

УПРАВЛЯЕМЫЙ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Приводится формулировка и решение некоторых задач управления движением, которые можно назвать задачами поиска подвижного объекта. Определяется такое управление движением первого объекта, при котором он находит второй управляемый объект, движение которого ему неизвестно. Устанавливаются условия, гарантирующие успешное завершение поиска. Близкие задачи в рамках дифференциальных игр со смешанными стратегиями рассматривались, например, в [1-3]; в данной работе используется гарантирующий подход.

1. Рассмотрим движение двух управляемых объектов X, Y , описываемых уравнениями и начальными условиями

$$(1.1) \quad X: \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x^0; \quad Y: \dot{y} = v, \quad y(t_0) = y^0$$

Здесь x, y — n -мерные фазовые векторы объектов, u, v — их скорости, точкой обозначены производные по времени t , а t_0, x^0, y^0 — начальные данные. Объекты X, Y могут выбирать свои скорости $u(t), v(t)$ при $t \geq t_0$ так, чтобы удовлетворялись следующие ограничения: а) функции $u(t), v(t)$ кусочно-непрерывны при $t \geq t_0$; б) при всех $t \geq t_0$ выполнены включения

$$(1.2) \quad u(t) \in Q_x(x(t), t), \quad v(t) \in Q_y(y(t), t)$$

отражающие структуру правых частей уравнений (1.1) и ограничения на управление объектов; в) движения объектов при $t \geq t_0$ удовлетворяют ограничениям

$$(1.3) \quad x(t) \in D_x, \quad y(t) \in D_y$$

Здесь $Q_x(x, t), Q_y(y, t)$ — заданные замкнутые множества в n -мерном пространстве, причем Q_x, Q_y могут зависеть от x, t . Начальные данные (1.1) удовлетворяют условиям $x^0 \in D_x, y^0 \in D_y$.

При рассмотрении конкретных задач будем считать, что Q_x, Q_y — сферы с центром в начале координат, а множества D_x, D_y совпадают. Тогда ограничения (1.2) будут иметь вид

$$(1.4) \quad |u(t)| \leq U, \quad |v(t)| \leq V$$

где U, V — постоянные, равные максимально возможным скоростям объектов X, Y .

Ограничения (1.3) примут вид

$$(1.5) \quad x(t) \in D, \quad y(t) \in D, \quad t \geq t_0$$

где D — заданная замкнутая область в n -мерном пространстве, в которой могут двигаться оба объекта.

Управления $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие наложенным условиям а) — в), будем называть допустимыми. Каждому допустимому управлению $u(t)$ или $v(t)$ отвечает допустимая кусочно-гладкая траектория $x(t)$ или $y(t)$.

Предполагаем, что объект X может наблюдать объект Y в момент t в том и только в том случае, когда выполнено условие наблюдения

$$(1.6) \quad \{x(t), y(t)\} \in M$$

где M — заданное множество в $2n$ -мерном пространстве. Приведем два примера условия (1.6), отражающих реальные ограничения на возможности наблюдения.

а) Пусть наблюдение возможно, лишь если объекты сблизилась на заданное расстояние l . Тогда условие (1.6) имеет вид

$$(1.7) \quad |x(t) - y(t)| \leq l$$

б) Пусть в n -мерном фазовом пространстве задано непроницаемое для наблюдения множество $E(t)$, которое может зависеть от времени (совокупность экранов, возможно перемещающихся или изменяющих форму). Наблюдение возможно лишь в пределах прямой видимости, т. е. тогда, когда внутренность отрезка XY , соединяющего точки $x(t)$, $y(t)$, не имеет общих точек с экраном E . Условие (1.6) примет вид (0 — пустое множество)

$$(1.8) \quad (X(t)Y(t)) \cap E(t) = 0$$

Сформулируем задачу поиска объектом X объекта Y .

Задача 1. Найти начальный вектор $x^0 \in D_x$, число $T > t_0$ и допустимое управление $u(t)$ объекта X на отрезке $[t_0, T]$, для которых при любом начальном векторе $y^0 \in D_y$ и любом допустимом управлении $v(t)$ объекта Y на отрезке $[t_0, T]$ гарантируется выполнение условия (1.6) в некоторый момент $t \in [t_0, T]$.

Отметим, что объект X должен выбрать свое управление $u(t)$ в виде программы, опираясь лишь на знание областей Q_x , Q_y , D_x , D_y , M из (1.2), (1.3), (1.6) и не имея информации ни об управлении $v(t)$ объекта Y , ни о его начальном или текущем фазовом состоянии. Очевидно, управление, решающее поставленную задачу, будет обеспечивать нахождение любого (конечного или бесконечного) числа объектов Y , отличающихся начальными данными y^0 и допустимыми управлениями $v(t)$.

Поставленная задача 1 есть задача гарантированного поиска; ранее подобные задачи (игры типа «принцесса и чудовище», см. [1]) рассматривались в рамках смешанных стратегий [2, 3]. Задача 1, как правило, либо не имеет решения, либо имеет бесчисленное множество решений. Для выделения единственного решения естественно наложить еще требование оптимальности некоторого функционала, например времени поиска.

Задача 2. Найти начальный вектор $x^0 \in D_x$ и допустимое управление $u(t)$, при которых задача 1 имеет решение с минимально возможным T .

Ниже получено решение ряда характерных конкретных задач поиска.

2. Рассмотрим задачу поиска в плоскости ($n = 2$) при ограничениях (1.4), (1.5) и условии окончания поиска (1.7). Область D в (1.5) предполагаем ограниченной, замкнутой и выпуклой; ее границу обозначим через Γ . Опишем сначала предлагаемый способ управления, а затем укажем условия на входящие в него параметры, при которых решается задача 1.

