3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
4. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1958, т. 197.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
6. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., «Мир», 1973.

УДК 539.3:534.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ РЕЙССНЕРА С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

С. А. Солоп

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о нелинейных колебаниях однородной изотропной непологой оболочки вращения Рейсснера постоянной толщины с учетом затухания и периодичности внешней нагрузки. Доказывается существование обобщенного периодического решения и сходимость метода Бубнова — Галеркина.

Вопросам существования периодических решений нелинейных уравнений теории пластин и пологих оболочек с учетом затухания посвящены работы [1,2].

1. Основные соотношения. Рассматривается замкнутая в окружном направлении изотропная однородная непологая оболочка вращения, описываемая соотношениями

$$\varepsilon_1 = \alpha_0^{-1}(u'\cos\vartheta + w'\sin\vartheta) + \cos(\vartheta - \vartheta_0) - 1, \quad \varepsilon_2 = r_0^{-1}u$$
$$\gamma = \alpha_0^{-1}(w'\cos\vartheta - u'\sin\vartheta) - \sin(\vartheta - \vartheta_0)$$
$$\varkappa_1 = \alpha_0^{-1}(\vartheta_0' - \vartheta'), \quad \varkappa_2 = r_0^{-1}(\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta)$$
$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad M_1 = D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \quad Q = C\gamma \quad (1 \rightleftarrows 2).$$
$$B = (1 - \nu^2)^{-1}Eh, \quad D = 12^{-1}(1 - \nu^2)^{-1}Eh^3, \quad C = 2^{-1}(1 + \nu)^{-1}Eh$$

Штрих означает производную по пространственной координате ξ. По поводу других обозначений см. [3,4].

Дифференциальные уравнения колебаний оболочки с учетом затухания можно представить в виде

$$\mathbf{u}_{tt} + \varepsilon\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, $\mathbf{F}$ — известная вектор-функция времени, индекс t внизу всюду означает производную по t; $\mathbf{A}$ — нелинейный оператор, не зависящий явно от t.

Пусть оболочка находится под действием периодических по времени с периодом ω массовых сил $\mathbf{F}$. Ставится задача — найти вектор $\mathbf{u}(\xi, t) = (u, w, \vartheta)$ $(a \leqslant \xi \leqslant b, -\infty < t < +\infty)$, удовлетворяющий уравнениям 1.1 и условиям

$$\mathbf{u}(a, t) = \mathbf{u}(b, t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u}(\xi, t + \omega) = \mathbf{u}(\xi, t), \quad \mathbf{u}_t(\xi, t + \omega) = \mathbf{u}_t(\xi, t) \tag{1.3}$$

2. Основные предположения. Пусть выполнены условия

1) срединная поверхность оболочки представляет собой поверхность вращения, заключенную между параллелями $\xi = a$, $\xi = b$; гомеоморфное отображение ее меридиана на отрезок $[a, b]$ производится функцией $\mathbf{r} \in C^{(2)}(a, b)$;

2) в области изменения параметра ξ $(0 < a \leqslant \xi \leqslant b < \infty)$ имеют место неравенства

$$0 < m_1 \leqslant \alpha_0^{-1}r_0, \quad E \leqslant m_2 < \infty, \quad 0 < \nu < 2^{-1}$$

где m_1, m_2 — некоторые постоянные;

3) единицы измерения массовой плотности ρ и линейные размеры оболочки выбраны так, что $\rho = 1$, $h = 1$.

Основные пространства. Пространством $H(a, b)$ называется гильбертово пространство, полученное замыканием множества C_1 вектор-функций $\mathbf{u} = (u, w, \vartheta) \in C^{(1)}(a, b)$, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3), в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})_H = \int_a^b (u'^{(1)} u'^{(2)} + w'^{(1)} w'^{(2)} + \vartheta'^{(1)} \vartheta'^{(2)})\, \alpha_0 r_0\, d\xi$$

Пространством X_1 называется гильбертово пространство, полученное замыканием множества C_1 в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})_1 = \int_a^b (u^{(1)} u^{(2)} + w^{(1)} w^{(2)} + 12^{-1} \vartheta^{(1)} \vartheta^{(2)})\, \alpha_0 r_0\, d\xi$$

Пусть C_2 — множество элементов $\mathbf{u}(\xi, t)$, зависящих от параметра t, таких, что $\mathbf{u} \in C_1$, $\mathbf{u}_t \in X_1$ при любом $-\infty < t < +\infty$, с конечными нормами

$$\max_t \|\mathbf{u}\|_1, \quad \max_t \|\mathbf{u}_t\|_1, \quad \int_0^\omega \|\mathbf{u}\|_H^2\, dt$$

Пространством $X_2(0, \omega)$ называется замыкание множества C_2 в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})_{2,\,0,\,\omega} = \int_0^\omega [(\mathbf{u}_t^{(1)} \cdot \mathbf{u}_t^{(2)})_1 + (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})_H]\, dt$$

Как и в [5], доказываются леммы.

