

ОБ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМАМИ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

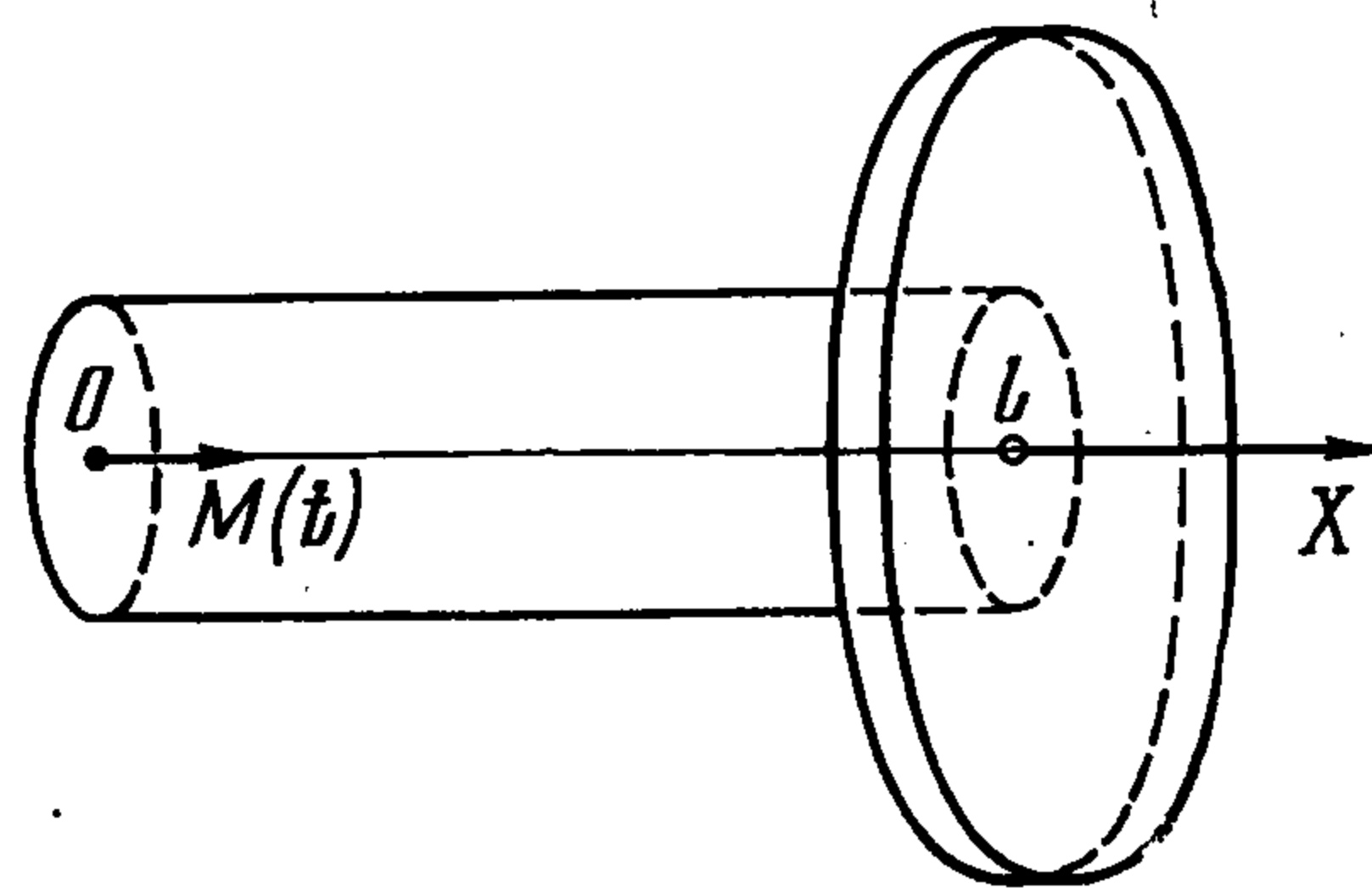
Л. Д. Акуленко, Н. Н. Болотник

(Москва)

Рассматриваются некоторые задачи управления плоским поворотом твердого тела (маховика) посредством упругого стержня (вала), к концу которого приложен ограниченный момент сил. Основное требование к управлению заключается в уменьшении или гашении упругих колебаний маховика в конце процесса поворота. В работе исследуется практически важный случай большой крутильной жесткости вала, приведены оценки остаточных колебаний. Главная цель проведенных исследований заключается в обосновании некоторых простых практических решений задач управления механическими системами, содержащими упругие звенья, при помощи силового воздействия, сосредоточенного на конце.