Найдем направление в плоскости движения, на которое область D имеет проекцию, минимальную по длине среди всех направлений. Выберем декартову систему координат Ox_1x_2 , так, чтобы ось Ox_1 была ориентирована по указанному направлению и чтобы область D лежала в полосе $0 \leq x_1 \leq d$, где d — величина минимальной проекции области D . Каждая из прямых $x_1 = 0$, $x_1 = d$ содержит по построению хотя бы одну точку границы Γ . Точки Γ , лежащие на прямых $x_1 = 0$ и $x_1 = d$, образуют отрезки Γ_0 и Γ_1 соответственно (возможно, нулевой длины).

Докажем, что существует прямая $x_2 = \text{const}$, пересекающая оба отрезка Γ_0 , Γ_1 . В противном случае можно было бы указать прямую $x_2 = \text{const}$, такую, что отрезки Γ_0 , Γ_1 лежат по разные стороны от нее. Но тогда

можно повернуть область D вокруг некоторой точки этой прямой так, что вся область окажется строго внутри полосы $0 \leq x_1 \leq d$, а это противоречит тому, что d — минимальная проекция области D .

Прямую $x_2 = \text{const}$, пересекающую оба отрезка Γ_0 , Γ_1 , выберем в качестве оси Ox_2 , тогда $O \in \Gamma$ (фиг. 1). Указанный выбор системы координат сводится к поворотам и переносам, не изменяет соотношений (1.1), (1.4), (1.7), и поэтому не нарушает общности.

Возьмем в качестве A_0, A_* такие точки на Γ , которые имеют наибольшую и наименьшую координаты x_2 , равные соответственно x_2^-, x_2^+ (выбор этих точек может быть не единственным). Область D может быть задан неравенствами

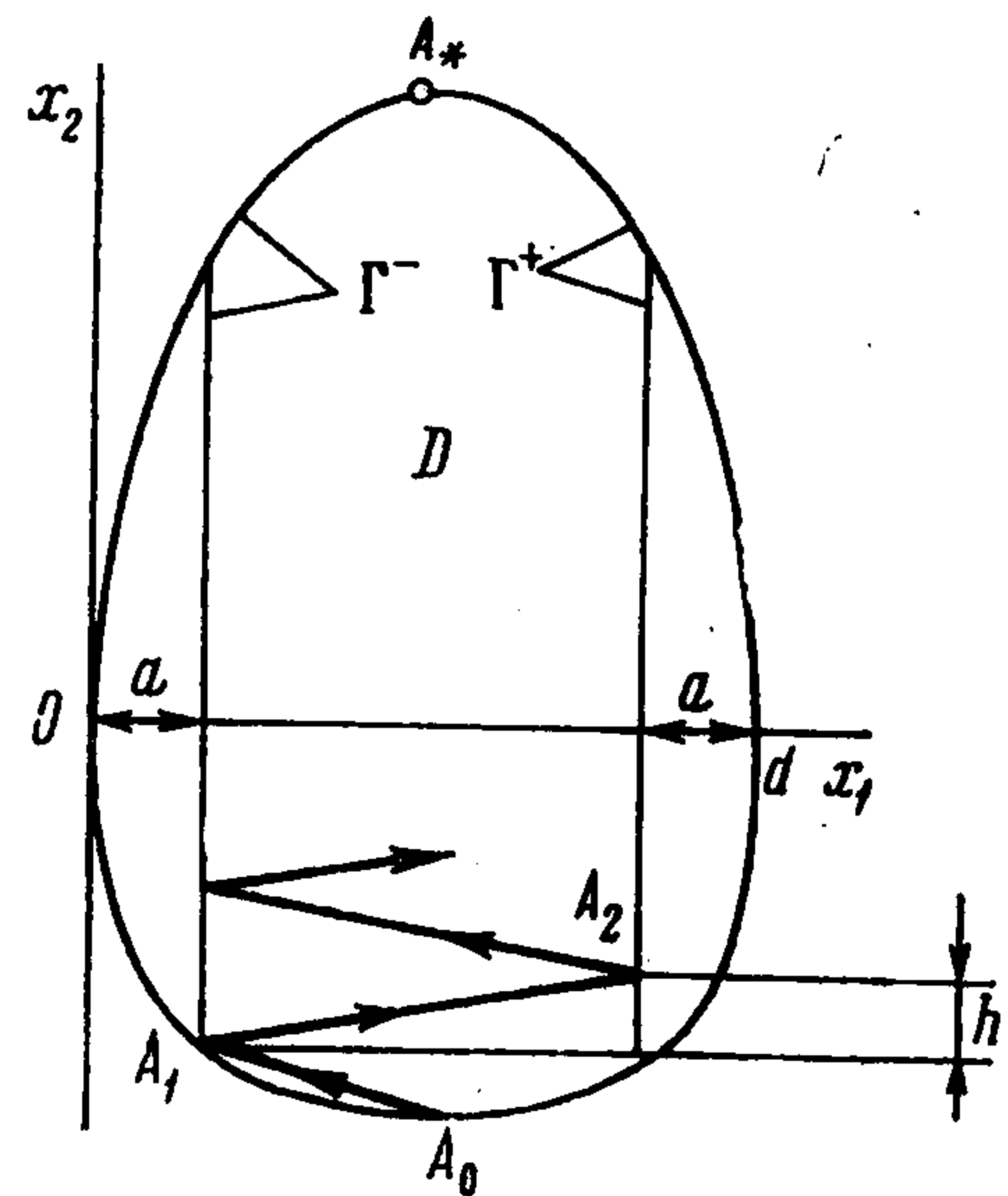
$$(2.1) \quad 0 \leq f^-(x_2) \leq x_1 \leq f^+(x_2) \leq d, \quad x_2^- \leq x_2 \leq x_2^+$$

где f^-, f^+ — непрерывные в интервале (x_2^-, x_2^+) функции, задающие две ветви границы Γ .