Лемма 1. $H(a, b)$ есть пространство $W = W_2^{0(1)}(a, b) \times W_2^{0(1)}(a, b) \times W_2^{0(1)}(a, b)$, причем на $H(a, b)$ нормы $H(a, b)$ и W эквивалентны.

Лемма 2. В пространстве $H(a, b)$ существует полная система векторов $\{\chi_m (\chi_{1m}, \chi_{2m}, \chi_{3m})\}$, которую можно считать ортогональной в $H(a, b)$, ортонормированной в X_1 и такой, что если $(\chi_{ip} \cdot \chi_{ip})_1 = 1$, то $(\chi_{jp} \cdot \chi_{jp})_1 = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, $p = 1, \ldots, n$, $j \neq i$.

Лемма 3. $X_2(0, \omega)$ — сепарабельное гильбертово пространство и подмножество элементов из C_2, представимых в виде конечных сумм $\Sigma d_k(t) \varphi_k$ (где $d_k(t) \in C^{(2)}(0, \omega)$ и удовлетворяют (1.3), $\varphi_k \in H(a, b)$), всюду плотно в нем.

Лемма 4. Вектор-функция $\mathbf{u}_t$ как элемент X_1, $\mathbf{u}$ как элемент $H(a, b)$ являются непрерывными почти всюду функциями t, $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

3. Обобщенное решение и разрешимость задачи. Пусть выполнены условия

4) $\mathbf{F}(t + \omega) = \mathbf{F}(t)$, $\max_t \|\mathbf{F}\|_1 < \infty$, $(\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3))$

Уравнения движения оболочки можно выразить по принципу Гамильтона — Остроградского в виде ($\delta\mathbf{u}$ — возможное перемещение)

$$\int_0^\omega \Big\{ -(\mathbf{u}_t \cdot \delta\mathbf{u}_t)_1 + \varepsilon(\mathbf{u}_t \cdot \delta\mathbf{u})_1 + \int_a^b (T_1 \delta\varepsilon_1 + T_2 \delta\varepsilon_2 + Q\delta\gamma + M_1 \delta\varkappa_1 +$$
$$+ M_2 \delta\varkappa_2)\, \alpha_0 r_0\, d\xi - (\mathbf{F} \cdot \delta u)_1 \Big\}\, dt = 0, \quad \delta\mathbf{u} = (\delta u, \delta w, \delta\vartheta)$$

Определение. Обобщенным ω-периодическим решением задачи (1.1) — (1.3) называется вектор-функция $\mathbf{u}(\xi, t)$, удовлетворяющая условиям

а) $\mathbf{u}(\xi, t + \omega) = \mathbf{u}(\xi, t)$, $\mathbf{u}_t(\xi, t + \omega) = \mathbf{u}_t(\xi, t)$;

б) $\max_t \|\mathbf{u}_t\|_1$, $\max_t \|\mathbf{u}\|_H$, $\|\mathbf{u}\|_{2,\,0,\,\omega}$ конечны;

в) для любого $\delta\mathbf{u} \in H(a, b)$, сильно дифференцируемого по t, выполняются равенства Гамильтона — Остроградского.