Исследованию задач оптимизации и управления колебательными процессами механических систем при помощи сосредоточенных и распределенных воздействий, приводящих к рассмотрению гиперболических уравнений, посвящены работы [1-6] и др.

1. Постановка задачи. Рассматривается однородный упругий стержень (вал) постоянного сечения, который может поворачиваться вокруг оси OX , являющейся осью симметрии. К левому концу вала ($x = 0$) приложен управляющий момент сил, а на правом конце ($x = l$) располо-



Фиг. 1

жено абсолютно твердое тело — маховик (см. фиг. 1). Вводятся обозначения: $\varphi(t, x)$ — угол поворота сечения вала, расположенного на расстоянии x от точки O , в момент времени t ; I — линейная плотность момента инерции вала относительно оси симметрии; J — момент инерции маховика, жестко связанного с валом; l — длина вала; $c = \text{const}$ — крутильная жесткость [7,8]; $M(t)$ — управляющий момент.

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ система находится в положении равновесия и покоится. Ее движение описывается дифференциальным уравнением с начальными и краевыми условиями [1, 8]

$$(1.1) \quad I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi(0, x) = \frac{\partial \varphi(0, x)}{\partial t} = 0$$

$$c \frac{\partial \varphi(t, l)}{\partial x} = -J \frac{\partial^2 \varphi(t, l)}{\partial t^2}, \quad c \frac{\partial \varphi(t, 0)}{\partial x} = -M(t), \quad |M| \leq M_0$$

Ставится задача о выборе управляющего момента $M(t)$, ограниченного согласно (1.1), который позволяет повернуть систему на заданный угол φ .

за конечное время T , погасив при этом все колебания, т. е. привести систему (1.1) в состояние

$$(1.2) \quad \varphi(T, x) = \varphi_*, \quad \partial\varphi(T, x) / \partial t = 0, \quad x \in [0, l]$$

Момент времени T в (1.2) заранее не фиксирован, а находится в процессе решения задачи. Он может быть определен заданием дополнительных требований, например оптимальности согласно некоторому критерию качества управления [1-4], или других [6].

Для исследования поставленной задачи управления (1.1), (1.2) удобно перейти к безразмерным переменным и параметрам при помощи соотношений

$$(1.3) \quad t' = \left(\frac{c}{J_0 l}\right)^{1/2} t, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad \varphi' = \frac{c}{M_0 l} \varphi, \quad \varphi_*' = \frac{c}{M_0 l} \varphi_*$$

$$M'(t) = \frac{M(t)}{M_0}$$

Здесь J_0 — некоторый параметр, характеризующий момент инерции системы и равный, например, J или Il или сумме этих величин. Отметим, что система (1.1) содержит две характерные величины, имеющие размерность частоты. Величина $(c / (J_0 l))^{1/2}$ характеризует частоту собственных колебаний системы, а $(M_0 / J_0)^{1/2}$ — угловую скорость поворота. Далее предполагается, что их отношение есть величина порядка единицы. Тогда из (1.3) следует, что коэффициент при φ , равный $c / M_0 l$, также порядка единицы. В результате замены (1.3) задача управления (1.1), (1.2) приводится к виду (штрихи далее опускаются)

$$(1.4) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi(0, x) = \frac{\partial \varphi(0, x)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi(t, 1)}{\partial x} = -\mu \frac{\partial^2 \varphi(t, 1)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varphi(t, 0)}{\partial x} = -M(t), \quad |M(t)| \leq 1$$

$$\varphi(T, x) = \varphi_*, \quad \partial \varphi(T, x) / \partial t = 0, \quad x \in [0, 1]$$

Здесь $\varepsilon = IlJ_0^{-1}$, $\mu = JJ_0^{-1}$ — числовые параметры, характеризующие относительные величины моментов инерции вала и маховика соответственно.

Задача управления вида (1.4) описывает также поступательное движение упругого стержня (распределенной пружины) в направлении его продольной оси. Считается, что к одному из концов стержня приложена сосредоточенная сила, а с другим концом жестко скреплено абсолютно твердое тело. В этом случае $\varphi(t, x)$ — абсолютное смещение сечения стержня, x — относительная координата сечения, t — время, $M(t)$ — ограниченная по величине сила вдоль оси Ox , I — линейная плотность стержня, J — масса твердого тела, c — модуль Юнга [7,8], φ_* — заданное расстояние, на которое должна быть перемещена система как целое с гашением колебаний. Параметры J_0 , ε , μ имеют аналогичный смысл.