Зададимся положительными числами a, h , такими, что $a \leq l$, $a \leq d/2$, а h достаточно мало; эти числа конкретизируются ниже. Определим кривые Γ^-, Γ^+ соотношениями

$$(2.2) \quad \Gamma^\pm: x_1 = f^\pm(x_2) \pm F(x_2), \quad x_2^- < x_2 < x_2^+ \\ F(x_2) = \max \{0, a + [f^+(x_2) - f^-(x_2) - d] / 2\}$$

Кривые Γ^-, Γ^+ лежат в области D и отстоят от соответствующих ветвей (2.1) границы Γ не более, чем на a . Расстояние между Γ^- и Γ^+ по оси x_1 лежит в пределах $[0, d - 2a]$.



Фиг. 1

Построим ломаную $A_0A_1\dots A_N$, где $A_N = A_*$, нечетные вершины A_1, A_3, \dots лежат на Γ^- , а четные A_2, A_4, \dots — на Γ^+ . Координаты x_2 точек A_i возрастают с номером i на величину h , а при переходе от A_{N-1} к A_N — не более, чем на h . Данная ломаная определяет траекторию движения точки X ; величину скорости движения зададим максимальной $|u(t)| = U$. Точка X , таким образом, осуществляет сканирование области D с шагом по оси x_2 , равным h , оставляя с каждой стороны области «поля» шириной $F(x_2) \leq a$ (фиг. 1). Ширина «полей» равна a только там, где $f^- = 0, f^+ = d$, что следует из (2.1), (2.2). В частности, она равна a при $x_2 = 0$, так как система координат выбрана так, что $f^-(0) = 0, f^+(0) = d$.

3. Перейдем к определению параметров a, h , для чего рассмотрим сначала случай прямоугольной области D , когда $f^- \equiv 0, f^+ \equiv d$ в (2.1). Положим также $h = 0$ и рассмотрим движение точки X по отрезку $[a, d - 2a]$ оси x_1 со скоростью U , причем направление скорости меняется на противоположное на концах отрезка.

Выясним, при каких условиях объект Y может пересечь ось x_1 , избежав наблюдения, т. е. сближения на расстояние l с точкой X . Видно, что объекту Y легче всего пересечь ось x_1 незамеченным, двигаясь по границе Γ , так как при этом он будет располагать наибольшим временем, равным $-2(d - 2a)/U$, до очередного возвращения объекта X на границу отрезка.

Итак, пусть в начальный момент $t = 0$ объект Y занимает положение $y_1 = 0, y_2 < -(l^2 - a^2)^{1/2}$ вне l -окрестности объекта X и должен, двигаясь по оси y_2 , достигнуть точки $y_1 = 0, y_2 > (l^2 - a^2)^{1/2}$ за время $2(d - 2a)/U$, оставаясь все время вне окрестности (1.7). Очевидно, что достаточно построить движение объекта Y на интервале времени $[0, (d - 2a)/U]$, позволяющее ему избежать наблюдения и достигнуть точки O . Тогда по симметрии можно построить и вторую половину движения как нечетную функцию $y_2[t - (d - 2a)/U]$. Так как при $t \in [0, (d - 2a)/U]$ объект X движется согласно $x_1 = a + Ut$, то граница его l -окрестности на оси x_2 движется по закону

$$(3.1) \quad x_2 = g(t) \equiv -[l^2 - (a + Ut)^2]^{1/2}, \quad t \in [0, t'], \quad t' = \frac{l - a}{U}$$

Производная $g'(t)$ функции (3.1) монотонно возрастает от $u_0 = aU(l^2 - a^2)^{-1/2}$ до ∞ на отрезке $[0, t']$ и принимает значение V при

$$(3.2) \quad t = t'' = VU^{-1}(U^2 + V^2)^{-1/2}l - aU^{-1} < t'$$

Движение точки Y по оси y_2 должно удовлетворять неравенствам $y_2(t) < g(t), y_2'(t) \leq V$ и достигает $y_2 = 0$ за время t_* .

Нижнюю границу времени t_* получим, решая задачу быстрогодействия при указанных ограничениях. Для этого рассматриваем две возможности. Если $u_0 < V$ (т. е. $t'' > 0$ в (3.2)), то при $t < t''$ объект Y движется по закону $y_2 = g(t)$ из (3.1) со скоростью, меньшей V , а при $t \in [t'', t_*]$ — с максимальной скоростью V . Если же $u_0 \geq V, t'' \leq 0$, то движение Y происходит со скоростью V при $t \in [0, t_*]$. В результате получим

$$(3.3) \quad \begin{aligned} t_* &= t'' - g(t'')V^{-1} \quad (u_0 < V, t'' > 0) \\ t_* &= -g(0)V^{-1} \quad (u_0 \geq V, t'' \leq 0) \end{aligned}$$

Объект Y может избежать наблюдения при условии $t_* < (d - 2a) U^{-1}$. С учетом (3.1) — (3.3) это неравенство приводится к виду

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varphi(w, k) &= (Ut_* + 2a)l^{-1} < dl^{-1}, \quad w = VU^{-1}, \quad k = al^{-1} \\ \varphi(w, k) &= (1 + w^2)^{1/2}w^{-1} + k, \quad k \leq k_0 = w(1 + w^2)^{-1/2} \\ \varphi(w, k) &= (1 - k^2)^{1/2}w^{-1} + 2k, \quad k \geq k_0 \end{aligned}$$