Обычным приемом вариационного исчисления можно свести задачу отыскания обобщенного ω-периодического решения к разрешимости операторного уравнения (1.1) в пространстве $X_2(0, \omega)$. Для приближенного отыскания обобщенного решения используется метод Бубнова — Галеркина в следующей форме. Строится последовательность $\{\mathbf{u}_n\}$ вида $\mathbf{u}_n = q_1(t)\chi_1 + \ldots + q_n(t)\chi_n$, где χ_m определены в лемме 2. Вектор $(\mathbf{q}_n(t), \mathbf{q}_{nt}(t)) = (q_1(t), \ldots, q_n(t), q_{1t}(t), \ldots, q_{nt}(t))$ находится как периодическое решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(3.1)\qquad (\mathbf{u}_{ntt}\cdot\chi_m)_1 + \varepsilon(\mathbf{u}_{nt}\cdot\chi_m)_1 + I_{nm} - (\mathbf{F}\cdot\chi_m)_1 = 0$$

$$I_{nm} = \int_a^b (T_{1n}\delta\varepsilon_{1m} + T_{2n}\delta\varepsilon_{2m} + Q_n\delta\gamma_m + M_{1n}\delta\varkappa_{1m} + M_{2n}\delta\varkappa_{2m})\,\alpha_0 r_0\, d\xi$$

$$(m = 1, \ldots, n)$$

Здесь $T_{1n}, \ldots, M_{2n}$ получаются после замены $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}_n$; выражения $\delta\varepsilon_{1m}, \ldots, \delta\varkappa_{2m}$ с учетом гипотез [3] имеют вид

$$\delta\varepsilon_{1m} = \alpha_0^{-1}\chi_{1m}'\cos\vartheta_n + \alpha_0^{-1}\chi_{2m}'\sin\vartheta_n, \quad \delta\varepsilon_{2m} = r_0^{-1}\chi_{1m}, \quad \delta\varkappa_{1m} = \alpha_0^{-1}\chi_{3m}'$$

$$\delta\gamma_m = \alpha_0^{-1}\chi_{2m}'\cos\vartheta_n - \alpha_0^{-1}\chi_{1m}'\sin\vartheta_n - \chi_{3m}, \quad \delta\varkappa_{2m} = -r_0^{-1}\chi_{3m}\cos\vartheta_n$$

Теорема. Пусть выполнены условия 1) — 4). Пусть $\{\chi_m\}$ — система вектор-функций, определенная в лемме 2. Тогда

а) система уравнений (3.1) имеет по меньшей мере одно ω-периодическое решение при любом n;

б) совокупность приближений $\{\mathbf{u}_n\}$ слабо компактна в $X_2(0, \omega)$;

в) каждый слабый предел $\{\mathbf{u}_n\}$ в $X_2(0, \omega)$ есть обобщенное ω-периодическое решение задачи (1.1) — (1.3).

Центральный пункт доказательства теоремы состоит в проверке диссипативности [6] уравнений (3.1). Отличие уравнений метода Бубнова—Галеркина в теории непологих оболочек] вращения от соответствующих уравнений теории тонких пластин [1] и пологих оболочек [2] проявляется в следующем. Пусть на пространстве $H(a, b)$ задается положительно-определенный функционал потенциальной энергии оболочки

$$\Phi_n = \Phi(\mathbf{u}_n) = \frac{1}{2}\int_a^b (T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + Q\gamma + M_1\varkappa_1 + M_2\varkappa_2)\,\alpha_0 r_0\, d\xi$$

Относительно $q_m(t)$ форму Φ в теории пластин можно представить суммой $\Phi_n = \Phi_{2n} + \Phi_{4n}$ форм второй и четвертой степени. В теории пологих оболочек $\Phi_n = \Phi_{2n} + \Phi_{3n} + \Phi_{4n}$, где Φ_{3n} — функционал] третьей степени относительно $q_m(t)$. В теории непологих оболочек вращения функционал Φ_n уже не является суммой однородных функционалов.

Для доказательства теоремы уравнения (3.1) умножаются на $q_{mt}(t)$, суммируются по m от единицы до n и полученные выражения складываются

$$\frac{d}{dt}(2^{-1}\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 + \Phi_n) = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{nt})_1 - \varepsilon\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2$$

Вводится в рассмотрение функция

$$V_n(t) = V(\mathbf{q}_n(t), \mathbf{q}_{nt}(t)) = 2^{-1}\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 + \Phi_n +$$

$$+ \alpha\sum_{m=1}^{n}(\mathbf{u}_{nt}\cdot\chi_m)_1(\mathbf{u}_n\cdot\chi_m)_1 + \beta\sum_{m=1}^{n}(\mathbf{u}_n\cdot\chi_m)_1^2$$

На постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$ накладываются ограничения

$$2^{-1} - \alpha\varepsilon_1^2 > 0, \quad \beta - 2^{-1}\alpha\varepsilon_1^{-2} > 0$$

С учетом неравенства Юнга с постоянной ε_1^2 можно доказать достаточность этих неравенств для положительной определенности $V_n(t)$.