2. Поворот упругого вала. Рассмотрим сначала случай, когда вал не нагружен маховиком, т. е. $J = 0$. Это соответствует нулевому значению параметра μ . Полагая $J_0 = Il$ ($\varepsilon = 1$), построим при $\mu = 0$ решение φ^0 краевой задачи (1.4). Эта задача содержит неоднородное краевое условие

при $x = 0$. Для построения решения неоднородной краевой задачи применим подход, предложенный в [9]. Известно, что собственные функции $\varphi_n(x)$ соответствующей однородной краевой задачи имеют вид $\varphi_n(x) = \cos \pi n x$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) [8]. Будем искать решение задачи (1.4) в виде ряда

$$(2.1) \quad \varphi^\circ(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \cos \pi n x$$

В силу ортогональности системы функций $\cos \pi n x$, $x \in [0, 1]$ коэффициенты ряда (2.1)

$$(2.2) \quad C_0(t) = \int_0^1 \varphi^\circ(t, x) dx, \quad C_n(t) = 2 \int_0^1 \varphi^\circ(t, x) \cos \pi n x dx, \quad n \geq 1$$

Умножив обе части дифференциального уравнения (1.4) на $\cos \pi n x$ и проинтегрировав по x , $x \in [0, 1]$, после простых преобразований получим соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 \varphi^\circ(t, x) \cos \pi n x dx = \\ & = \frac{\partial \varphi^\circ(t, 1)}{\partial x} \cos \pi n - \frac{\partial \varphi^\circ(t, 0)}{\partial x} - \pi^2 n^2 \int_0^1 \varphi^\circ(t, x) \cos \pi n x dx \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений с учетом краевых условий и выражений (2.2) находим уравнения для коэффициентов ряда (2.1) и соответствующие начальные условия

$$(2.3) \quad \begin{aligned} C_0'' &= M(t), \quad C_n'' + \pi^2 n^2 C_n = 2M(t), \quad n \geq 1 \\ C_n(0) &= C_n'(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Согласно (2.1), для переменной φ на основе (2.3) получается искомое решение краевой задачи (1.4) при $\mu = 0$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \varphi^\circ(t, x) &= \int_0^t (t - \tau) M(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi n} \int_0^t \sin \pi n (t - \tau) M(\tau) d\tau \right] \cos \pi n x \end{aligned}$$

Если функция $M(t)$ кусочно-непрерывная и гладкая на интервалах непрерывности, то ряд (2.4) абсолютно и равномерно сходится. Первые производные функции φ° сходятся в среднеквадратическом [8]. Отметим, что первое слагаемое в (2.4) представляет решение обыкновенного дифференциального уравнения $\varphi'' = M(t)$ с условиями $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Оно описывает движение абсолютно твердого тела с моментом инерции $I l = 1$, вращающегося вокруг оси OX под действием момента сил $M(t)$. Таким образом, первое слагаемое отвечает повороту вала как целого. Второе слагаемое (ряд) описывает упругие крутильные колебания.

Рассмотрим управление $M(t)$ вида

$$(2.5) \quad \begin{aligned} M(t) &= \alpha \operatorname{sign}(T/2 - t), \quad t \in [0, T] \\ M(t) &\equiv 0, \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь α , T — постоянные; их значения определяются ниже. Подставим функцию $M(t)$ из (2.5) в (2.4) и проинтегрируем. Для φ° и $\partial\varphi^\circ/\partial t$ в момент времени $t = T$ получим выражения

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varphi^\circ(T, x) &= \frac{\alpha T^2}{4} + \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(2 \cos \frac{\pi}{2} nT - 1 - \cos \pi nT \right) \cos \pi n x \\ \frac{\partial \varphi^\circ(T, x)}{\partial t} &= \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \pi nT - 2 \sin \frac{\pi}{2} nT \right) \cos \pi n x \end{aligned}$$

Из (2.6) следует, что при $T = 4m$, где m — целое число, ряды равны нулю и имеют место тождества

$$(2.7) \quad \varphi(T, x) \equiv \alpha T^2 / 4, \quad \partial \varphi(T, x) / \partial t = 0, \quad x \in [0, 1]$$

