подставив в это соотношение равенство $\mathbf{r}_X = 2\lambda^\circ \circ \lambda^*$, приходим к выражению для $\mathbf{r}_Y$, совпадающему с найденным вторым выражением в (1.7).

3. Рассмотрим интегрирование первого матричного дуального кинематического уравнения (1.4) винтового движения тела. В этом уравнении элементы $U_i = \omega_i + sv_i$ дуальной матрицы коэффициентов N_u полагаем известными функциями времени, так как проекции ω_i, v_i векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ на оси, связанные с телом, могут либо измеряться, либо вырабатываться, например, навигационной системой.

Для первого уравнения (1.5) в работе [6] указана структура общего решения. На основании принципа перенесения Котельникова — Штуди распространим этот результат на первое уравнение (1.4), являющееся дуальным аналогом первого уравнения (1.5). В результате получаем, что структура общего решения $\Theta = \Theta(t)$ первого уравнения (1.4) такова:

$$\Theta = N^+\Theta_0 \tag{3.1}$$

Здесь $\Theta_0^T = \Theta^T(t_0) = \| \Lambda_{00}, \Lambda_{10}, \Lambda_{20}, \Lambda_{30} \|^T$, а матрица N^+ является матрицантом второго дуального матричного уравнения (1.4). Она построена из элементов Λ_j^+ ($j = 0, 1, 2, 3$) и имеет структуру матрицы N.

Применяя принцип перенесения Котельникова—Штуди к другому результату работы [6], касающемуся интегрируемости первого уравнения (1.5), устанавливаем, что первое уравнение (1.4) интегрируется в квадратурах в случае, когда кинематический винт

$$\mathbf{U} = F(t)\,[D_1\mathbf{E}_1' + Q_1(\cos(A+B)\,\mathbf{E}_2' + \sin(A+B)\,\mathbf{E}_3')] \tag{3.2}$$

$$A(t) = A_1 \int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$$

Здесь $\mathbf{E}_i'$ ($i = 1, 2, 3$) — единичные винты связанной системы координат; $D_1 = d_1 + sd_1^\circ$, $Q_1 = q_1 + sq_1^\circ$, $A_1 = \alpha_1 + s\alpha_1^\circ$, $B = \beta + s\beta^\circ$ — некоторые дуальные постоянные; $F(t) = f(t) + sf^\circ(t)$ — произвольная дуальная функция времени, ограниченная и интегрируемая на рассматриваемом отрезке времени $[t_1, t_2]$.

Кинематическому винту вида (3.2) соответствуют вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения тела и вектор $\mathbf{v}$ скорости полюса O_2, имеющие вид ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — орты связанного трехгранника)

$$\boldsymbol{\omega} = f(t)[d_1\mathbf{e}_1' + q_1(\mathbf{e}_2'\cos\tau + \mathbf{e}_3'\sin\tau)]$$

$$\mathbf{v} = a'\mathbf{e}_1' + (b'\cos\tau - c'\sin\tau)\mathbf{e}_2' + (b'\sin\tau + c'\cos\tau)\mathbf{e}_3'$$

$$a'(t) = d_1^\circ f(t) + d_1 f^\circ(t),\quad b'(t) = q_1^\circ f(t) + q_1 f^\circ(t)$$

$$\tau(t) = \alpha_1 \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + \beta,\quad c'(t) =$$

$$= q_1 f(t)\left[\alpha_1^\circ \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + \alpha_1 \int_{t_0}^{t} f^\circ(t)\,dt + \beta^\circ\right]$$

Общее решение первого уравнения (1.4) для кинематического винта вида (3.2) выражается соотношением (3.1), в котором элементы Λ_j^+ ($j = 0, 1, 2, 3$) матрицы N^+ имеют вид

$$\Lambda_0^+ = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{K}{2} + \frac{D_1 + A_1}{U'}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{K}{2} \tag{3.3}$$

$$\Lambda_1^+ = \frac{D_1 + A_1}{U'}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{K}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{K}{2}$$

$$\Lambda_2^+ = \frac{Q_1}{U'}\cos\left(\frac{A}{2} + B\right)\sin\frac{K}{2}, \quad \Lambda_3^+ = \frac{Q_1}{U'}\sin\left(\frac{A}{2} + B\right)\sin\frac{K}{2}$$

$$K = U'\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt, \quad U' = [(D_1 + A_1)^2 + Q_1^2]^{1/2}$$

Это общее решение является дуальным аналогом полученного в [6] общего решения первого уравнения (1.5).

Частными случаями интегрируемости первого уравнения (1.4) являются следующие.

1) Кинематический винт $\mathbf{U}$ тела совершает относительно связанной системы координат коническое движение.