Объект X может выбрать параметр a (или k в (3.4)) так, чтобы максимизировать $\varphi(w, k)$ по $k \in [0, 1]$. Это сузит область значений U, V , при которых объект Y может пересечь ось x_1 , избежав наблюдения. Искомый максимум достигается в единственной точке k_* и равен

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \varphi_* &= \max_{0 \leq k \leq 1} \varphi(w, k) = \varphi(w, k_*) = (1 + 4w^2)^{1/2}w^{-1} \\ k_* &= 2w(1 + 4w^2)^{-1/2}, \quad k_0 \leq k_* \leq 1 \end{aligned}$$

Из (3.4), (3.5) следует, что если выполнено неравенство $\varphi_* < dl^{-1}$, то объект Y , двигаясь указанным способом, может пересечь ось x_1 , избежав наблюдения.

При противоположном неравенстве $\varphi_* > dl^{-1}$, которое с учетом (3.5) представляется в виде

$$(3.6) \quad (1 + 4w^2)^{1/2}w^{-1} > dl^{-1}$$

объект X осуществит наблюдение объекта Y , если последний пересечет ось x_1 . Величину a для этого нужно выбрать согласно (3.4), (3.5) в виде

$$(3.7) \quad a = k_*l = 2w(1 + 4w^2)^{-1/2}l < l, \quad w = VU^{-1}$$

Условие (3.6) можно разрешить относительно $w = VU^{-1}$

$$(3.8) \quad (V/U)^2 [(d/l)^2 - 4] < 1$$

Неравенство (3.8) заведомо выполнено, если выполнено более простое и грубое условие

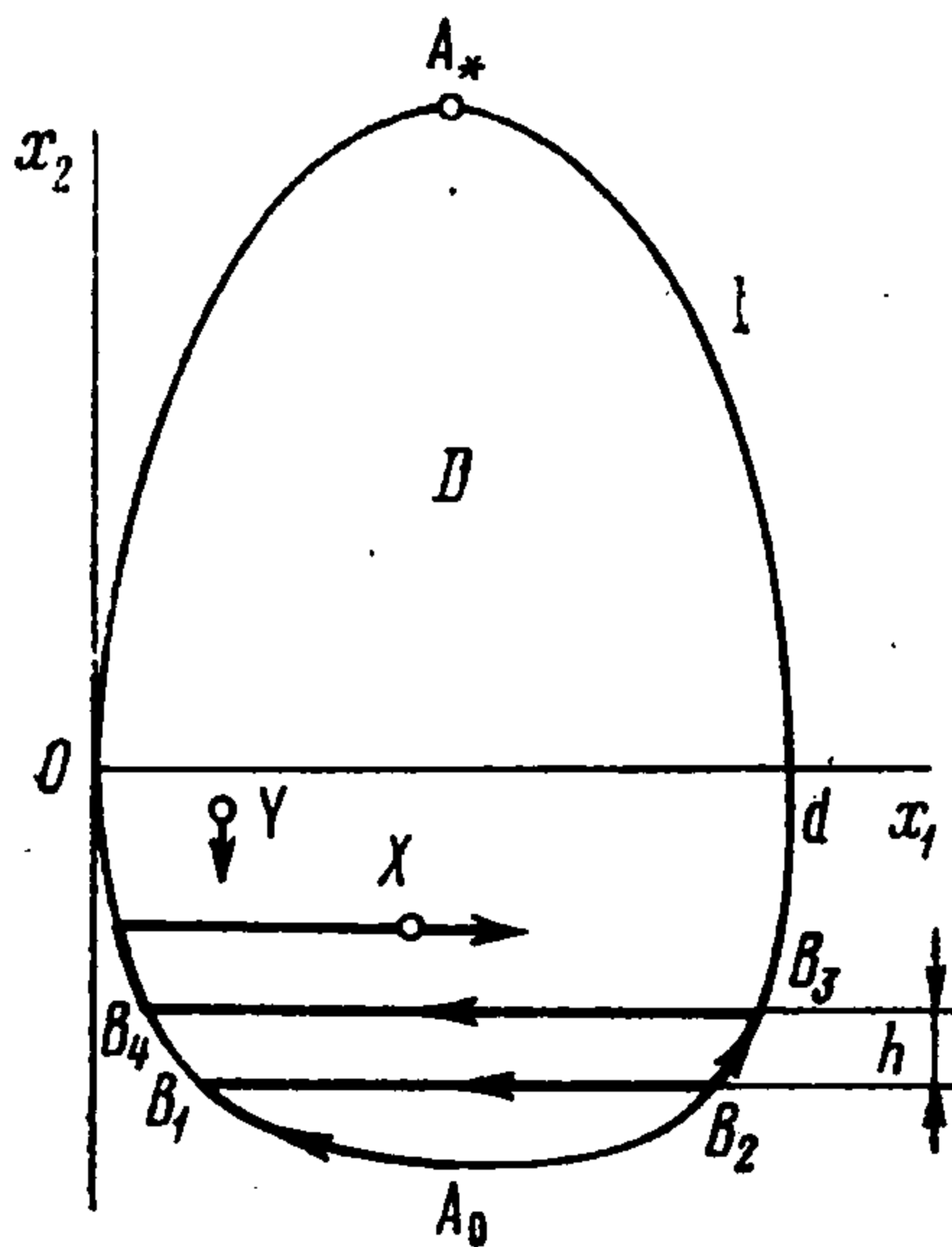
$$(3.9) \quad V/U < l/d$$

4. Возвратимся к общему случаю выпуклой, замкнутой и ограниченной области D и предположим, что условие (3.8) выполнено. Пусть поиск проводится так, как описано в п. 2, причем a выбрано согласно (3.7), а h достаточно мало. На каждом шаге сканирования ситуация будет близка к той, что имела место при $h = 0$, причем ширина «полей» нигде не превышает a , что лишь ограничивает возможности объекта Y . Поэтому очевидно, что при достаточно малом h объект Y не сможет оказаться на одной прямой $x_2 = \text{const}$ с объектом X , не будучи им замеченным. Следовательно, поиск завершится успешно и неравенство (3.8) (а тем более (3.9)) есть достаточное условие успешного завершения поиска. Время поиска T зависит от h и равно длине ломаной $A_0A_1 \dots A_N$, деленной на U .