Чтобы удовлетворить конечным условиям из (1.4), необходимо подобрать параметр α и целое число m в (2.7) так, чтобы выполнялись соотношения

$$(2.8) \quad 4\alpha m^2 = \varphi_*, \quad \alpha \leq 1$$

Из (2.8) следует, что $m \geq 1/2 \sqrt{\varphi_*}$, а множество целых чисел m определяется выражениями

$$(2.9) \quad \begin{aligned} m = m_i &= 1/2 \sqrt{\varphi_*} + i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, \text{ если } \{1/2 \sqrt{\varphi_*}\} = 0 \\ m = m_i &= [1/2 \sqrt{\varphi_*}] + i, \quad i = 1, 2, \dots, \text{ если } \{1/2 \sqrt{\varphi_*}\} \neq 0 \end{aligned}$$

Здесь $\{k\}$ и $[k]$ означают дробную и целую часть числа k соответственно. Из (2.8), (2.9) определяются значения параметра управления α

$$(2.10) \quad \alpha = 1/4 \varphi_* m_i^{-2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

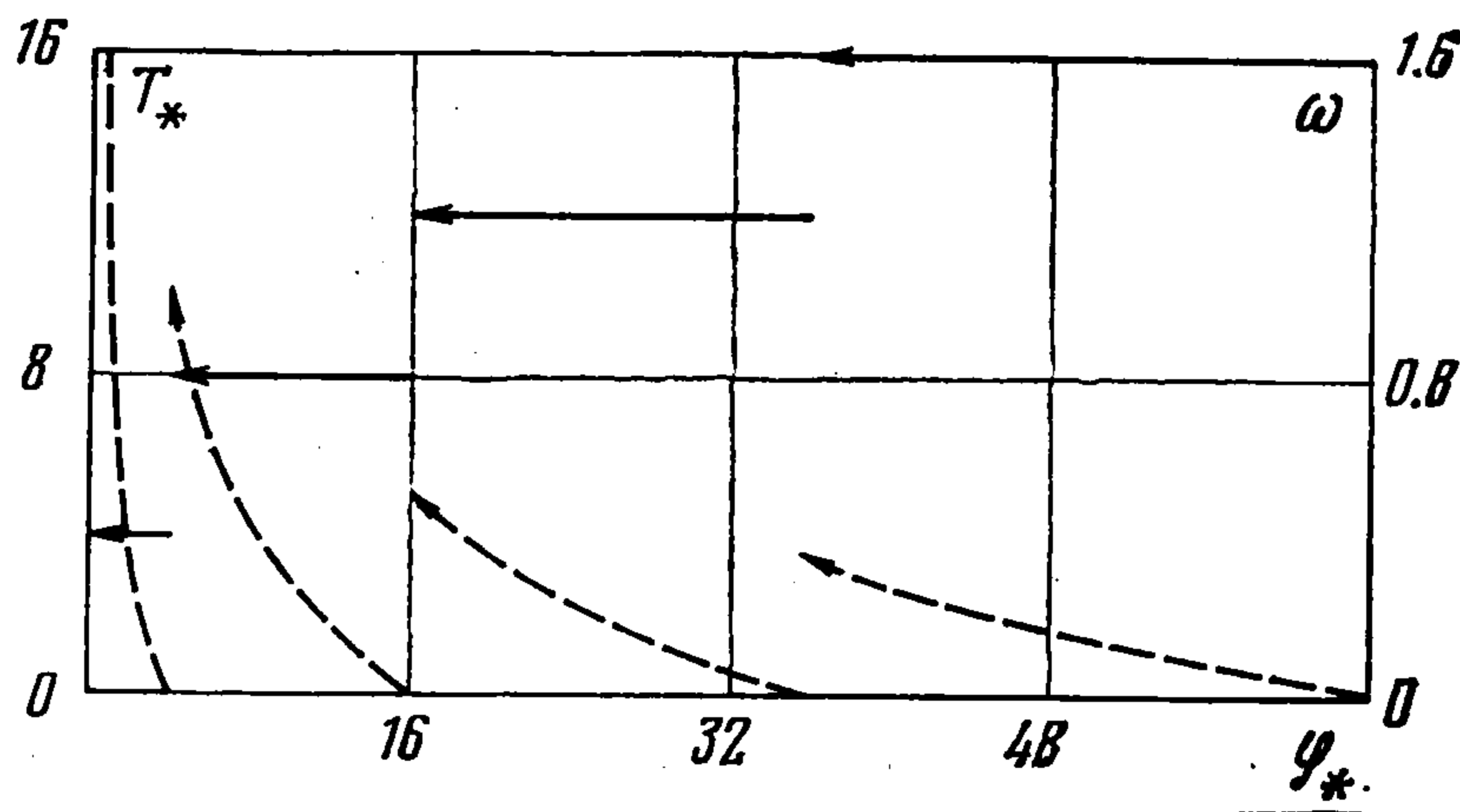
Таким образом, из соотношений (2.7)–(2.10) следует, что при помощи управления вида (2.5) можно за конечное время $T = 4m_i$ повернуть однородный вал на заданный угол φ_* , погасив его колебания. Отметим, что аналогичный прием построения допустимого управления с одной точкой переключения вида (2.5) применялся при исследовании задачи о перемещении маятника [10].