Вычисляется производная $V_{nt}(t)$ в силу уравнений (3.1)

$$V_{nt}(t) = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{nt})_1 - \varepsilon\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 + 2\beta\sum_{m=1}^{n}(\mathbf{u}_{nt}\cdot\boldsymbol{\chi}_m)_1(\mathbf{u}_n\cdot\boldsymbol{\chi}_m)_1 + \alpha\sum_{m=1}^{n}(\mathbf{u}_{nt}\cdot\boldsymbol{\chi}_m)_1^2 +$$

$$+\alpha\sum_{m=1}^{n}(\mathbf{u}_n\cdot\chi_m)\{-\varepsilon(\mathbf{u}_{nt}\cdot\chi_m)_1 - I_{nm} + (\mathbf{F}\cdot\chi_m)_1\}$$

Пусть $\alpha\varepsilon = 2\beta$. Неравенства Юнга с постоянными ε_2^2, ε_3^2 дают

$$V_{nt}(t) \leqslant -a\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 + b\|\mathbf{F}\|_1^2 - \alpha\Phi_n^\circ$$

$$\Phi_n^\circ = \Phi_n^\circ(t) = \sum_{m=1}^{n}(\mathbf{u}_n\cdot\chi_m)_1 I_{nm} - 2^{-1}\varepsilon_3^2\|\mathbf{u}_n\|_1^2$$

Пусть $a = \varepsilon - 2^{-1}\varepsilon_2^2 - 2\alpha > 0$, $b = 2^{-1}\varepsilon_2^{-2} + 2^{-1}\varepsilon_3^{-2}$; $S(1, 0)$ — сфера единичного радиуса в пространстве $H(a, b)$ с центром в нуле: $\|\mathbf{u}\|_H = 1$. Проекция сферы $S(1, 0)$ при помощи отображения $u = R^2u_1$, $w = R^2w_1$, $\vartheta = R\vartheta_1$, где $R > 0$ — некоторая постоянная, определяет эллипсоид $C(R, 0)$ в пространстве $H(a, b)$. При фиксированной постоянной $R > 1$ эллипсоид является границей некоторой связной выпуклой области, содержащей внутри себя единичный шар с центром в нуле пространства $H(a, b)$.

Лемма 5. Пусть $C(R, 0)$ — эллипсоид пространства $H(a, b)$ достаточно большого радиуса R, не зависящего от t. Если элемент $\mathbf{u}_n(t)$, принадлежащий пространству $H(a, b)$ при каждом фиксированном $-\infty < t < +\infty$ и всех n, попадает при некотором $t = t^*$ на эллипсоид $C(R, 0)$ достаточно большого радиуса, то выполнено неравенство

$$\Phi_n^\circ(t^*) \geqslant \delta_4R^4 - \delta_3R^3 - \delta_2R^2 - \delta_1R - \delta_0 \tag{3.2}$$

где $\delta_0, \ldots, \delta_4$ — постоянные, не зависящие от $\mathbf{u}_n(t^*)$.

Для доказательства леммы 5 учитывается, что из положительной определенности формы

$$\Psi_n = B(\varepsilon_{1n}^2 + \varepsilon_{2n}^2 + 2\nu\varepsilon_{1n}\varepsilon_{2n}) + C\gamma_n^2 + D(\varkappa_{1n}^2 + \varkappa_{2n}^2 + 2\nu\varkappa_{1n}\varkappa_{2n})$$

вытекает положительная определенность формы

$$2m_3(\varepsilon_{1n}^2 + \varepsilon_{2n}^2 + \gamma_n^2 + \varkappa_{1n}^2 + \varkappa_{2n}^2) \leqslant \Psi_n$$

Здесь и далее $m_i > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от n.