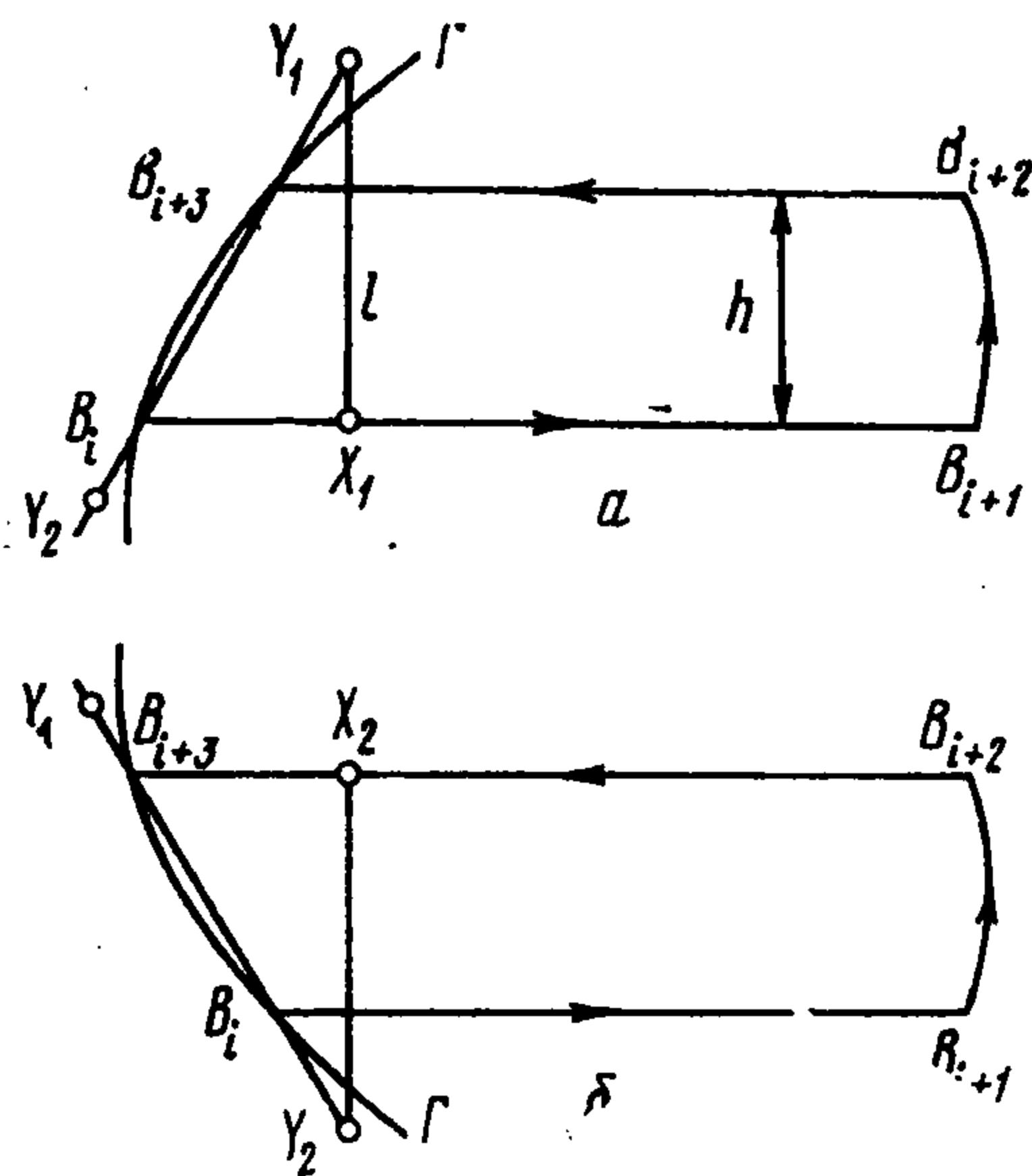
Рассмотрим предельные случаи неравенства (3.8). Если $d \leq 2l$, то (3.8) выполнено при любых $V, U > 0$. В этом случае поиск осуществляется и без сканирования. Объект X может двигаться с любой сколь угодно малой скоростью U так, чтобы обе ветви (2.1) границы Γ были от него на расстоянии, не большем l , например по кривой $x_1 = [f^-(x_2) + f^+(x_2)]/2$.

В другом предельном случае $l \ll d$ условие (3.8) принимает вид (3.9). Здесь объект X для успешного поиска должен обладать большим превосходством в скорости. При этом согласно (3.7) $al^{-1} \rightarrow 0$, так, что «поля» практически отсутствуют.

Проанализируем несколько иной, чем в п. 2, способ поиска, изображенный на фиг. 2. Объект X начинает движение в точке A_0 и движется по границе Γ влево до точки B_1 с координатой $x_2 = x_2^- + h$. Затем X движется вправо по прямой $x_2 = x_2^- + h$ до точки $B_2 \in \Gamma$, а от нее — по Γ до точки B_3 с координатой $x_2 = x_2^- + 2h$. После этого X движется по прямой $x_2 = x_2^- + 2h$ влево до Γ и т. д. Движение происходит со скоростью U и заканчивается в точке A_* . Перейдем к определению условий и значений $h < l$, при которых данный способ поиска решает задачу 1.