Из (2.9), (2.10) вытекает, что значение $m = m_*$, соответствующее минимально возможному времени поворота вала с гашением колебаний при помощи управлений вида (2.5), равно $m_* = 1/2 \sqrt{\varphi_*}$, если $\{1/2 \sqrt{\varphi_*}\} = 0$, и $m_* = [1/2 \sqrt{\varphi_*}] + 1$, если $\{1/2 \sqrt{\varphi_*}\} \neq 0$. Соответствующее значение времени поворота T_* определяется соотношениями

$$(2.11) \quad T_* = 4m_* = \begin{cases} 2 \sqrt{\varphi_*}, & \{1/2 \sqrt{\varphi_*}\} = 0 \\ 4 [1/2 \sqrt{\varphi_*}] + 4, & \{1/2 \sqrt{\varphi_*}\} \neq 0 \end{cases}$$

На фиг. 2 сплошными линиями представлен график зависимости величины T_* от угла поворота вала φ_* . Отметим, что, согласно (2.11), минимальное безразмерное время T_* не меньше четырех для сколь угодно ма-

лого $\varphi_* > 0$. Аналогичное свойство было отмечено [11] при исследовании задачи финитного управления. Штриховыми линиями представлен график зависимости величины $\omega(\varphi_*) = [T_*(\varphi_*) - 2\sqrt{\varphi_*}] / (2\sqrt{\varphi_*})$, показывающей относительное отличие времени поворота T_* для упругого вала к минимально возможному времени $2\sqrt{\varphi_*}$ — времени оптимального быстрого действия для поворота твердого тела с моментом инерции, равным Il .



Фиг. 2

Если перейти по формулам замены (1.3) к исходным размерным переменным, то выражение (2.11) для минимального времени поворота T_* при управлении вида (2.5) примет вид:

$$(2.12) \quad T_* = \begin{cases} 2(Il\varphi_* / M_0)^{1/2}, & \{^{1/2}(c\varphi_* / (M_0l))^{1/2}\} = 0 \\ 4\sqrt{Il^2/c}([\^{1/2}(c\varphi_* / (M_0l))^{1/2}] + 1), & \{^{1/2}(c\varphi_* / (M_0l))^{1/2}\} \neq 0 \end{cases}$$

Для построенного выше точного решения задачи управления оказывается возможным исследовать зависимость времени T_* из (2.12) для произвольных значений параметров. В частности, $T_* \rightarrow 2(Il\varphi_* / M_0)^{1/2}$ при $c \rightarrow \infty$. Это означает, что минимальное время T_* поворота упругого вала на любой заданный угол φ_* с гашением колебаний стремится при неограниченном возрастании жесткости c к минимуму — времени поворота абсолютно твердого тела.

3. Исследование задачи управления в случае регулярных возмущений. Исследуем задачу управления (1.1), (1.2) в предположении, что момент инерции маховика мал: $J \ll Il$ и его влияние рассматривается как возмущение. Тогда, полагая $J_0 = Il$, приходим к задаче управления (1.4), в которой $\varepsilon = 1$, $\mu \ll 1$. В этом случае при управлении вида (2.5), для которого параметр α определяется согласно (2.10), при $t > T_*$ появляются малые остаточные колебания $\Delta\varphi = \varphi - \varphi^0$. Для оценки величины $\Delta\varphi$ будем строить решение задачи (1.4) в виде

$$(3.1) \quad \varphi = \varphi^0(t, x) + \mu\varphi^1, \quad \Delta\varphi = \mu\varphi^1$$