Записываются неравенства

$$\Phi_n \geqslant m_3\int_a^b(\varepsilon_{1n}^2 + \varepsilon_{2n}^2 + \gamma_n^2 + \varkappa_{1n}^2 + \varkappa_{2n}^2)\,\alpha_0r_0\,d\xi \geqslant m_4(J_{1n} - J_{2n}) \tag{3.3}$$

$$J_{1n} = \int_a^b[\alpha_0^{-2}(u_n'^2 + w_n'^2 + \vartheta_n'^2) + r_0^{-2}u_n^2]\,\alpha_0r_0d\xi$$

$$J_{2n} = \int_a^b[3\alpha_0^{-1}(|u_n'| + |w_n'|) + 2\alpha_0^{-1}|\vartheta_0'\vartheta_n'|]\,\alpha_0r_0\,d\varepsilon$$

Из свойств пространства $H(a, b)$ и условий 1), 2) следует

$$m_5\|\mathbf{u}_n\|_H^2 \leqslant J_{1n} \leqslant m_6\|\mathbf{u}_n\|_H^2, \quad J_{2n} \leqslant m_7\|\mathbf{u}_n\|_H \tag{3.4}$$

Функционал Φ_n° преобразуется к виду

$$\Phi_n^\circ = \int_a^b\{T_{1n}[\varepsilon_{1n} + 1 - \cos(\vartheta_n - \vartheta_0)] + T_{2n}\varepsilon_{2n} + Q_n[\gamma_n + \sin(\vartheta_n - \vartheta_0) -$$

$$-\vartheta_n] + M_{1n}(\varkappa_{1n} - \alpha_0^{-1}\vartheta_0') + M_{2n}(-r_0^{-1}\vartheta_n\cos\vartheta_n)\}\,\alpha_0r_0\,d\xi - 2^{-1}\varepsilon_3^2\|\mathbf{u}_n\|_1^2$$

Отсюда с помощью элементарных неравенств можно получить

$$\Phi_n^\circ \geqslant 2\Phi_n - 2^{-1}\varepsilon_3^2 \| \mathbf{u}_n \|_1^2 - \int_a^b [2 | T_{1n} | + | Q_n | (1 + | \vartheta_n |) + | M_{1n} | |\alpha_0^{-1}\vartheta_0'| + \tag{3.5}$$

$$+ | M_{2n} | | r_0^{-1} | (2 + | \vartheta_n |)] \alpha_0 r_0 \, d\xi$$

Из теорем вложения пространства $H(a, b)$ в пространство Гельдера $H^\alpha(a, b)$ при $\alpha < 2^{-1}$ [7] и неравенств (3.3) — (3.5) вытекает неравенство

$$\Phi_n^\circ \geqslant m_8 \| \mathbf{u}_n \|_H^2 - m_9 \| \mathbf{u}_n \|_H - 2^{-1}\varepsilon_3^2 \| \mathbf{u}_n \|_1^2 - \int_a^b [2 | T_{1n} | + | Q_n | (1 + | \vartheta_n |) +$$

$$+ | M_{1n} | | \alpha_0^{-1}\vartheta_0' | + | M_{2n} | | r_0^{-1} | (2 + | \vartheta_n |)] \alpha_0 r_0 \, d\xi$$

Выбирая ε_3^2 так, что $m_8 - 2^{-1}\varepsilon_3^2 \geqslant m_{10} > 0$ (что всегда возможно), на эллипсоиде $C(R, 0)$ можно получить искомую оценку (3.2).

Лемма 5 доказана. Дальнейшие рассуждения при доказательстве теоремы не отличаются от соответствующих в [2].

Замечание. Если, например, брать постоянные ε_1^2, ε_2^2, α, β, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha < 4^{-1}\varepsilon, \ \varepsilon^{-1} < \varepsilon_1^2 < 4\varepsilon^{-1}, \ \beta < 8^{-1}\varepsilon^2, \ \varepsilon_2^2 < \varepsilon, \ \alpha\varepsilon = 2\beta$$

то все наложенные на них ограничения будут выполнены.

Поступила 31 VIII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов Н. Ф.* Исследование нелинейных колебаний тонких пластин с учетом затухания. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 4.
2. *Ворович И. И.*, *Солоп С. А.* О существовании периодических решений в нелинейной теории колебаний пологих оболочек с учетом затухания. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
3. *Reissner E.* On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution. Proc. Sympos. Appl. Math., 1950, vol. 3.
4. *Юдин А. С.* О некоторых нелинейных уравнениях осесимметричной деформации оболочек вращения. Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высшей школы. Сер. естеств. наук, 1973, № 4.
5. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, № 6.
6. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.— Л., «Наука», 1964.
7. *Ладыженская О. А.*, *Солонников В. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 26.11.79 Подписано к печати 18.01.80 Т-01408 Формат бумаги 70×108 1/16
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Уч.-изд. л. 15,7 Бум. л. 6 Тираж 2707 экз. Зак. 2498

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10