Фиг. 2



Фиг. 3

Чтобы избежать наблюдения, объект Y должен пересечь один из отрезков $B_i B_{i+1}$, по которым движется X , так, чтобы все время было выполнено неравенство $XU > l$. Наиболее выгодное для Y место пересечения — вблизи границы Γ , так как здесь проходит наибольшее время между движениями X влево и вправо при сканировании. Рассмотрим для определенности ситуацию вблизи левой ветви границы. Заменяем участки границы Γ выше точки B_{i+3} и ниже точки B_i участками прямой $B_i B_{i+3}$, образующей угол φ с осью x_2 , $|\varphi| < \pi/2$ (фиг. 3). Такая замена границы в силу выпуклости области D может лишь увеличить возможности объекта Y .

Сначала рассмотрим случай $0 \leq \varphi < \pi/2$ (фиг. 3, а). Пусть Y_1 — точка прямой $B_i B_{i+3}$, находящаяся на расстоянии l от прямой $B_i B_{i+1}$, а X_1 — основание перпендикуляра из Y_1 на $B_i B_{i+1}$. В тот момент, когда объект X придет в X_1 , объект Y , чтобы не быть обнаруженным, должен находиться правее и выше точки Y_1 на фиг. 3, а. Пусть объект X прошел путь $X_1 B_{i+1} B_{i+2} B_{i+3}$. Объект Y , чтобы избежать наблюдения, должен за это время оказаться левее и ниже точки Y_2 на прямой $B_i B_{i+3}$, причем $Y_2 B_{i+3} = l$. Подсчитаем времена t_1, t_2 , необходимые объектам X, Y для прохождения траекторий $X_1 B_{i+1} B_{i+2} B_{i+3}$ и $Y_1 Y_2$ соответственно, учитывая, что $B_i B_{i+1} \leq d$

$$(4.1) \quad t_1 \leq [2d + h - (l + h) \operatorname{tg} \varphi] U^{-1}$$

$$t_2 = (Y_1 B_{i+3} + Y_2 B_{i+3}) V^{-1} = [(l - h) (\cos \varphi)^{-1} + l] V^{-1}$$

Условие успешного поиска имеет вид $t_1 < t_2$, что с учетом (4.1) дает

$$(4.2) \quad VU^{-1} < \psi(\varphi) \equiv (l - h + l \cos \varphi) [(2d + h) \cos \varphi - (l + h) \sin \varphi]^{-1}$$

Можно проверить, что $\psi'(\varphi) > 0$ при $h < l$, поэтому неравенство (4.2) заведомо выполнено при всех $\varphi \in [0, \pi/2]$, если $VU^{-1} < \psi(0)$, т. е.

$$(4.3) \quad VU^{-1} < \psi(0) = (l - h/2)(d + h/2)^{-1}$$

При $\varphi \in (-\pi/2, 0)$ ситуация изображена на фиг. 3, б и рассматривается аналогично. Для успешного поиска время t_1 прохождения объекта X по траектории $B_i B_{i+1} B_{i+2} X_2$ должно быть меньше времени t_2 прохождения объекта Y по отрезку $Y_1 Y_2$. В результате получаем те же соотношения (4.1), (4.2), но с заменой φ на $-\varphi$. Поэтому условие (4.3) достаточно для успешного завершения поиска.

Если выполнено неравенство (3.9), то при достаточно малом h выполнено и (4.3) и указанный способ поиска завершается успешно. Для этого величину h нужно взять из интервала

$$(4.4) \quad 0 < h < 2(l - wd)(1 + w)^{-1}, \quad w = VU^{-1} < ld^{-1}$$

обеспечивающего выполнение условия (4.3).

Время поиска T для данного способа равно

$$(4.5) \quad T = L(D, h) U^{-1} = Sh^{-1} U^{-1} + O(1)$$

Здесь $L(D, h)$ — длина кривой $A_0 B_1 B_2 \dots A_*$, зависящая от области D и числа h . При $h \rightarrow 0$ она асимптотически равна Sh^{-1} , где S — площадь области D .

5. Обратимся к задаче поиска в трехмерной ($n = 3$) выпуклой, ограниченной и замкнутой области D при ограничениях (1.4), (1.5) и условии наблюдения (1.7). Выберем декартову систему координат $Ox_1 x_2 x_3$ так, чтобы площадь проекции области D на плоскость $Ox_1 x_2$ была минимальной. Проведем плоскости $x_3 = ih_0$, $h_0 < l$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и обозначим через D_i сечение области D i -й плоскостью.

Зададим движение объекта X следующим образом. В каждой плоскости $x_3 = ih_0$, которая образует с D непустое пересечение D_i , точка X движется так, как описано в п. 4 (фиг. 2), осуществляя сканирование плоской области D_i с шагом h . После этого X переходит на следующий слой $x_3 = (i + 1)h_0$, по границе области D и сканирует область D_{i+1} , и так просматриваются все плоскости с непустыми D_i .

При переходе со слоя на слой меняется направление сканирования областей D_i : от точки A_0 к A_* при нечетных i , как на фиг. 2, и от A_* к A_0 при четных i . Переход объекта X со слоя на слой происходит по кратчайшей кривой, лежащей на границе области D и соединяющей соответствующие точки A_0 (или A_*) соседних слоев.