Этот случай будет иметь место, если в выражении (3.2) кинематического винта положить $F(t) = 0$, $B = 0$. Тогда

$$\mathbf{U} = D_1\mathbf{E}_1' + Q_1\{\cos[A_1(t - t_0)]\mathbf{E}_2' + \sin[A_1(t - t_0)]\mathbf{E}_3'\}$$

$$\boldsymbol{\omega} = d_1\mathbf{e}_1' + q_1\{\cos[\alpha_1(t - t_0)]\mathbf{e}_2' + \sin[\alpha_1(t - t_0)]\mathbf{e}_3'\}$$

$$\mathbf{v} = d_1^\circ\mathbf{e}_1' + \{q_1^\circ\cos[\alpha_1(t - t_0)] - q_1\alpha_1^\circ(t - t_0)\sin[\alpha_1(t - t_0)]\}\mathbf{e}_2' + $$
$$+ \{q_1^\circ\sin[\alpha_1(t - t_0)] + q_1\alpha_1^\circ(t - t_0)\cos[\alpha_1(t - t_0)]\}\mathbf{e}_3'$$

Для получения общего решения первого уравнения (1.4) в соотношениях (3.3) следует также положить $F(t) = 1$, $B = 0$.

2) Кинематический винт $\mathbf{U}$ тела сохраняет неизменным свое положение в связанной системе координат, изменяясь по модулю.

Выражение кинематического винта $\mathbf{U}$ в этом случае получается из (3.2) при $A_1 = 0$:

$$\mathbf{U} = F(t)\{D_1\mathbf{E}_1' + Q_1[\mathbf{E}_2'\cos B + \mathbf{E}_3'\sin B]\} \tag{3.4}$$

Этому кинематическому винту соответствуют вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела и вектор $\mathbf{v}$ скорости полюса O_2 этого тела, имеющие вид

$$\boldsymbol{\omega} = f(t)[d_1\mathbf{e}_1' + q_1(\mathbf{e}_2'\cos\beta + \mathbf{e}_3'\sin\beta)] \tag{3.5}$$

$$\mathbf{v} = [d_1^\circ f(t) + d_1 f^\circ(t)]\mathbf{e}_1' + (a'\cos\beta - b'\sin\beta)\mathbf{e}_2' + (a'\sin\beta +$$
$$+ b'\cos\beta)\mathbf{e}_3'$$

$$a'(t) = q_1^\circ f(t) + q_1 f^\circ(t), \quad b'(t) = q_1\beta^\circ f(t)$$

Рассмотрим подробнее условия, накладываемые на векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$, при выполнении которых кинематический винт тела сохраняет свое положение в связанном базисе неизменным, но может изменять свой модуль.

Дуальные направляющие косинусы винта $\mathbf{U}$ вида (3.4) в осях связанного базиса определяются равенствами

$$\cos B_i = U_i/U = C_i = c_i + sc_i^\circ \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.6}$$

Здесь $U = (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)^{1/2}$ — дуальный модуль винта $\mathbf{U}$, C_i — дуальные постоянные, которые выражаются через дуальные постоянные D_1, Q_1, B; c_i и c_i° — вещественные постоянные, определяющиеся через постоянные d_1, q_1, β, d_1°, q_1°, β°.

Из соотношений (3.6) и (1.3) получим

$$\cos B_i = c_i + sc_i^\circ = \omega^{-1}\omega_i + s[\omega^{-1}v_i - \omega^{-3}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})\,\omega_i], \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}| \neq 0 \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.7) находим

$$\omega^{-1}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{c}, \quad \omega^{-1}\mathbf{v} - \omega^{-3}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{c}^\circ \tag{3.8}$$

Здесь $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}^\circ$ — неизменные в связанной системе координат векторы, проекции которых на оси этого базиса равны величинам c_i и c_i° ($i = 1, 2, 3$).

Умножая обе части второго уравнения (3.8) скалярно на вектор $\boldsymbol{\omega}$, найдем $\mathbf{c}^\circ\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$. Так как в общем случае $|\mathbf{c}^\circ| \neq 0$ и $|\boldsymbol{\omega}| \neq 0$, то отсюда следует, что векторы $\mathbf{c}^\circ$ и $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярны.