Здесь $\varphi^0(t, x)$ — решение (2.4) задачи (1.4) при $\mu = 0$ и управлении $M(t)$ вида (2.5). Подставив (3.1) в (1.4) и сохранив члены первого порядка малости по μ , получим краевую задачу для функции φ^1

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^2}, \quad \varphi^1(0, x) = \frac{\partial \varphi^1(0, x)}{\partial t} = 0$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial \varphi^1(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi^1(t, 1)}{\partial x} = -F(t), \quad F(t) = \frac{\partial^2 \varphi^0(t, 1)}{\partial t^2}$$

Конечные условия на φ^1 не налагаются, так как исследуется задача оценки величины φ^1 при $t > T$. Отметим, что краевая задача (3.2), (3.3) аналогична задаче (1.4). Используя подход [9], примененный в п. 2, получим искомое выражение для переменной $\varphi^1(t, x)$ вида (2.4)

$$(3.4) \quad \varphi^1(t, x) = - \int_0^t (t - \tau) F(\tau) d\tau - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\pi n} \int_0^t \sin \pi n (t - \tau) F(\tau) d\tau \right] \cos \pi n x$$

Дифференцируя (3.4) по t , получим

$$(3.5) \quad \frac{\partial \varphi^1(t, x)}{\partial t} = - \int_0^t F(\tau) d\tau - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\int_0^t \cos \pi n (t - \tau) F(\tau) d\tau \right] \cos \pi n x$$

Оценим выражения (3.4), (3.5) при $t > T$, где $T = 4m_i$. Поскольку $F(t) \equiv 0$ для $t > T$, то интегрирование по τ в (3.4), (3.5) проводится в пределах от 0 до T . Первое слагаемое после подстановки $F(t)$ из (3.3) в (3.4) и интегрирования принимает вид (для $t > T$)

$$(3.6) \quad - \int_0^t (t - \tau) F(\tau) d\tau = - \int_0^T (t - \tau) F(\tau) d\tau = - \varphi^0|_0^T = - \frac{\alpha T^2}{4}$$

Прямым интегрированием находим, что

$$(3.7) \quad \int_0^T \sin \pi n (t - \tau) F(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq T$$

Таким образом, второе слагаемое (ряд) в (3.4) равно нулю. В результате из (3.4)–(3.7) вытекает, что

$$\varphi^1(t, x) = -\alpha T^2 / 4 = \text{const}, \quad \partial \varphi^1(t, x) / \partial t = 0, \quad t \geq T$$

Следовательно, при $t \geq T$

$$\varphi(t, x) = 1/4 \alpha T^2 (1 - \mu) + O(\mu^2), \quad \varphi^{\cdot}(t, x) = O(\mu^2)$$

4. Исследование сингулярно возмущенной задачи управления. Рассмотрим важный в прикладном отношении предельный случай, когда момент инерции маховика J много больше момента инерции упругого вала при достаточно большой крутильной жесткости последнего, т. е. $J \gg Il$, $c \sim M_0 l$. Указанная ситуация реализуется во многих технических системах. Полагая $J_0 = J$ ($\mu = 1$, $\varepsilon \ll 1$), приведем краевую задачу (1.4) к виду

$$(4.1) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varepsilon = \frac{Il}{J}, \quad \varphi(0, x) = \frac{\partial \varphi(0, x)}{\partial t} \Big|_0 = 0 \\ \frac{\partial \varphi(t, 1)}{\partial x} = - \frac{\partial^2 \varphi(t, 1)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varphi(t, 0)}{\partial x} = - M(t)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$(4.2) \quad \varphi = \varphi_0(t, x) = M(t)(1-x) + \int_0^t (t-\tau) M(\tau) d\tau$$

является решением уравнения (4.1) при $\varepsilon = 0$ и удовлетворяет краевым условиям при $x = 0$ и $x = 1$. Заметим, что в точке $x = 1$ функция φ_0 из (4.2) удовлетворяет также и начальным условиям при $t = 0$. Следовательно, изменение угловой координаты твердого тела определяется выражением (4.2) при $x = 1$

$$(4.3) \quad \varphi_0(t, 1) = \int_0^t (t-\tau) M(\tau) d\tau$$

Функция $\varphi_0(t, 1)$ совпадает с решением уравнения $\varphi''(t, 1) = M(t)$ при нулевых начальных условиях, описывающим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси OX под действием момента сил M . Таким образом, при $\varepsilon = 0$ движение маховика, расположенного на конце упругого вала, совпадает с вращением в случае, когда момент сил приложен непосредственно к телу. Этот факт имеет простое физическое истолкование. Значению параметра $\varepsilon = 0$ соответствует бесконечно большая скорость распространения упругих воздействий вдоль вала.