Выберем параметры сканирования $h \in [0, 2l]$ и $h_0 \in [0, l]$, исходя из требования, чтобы при любом пересечении объектом Y некоторого сечения D_i было выполнено неравенство $XU \leq l$ в некоторый момент времени. Для простоты рассмотрим случай цилиндрической области D , для кото-

рой все сечения D_i совпадают с проекцией D_* области D на плоскость Ox_1x_2 .

При движении в D_i объект X приближается к каждой точке области D_i на минимальное расстояние, не большее $h/2$. Следовательно, чтобы объект Y не был обнаружен, он в некоторый момент $t = \tau_1$ должен находиться на расстоянии, не меньшем $(l^2 - h^2/4)^{1/2}$, от плоскости $x_3 = ih_0$. Точно так же, при движении X по D_{i+1} объект Y , чтобы не быть обнаруженным, должен быть в некоторый момент $t = \tau_2$ на таком же расстоянии от плоскости $x_3 = (i+1)h_0$. Следовательно, чтобы не быть обнаруженным, объекту Y необходимо преодолеть полосу шириной $2(l^2 - h^2/4)^{1/2} - h_0$ за время $\tau_2 - \tau_1$, для которого справедлива оценка

$$\tau_2 - \tau_1 < [2L(D_*, h) + h_0] U^{-1}$$

Здесь использована формула (4.5). Поэтому, если справедливо неравенство

$$(5.1) \quad [2(l^2 - h^2/4)^{1/2} - h_0] V^{-1} > 2[L(D_*, h) + h_0] U^{-1}$$

то поиск будет успешным. Условие (5.1) выполнено, если

$$(5.2) \quad w = VU^{-1} < (l^2 - h^2/4)^{1/2} [L(D_*, h)]^{-1} \\ 0 < h_0 < 2[(l^2 - h^2/4)^{1/2} - wL(D_*, h)] (1 + w)^{-1}$$

Первое неравенство (5.2) содержит параметр h , который целесообразно выбрать так, чтобы максимизировать правую часть этого неравенства по $h \in [0, 2l]$. После этого шаг h_0 выбирается согласно второму неравенству (5.2).

В случае $l^2 \ll S$, где S — площадь D_* , формулы (5.2) упрощаются. На основании (4.5) получим достаточное условие успешного завершения поиска и оптимальный шаг $h = h_*$

$$(5.3) \quad V/U < S^{-1} \max_{0 \leq h \leq 2l} [h(l^2 - h^2/4)^{1/2}] = l^2 S^{-1}, \quad h_* = l\sqrt{2}$$

Шаг h_0 в силу (5.2), (5.3), (4.5) должен выбираться из интервала

$$(5.4) \quad 0 < h_0 < \sqrt{2}(l - wSl^{-1})(1 + w)^{-1}$$

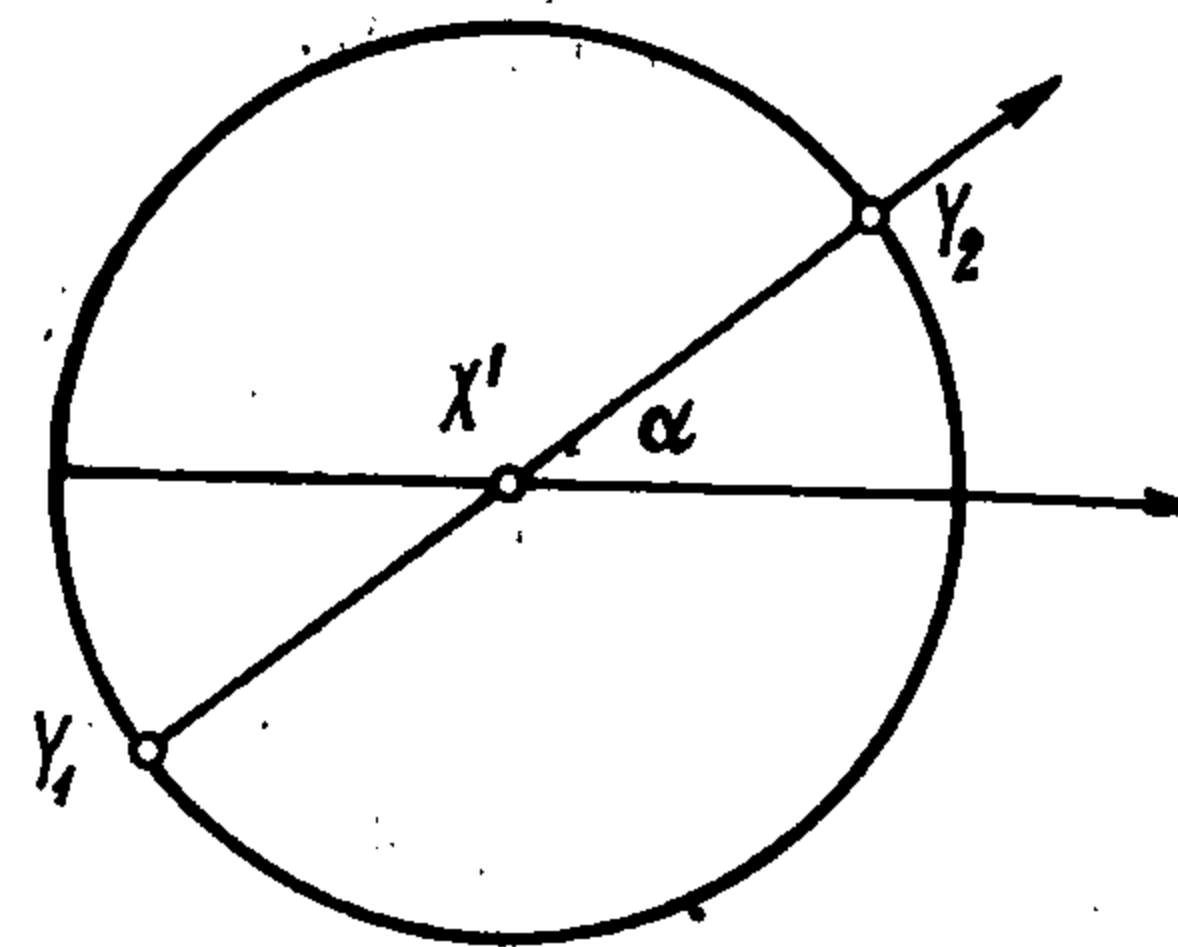
Соотношения (5.3), (5.4) справедливы при $l^2 \ll S$ для произвольной, а не только для цилиндрической области D . Оценивая полное время поиска при помощи (4.5), (5.3), (5.4), получим $T \sim \Omega(h_0 h_* U)^{-1}$ при $l^2 \ll S$, где Ω — объем области D .