Построим вектор

$$\omega^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{c}^\circ + \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \omega^{-3}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})\,\boldsymbol{\omega}$$

Вектор $\mathbf{c}^\circ$ постоянен по величине и сохраняет свое направление в связанном базисе неизменным. Вектор $\boldsymbol{\eta}$ постоянен в этом базисе по направлению, но переменен по модулю. Годографом вектора $\omega^{-1}\mathbf{v}$ является прямая линия, параллельная вектору $\boldsymbol{\omega}$ и лежащая в плоскости, образованной векторами $\mathbf{c}^\circ$ и $\boldsymbol{\eta}$ ($\boldsymbol{\omega}$). Эта плоскость неподвижна относительно связанной системы координат. Вектор $\mathbf{v}$, совпадающий по направлению с вектором $\omega^{-1}\mathbf{v}$, в общем случае меняет свою ориентацию относительно связанной системы координат.

Таким образом, для того чтобы кинематический винт $\mathbf{U}$ тела сохранял свое положение в связанной системе координат неизменным, но мог меняться по модулю, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела сохранял свое направление в связанной системе координат неизменным, т. е. чтобы выполнялось первое равенство (3.8) и чтобы вектор $\mathbf{v}$ скорости полюса O_2 тела удовлетворял второму уравнению (3.8), в котором $\mathbf{c}^\circ$ — некоторый постоянный в связанной системе координат вектор, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{\omega}$. Годограф вектора $\omega^{-1}\mathbf{v}$ представляет собой в этом случае прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{\omega}$, а вектор $\mathbf{v}$ в отличие от вектора $\boldsymbol{\omega}$ может менять не только свой модуль, но и направление по отношению к связанному трехграннику.

Отметим, что для выполнения условий (3.8) достаточно, чтобы векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ сохраняли свою ориентацию в связанном базисе неизменной, а их модули были бы прямо пропорциональны. Выражения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ для этого частного случая получаются из формул (3.5) при $f(t) = f^\circ(t)$.

Общее решение первого уравнения (1.4) для кинематического винта вида (3.4) выражается соотношением (3.1). Дуальные элементы Λ_j^+ матрицы N^+, входящей в это соотношение, получаются из формул (3.3) при $A_1 = 0$.

Переходя от дуальных величин к вещественным, получаем, что вещественные параметры Родрига — Гамильтона, характеризующие ориентацию тела в опорном базисе, в рассматриваемом случае определяются матричным соотношением

$$\|\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\|^T = \|\lambda_{00}, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}\|\, n^{+T}$$

в котором матрица n^+ составлена из элементов

$$\lambda_0^+ = \cos\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega\,dt, \quad \lambda_i^+ = \omega^{-1}\omega_i\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega\,dt \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.9}$$

Моментные части $\lambda_j^{\circ+}$ дуальных параметров Λ_j^+, характеризующие поступательное движение тела, имеют вид

$$\lambda_0^{\circ+} = -{}^1/_2\,\varphi^\circ\sin(\varphi/2) \tag{3.10}$$

$$\lambda_i^{0+} = {}^1/_2\,\varphi^\circ\omega^{-1}\omega_i\cos(\varphi/2) + [\omega^{-1}v_i - \omega^{-3}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})\,\omega_i]\sin(\varphi/2)$$

$$\varphi = \int_{t_0}^{t}\omega\,dt, \quad \varphi^\circ = \int_{t_0}^{t}\omega^{-1}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})\,dt$$

Пользуясь второй формулой (1.7) и правилом нахождения собственного бикватерниона результирующего перемещения через собственные бикватернионы составляющих перемещений, найдем, что

$$r_Y = r_{0Y} + 2\lambda^{+*} \circ \lambda^{\circ +} \tag{3.11}$$

Здесь r_{0Y} — гиперкомплексное отображение вектора $r_0 = r(t_0)$ на связанный базис; λ^+ и $\lambda^{\circ +}$ — кватернионы, компонентами которых являются величины $\lambda_j{}^+$ и $\lambda_j{}^{\circ +}$ ($j =$ 0, 1, 2, 3).

Как следует из соотношений (3.9), (3.10), векторные части кватернионов λ^+, $\lambda^{\circ +}$ определены в связанном базисе. В этом же базисе определены гиперкомплексные отображения r_Y и r_{0Y}. Поэтому орты i_1, i_2, i_3 гиперкомплексного пространства можно совместить с ортами связанного базиса. Равенство (3.11) при этом перейдет в обычное векторное. Преобразуя его с учетом выражений (3.8) — (3.10), получим

$$r = r_0 + \varphi^\circ c + \sin\varphi c^\circ + 2\sin^2(\varphi/2)\, c^\circ \times c \tag{3.12}$$

Таким образом, движение твердого тела в случае, когда его кинематический винт U имеет вид (3.4), т. е. когда векторы ω и v удовлетворяют условиям (3.8), описывается уравнениями (3.9) и (3.12).

Поступила 19 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М., «Наука», 1978.
2. *Котельников А. П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
5. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., «Наука», 1976.
6. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига — Гамильтона по его угловой скорости. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3.