Из (4.3) следует, что для решения задачи о повороте маховика на заданный угол φ_* при $\varepsilon = 0$ достаточно выбрать управление $M(t)$, не превышающее по абсолютной величине единицы, такое, чтобы в некоторый момент времени T выполнялись равенства

$$(4.4) \quad \varphi_0(T, 1) = \int_0^T (T-\tau) M(\tau) d\tau = \varphi_*, \quad \frac{\partial \varphi_0(T, 1)}{\partial t} = \int_0^T M(\tau) d\tau = 0$$

Пусть $M_*(t)$ — функция, удовлетворяющая соотношениям (4.4) и тождественно равная нулю вне отрезка $[0, T]$. Исследуем движение системы (4.1) при $\varepsilon \neq 0$ и управлении $M = M_*(t)$. Будем искать решение краевой задачи (4.1) в виде

$$(4.5) \quad \varphi = \varphi_0(t, x) + \Phi$$

где $\varphi_0(t, x)$ определяется выражением (4.2). Подставляя (4.5) в (4.1), получим краевую задачу для Φ

$$(4.6) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \varepsilon M_*''(t)(1-x) - \varepsilon M_*(t)$$

$$\Phi(0, x) = -M_*(0)(1-x), \quad \partial \Phi(0, x) / \partial t = -M_*'(0)(1-x)$$

$$\partial \Phi(t, 1) / \partial x = -\partial^2 \Phi(t, 1) / \partial t^2, \quad \partial \Phi(t, 0) / \partial x = 0$$

Переходя в (4.6) к новой переменной ψ

$$(4.7) \quad \psi = \Phi - 1/2\varepsilon(1+x)^{-1}x^2M_*(t)$$

получим краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$(4.8) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - M_* \frac{\varepsilon x^2}{2(1+\varepsilon)} - M_* (1-x) - M_* \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\psi(0, x) = -M_*(0) \left[(1-x) + \frac{\varepsilon x^2}{2(1+\varepsilon)} \right],$$

$$\frac{\partial \psi(0, x)}{\partial t} = -M_*'(0) \left[(1-x) + \frac{\varepsilon x^2}{2(1+\varepsilon)} \right]$$

$$\frac{\partial \psi(t, 1)}{\partial x} = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial^2 \psi(t, 1)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \psi(t, 0)}{\partial x} = 0$$

При помощи метода Фурье [8] получим для $\psi(t, x)$ выражение

$$(4.9) \quad \psi(t, x) = -M_*(t) \left[(1-x) + \frac{1}{2} \varepsilon (1+\varepsilon)^{-1} x^2 \right] -$$

$$- \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \int_0^t M_*(\tau) (t-\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\varepsilon} \cos \lambda_n x}{\lambda_n (\varepsilon + \cos^2 \lambda_n)} \int_0^t \sin \frac{\lambda_n}{\sqrt{\varepsilon}} (t-\tau) M_*(\tau) d\tau$$

Здесь λ_n — собственные значения соответствующей краевой задачи (4.8), т. е. корни уравнения

$$(4.10) \quad \varepsilon \operatorname{tg} \lambda = -\lambda, \quad \lambda = \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\lambda_n^{-1} = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty)$$

На основе (4.7) получим решение краевой задачи (4.6)

$$(4.11) \quad \Phi(t, x) = M_*(t)(x-1) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \int_0^t (t-\tau) M_*(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\varepsilon} I_n^\varepsilon(t) \cos \lambda_n x}{\lambda_n (\varepsilon + \cos^2 \lambda_n)}, \quad I_n^\varepsilon(t) = \int_0^t \sin \frac{\lambda_n}{\sqrt{\varepsilon}} (t-\tau) M_*(\tau) d\tau$$

Производная по времени t функции Φ , согласно (4.11), равна

$$(4.12) \quad \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} = M_*'(t)(x-1) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \int_0^t M_*(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n^\varepsilon(t) \cos \lambda_n x}{\varepsilon + \cos^2 \lambda_n}, \quad J_n^\varepsilon(t) = \int_0^t \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\varepsilon}} (t-\tau) M_*(\tau) d\tau$$