6. Рассмотрим задачу поиска с ограничениями (1.4), (1.5) и при возможности наблюдения в случае прямой видимости (1.8). Пусть экран E — выпуклая ограниченная область, а замкнутая область D — его внешность. Таким образом, область E непроницаема как для движения, так и для наблюдения.

В плоском случае ($n = 2$) задача 1 имеет решение, очевидно, в том и только в том случае, когда $U > V$. Решение элементарно: объект X начинает движение на границе E и движется по ней со скоростью U в любую сторону. За время $T = L(U - V)^{-1}$, где L — длина границы E , объекты X, Y обязательно окажутся в условиях прямой видимости. Это решение задачи 1 оптимально, т. е. оно является также решением задачи 2. При $V \geq U$ объект Y всегда может двигаться так, чтобы скрываться за препятствием E .

В трехмерном случае ($n = 3$) решение задачи 1 с условиями (1.4), (1.5), (1.8) существенно сложнее, чем в двумерном. Построим его для области E в виде сферы радиуса r , непроницаемой для наблюдения и для движения объектов X, Y .

Не нарушая общности, можно ограничиться движениями Y только по поверхности сферы E . В самом деле, наряду с произвольным движением Y во внешности сферы рассмотрим движение его проекции Y' на сферу E . Скорость проекции Y' не превосходит скорости Y , поэтому это движение допустимо. С другой стороны, если X наблюдает проекцию Y' , то он наблюдает также и сам Y ; обратное неверно. Поэтому объекту Y выгоднее двигаться по поверхности сферы E , чем вне ее.



Фиг. 4

Движение объекта X зададим как сканирование (со скоростью U) сферы радиуса $R > r$, концентрической сфере E . Положим

$$(6.1) \quad \theta = \pi t T^{-1}, \quad U_\theta = R\dot{\theta} = \pi R T^{-1} \ll U, \quad t \in [0, T]$$

$$U_\lambda = (U^2 - U_\theta^2)^{1/2} = R\dot{\lambda} \sin \theta, \quad \lambda(0) = 0$$

где $\theta \in [0, \pi]$ — широта, λ — долгота, время T выбирается достаточно большим. В каждый момент объект X наблюдает на поверхности сферы E сегмент с угловым радиусом $\gamma = \arccos(rR^{-1})$. Центр сегмента X' движется по сфере E по спирали (6.1). Объект Y будет найден, если он не успеет за время оборота объекта X пересечь виток спирали, избежав наблюдения. Для успешного завершения поиска достаточно, чтобы это условие выполнялось на экваторе, где время оборота по витку максимально и равно $t_1 = 2\pi R U^{-1}$ при $T \rightarrow \infty$.

Пусть центр сегмента X' движется равномерно по экватору сферы E ($T \rightarrow \infty$), совершая оборот за время t_1 . Объект Y должен пересечь экватор, избежав попадания в сегмент. Можно показать, что минимальное t_1 , при котором это возможно, реализуется, если объект Y двигается по дуге большого круга $Y_1 Y_2$, пересекающей экватор под углом $\alpha = \arccos(VU^{-1})$. На фиг. 4 изображены сегмент и его центр X' через равные промежутки времени t_1 , а также оптимальная траектория объекта Y . Если время $t_2 = 2r\gamma V^{-1}$ перемещения Y из Y_1 в Y_2 меньше t_1 , то Y избегает наблюдения. Если же $t_1 < t_2$, т. е. $\pi V U^{-1} < \gamma \cos \gamma$, то поиск завершается успешно, $\gamma = \arccos(rR^{-1})$. Вычисляя максимум по $\gamma \in (0, \pi/2)$, получим достаточные условия успешного завершения поиска

$$(6.2) \quad VU^{-1} < 0.179, \quad \gamma = 0.860, \quad Rr^{-1} = (\cos \gamma)^{-1} = 1.534$$

Итак, если выполнено первое неравенство (6.2), то предложенный способ поиска (6.1) при достаточно большом T решает задачу 1. Радиус сферы следует выбирать согласно (6.2), где дана также величина соответствующего угла γ . Отметим, что с ростом R увеличивается размер сегмента, но уменьшается скорость его движения; найденное в (6.2) значение R является оптимальным для X .

В заключение отметим, что исследованные в работе простые способы поиска, вообще говоря, не являются оптимальными. Полученные на их основе условия, гарантирующие успешное завершение поиска, являются достаточными, но не необходимыми. Представляло бы интерес построение оптимальных способов поиска, решающих задачу 2, и получение необходимых и достаточных условий успешного завершения поиска.

Поступила 16 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Differential Games and Control Theory. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 10, N. Y., Marcel Dekker Inc., 1974.
3. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л., Изд-во ЛГУ, 1977.