Оценим интегралы $I_n^\varepsilon(t)$ и $J_n^\varepsilon(t)$, входящие в выражения (4.11), (4.12). Предположим, что функция $M_*(t)$ кусочно-непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема на множестве непрерывности. Пусть t_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) — точки разрыва функции $M_*(t)$ или ее производной на интервале $(0, T)$, $t_0 = 0$, $t_N = T$. Тогда коэффициенты $I_n^\varepsilon(t)$ можно представить в виде

$$(4.13) \quad I_n^\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{r(t)-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin \frac{\lambda_n}{\sqrt{\varepsilon}} (t-\tau) M_*(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_r}^t \sin \frac{\lambda_n}{\sqrt{\varepsilon}} (t-\tau) M_*(\tau) d\tau$$

Через $r(t)$ обозначен максимальный индекс точек t_i разрывов функций $M_*(t)$, $M_*^\cdot(t)$, причем $t_i \leq t$. Интегрируя по частям каждое слагаемое в (4.13), получим для $t > T$ оценку

$$(4.14) \quad |I_n^\varepsilon(t)| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_n} A, \quad A = \sum_{i=0}^{N-1} \{|M_*(t_{i+1}-0)| + |M_*(t_i+0)|\} + \\ + \sup_{t \in [0, T] \setminus \Omega} |M_*^\cdot(t)| T$$

Здесь учтено, что $M_*(t) \equiv 0$ при $t > T$; через Ω обозначено множество точек разрыва функций $M_*(t)$, $M_*^\cdot(t)$. Аналогично (4.14) доказывается оценка для коэффициентов $J_n^\varepsilon(t)$

$$(4.15) \quad |J_n^\varepsilon(t)| \leq \sqrt{\varepsilon} A \lambda_n^{-1}$$

Оценим, исходя из соотношений (4.11)–(4.15), значения функции $\Phi(t, 1)$ и производной $\partial\Phi(t, 1)/\partial t$ при $t \geq 0$. Из (4.11), (4.14) следует оценка для коэффициентов ряда (4.11) при $x = 1$

$$(4.16) \quad \left| \frac{2\sqrt{\varepsilon} I_n^\varepsilon(t) \cos \lambda_n}{\lambda_n(\varepsilon + \cos^2 \lambda_n)} \right| = \left| \frac{2\varepsilon \sqrt{\varepsilon} I_n^\varepsilon(t) \sin \lambda_n}{\lambda_n^2(\varepsilon + \cos^2 \lambda_n)} \right| \leq \frac{2\varepsilon A}{\lambda_n^3}$$

Из свойства сходимости ряда с членами $\lambda_n^{-3} = O(n^{-3})$ (см. [12]) следует, что

$$(4.17) \quad \Phi(t, 1) = O(\varepsilon), \quad t \in [0, \infty)$$

На основе оценки, аналогичной (4.16), доказывается, что

$$(4.18) \quad \partial\Phi(t, 1)/\partial t = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad t \in [0, \infty)$$

Согласно (4.5), функция $\Phi(t, x)$ описывает отличие движения системы, управляемой моментом $M_*(t)$ при произвольном значении параметра ε ($0 < \varepsilon \leq 1$), от движения при $\varepsilon = 0$. Функция $\Phi(t, 1)$ описывает отличие движения твердого тела (маховика) с учетом малой инерционности стержня (вала) от его движения с безынерционным валом. Оценки (4.17), (4.18) показывают, что отличие составляет величину порядка ε по углу поворота и величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$ по угловой скорости на всем интервале времени $t \in [0, \infty)$. Это позволяет сделать вывод, что если момент инерции упругого стержня мал по сравнению с моментом инерции твердого тела, то расчет закона управления можно проводить, полагая $\varepsilon = 0$. При этом получается малая (в смысле (4.17), (4.18)) погрешность.

Поступила 28 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л., «Машиностроение», 1976.
2. Петухов Л. В., Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации для уравнений гиперболического типа при наличии граничных управлений. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
4. Бутковский В. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1975.

5. Кожков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М., «Мир», 1975.
 6. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М., «Наука», 1977.
 7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 7. М., «Наука», 1965.
 8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
 9. Гринберг Г. А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1946, т. 10, № 2.
 10. Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л. Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
 11. Бутковский А. Г. Структурная теория распределенных систем. М., «Наука», 1977.
 12. Харди Г. Х., Роговинский В. В. Ряды Фурье. М., Физматгиз, 1962.
-