оценить ширину области возмущения вблизи критической точки в зависимости от параметров задачи в виде $H \sim L\sigma^{-1}\mathrm{Pe}^{-1}$.

В заключение отметим, что задача (5) в приближении диффузионного пограничного слоя описывает также процесс массопереноса в движущейся среде, когда коэффициент диффузии — степенная функция концентрации.

Поступила 2 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
2. *Борзых А. А., Черепанов Г. П.* Плоская задача теории конвективной теплопередачи и массообмена, ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики, М., «Наука», 1966.
4. *Баренблатт Г. И., Вишик М. И.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т. 22, № 5.
6. *Граник И. С., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Температурные волны в движущихся средах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 5.
7. *Самарский А. А., Соболь И. М.* Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4.
8. *Баренблатт Г. И.* Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.

УДК 539.3

О ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, АНАЛОГИЧНЫХ ОБОБЩЕННЫМ ФУНКЦИОНАЛАМ ТРЕФТЦА

В. Я. Терещенко

(Ростов-на-Дону)

Указывается возможный общий подход к построению выпуклых функционалов в вариационных задачах теории упругости, использующей множители Лагранжа. Показано, что конструкция таких функционалов аналогична конструкции обобщенных функционалов Трефтца, построенных в [1] для основных граничных задач теории упругости. Обсуждается также минимизация таких функционалов, использующая идеи двойственности.

В [1] для основных граничных] задач теории упругости построены обобщенные функционалы Трефтца, имеющие, например для второй граничной задачи теории упругости, вид

$$\Phi(\mathbf{u}^*) = 2\int\limits_G W(\mathbf{u}^*)\,dG + \frac{1}{\alpha}\left[\alpha\|\mathbf{u}^*\|_{1/2,\,S} - \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\|_{-1/2,\,S}\right]^2 - \alpha\|\mathbf{u}^*\|^2_{1/2,\,S} \tag{1}$$

$$\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\|_{-1/2,\,S} = \sup_{\mathbf{u}^*\in W_2^{1/2}(S)} \frac{|\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle|}{\|\mathbf{u}^*\|_{1/2,\,S}}$$

Здесь $\mathbf{u}^*(x)$, $x \in \overline{G}$ — решения в обычном или обобщенном смысле уравнения теории упругости $A\mathbf{u}^* = \mathbf{K}(x)$, каждое из которых, как показано в [1], представимо в виде суммы $\mathbf{u}^*(x) = \mathbf{u}_0(x) + \varphi_0(x)$, где $\mathbf{u}_0$ — энергетическое решение основной граничной задачи теории упругости, φ_0 — решение дополнительной задачи

(2) $$\mathbf{A}\varphi_0 = 0, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)|_S = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_S; \quad \overline{G} = G + S$$

$G \subset E_3$ — ограниченная область, занимаемая упругой средой, с достаточно гладкой границей S; $\mathbf{A}$ — дифференциальный оператор анизотропной теории упругости [2]; $W(\mathbf{u}^*)$ — положительно-определенная квадратичная форма относительно составляющих тензора упругих деформаций [2]; $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$ — вектор напряжений, действующих на поверхности S; угловые скобки обозначают билинейную форму, определенную на дуальной паре $W_2^{1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$ пространств следов функций из соболевского пространства $W_2^1(G)$; $W_2^{1/2}(S)$ — пространство Соболева — Слободецкого [3,4], $W_2^{-1/2}(S)$ — его сопряженное, нормы в которых обозначены соответственно $\|\cdot\|_{1/2, S}$, $\|\cdot\|_{-1/2, S}$.

В [1] доказаны следующие свойства квадратичного функционала $\Phi(\mathbf{u}^*)$:

а) $$\Phi(\mathbf{u}^*) \geqslant c(\alpha)\|\mathbf{u}^*\|^2_{W_2^1(G)}$$

Здесь $c(\alpha) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от входящей в (1) достаточно малой положительной постоянной α.

б) При $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0$ $\Phi(\mathbf{u}^*) = \Phi(\mathbf{u}_0) = |\mathbf{u}_0|^2$, где $|\cdot|$ — энергетическая норма второй граничной задачи теории упругости [2].

в) Билинейный функционал $\Phi(\mathbf{u}_0, \varphi_0) = 0$.

Из этих свойств следует разрешимость задачи минимизации функционала $\Phi(\mathbf{u}^*)$, при этом $\min \Phi(\mathbf{u}^*) = |\mathbf{u}_0|^2$.

Ниже показано, что конструкция функционала $\Phi(\mathbf{u}^*)$ обоснована с точки зрения построения выпуклых функционалов в задачах оптимизации при помощи множителей Лагранжа [5,6]. Роль множителя Лагранжа играет в (1) вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$.

Определим множество U векторов $\mathbf{u} \in W_2^1(G)$, таких, что $\mathbf{u}|_S \in W_2^{1/2}(S)$, $\|\mathbf{u}\|_{1/2, S} \leqslant 1$, для которых числовая функция

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\rangle - \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\|_{-1/2, S} \leqslant 0, \quad \forall \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)$$

Числовая функция $f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}))$, определенная на дуальной паре $W_2^{1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$, положительно однородна относительно $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})$, т. е.

$$f(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})) = \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})), \quad \forall \lambda \geqslant 0$$

Лемма 1. Множество

$$U = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in W_2^1(G), \ f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})) \leqslant 0, \ \forall \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)\}$$

есть выпуклое замкнутое подмножество пространства $W_2^1(G)$.

Выпуклость множества U очевидна; замкнутость его следует из непрерывности отображения $\mathbf{u} \to \mathbf{u}|_S$: $W_2^1(G) \to W_2^{1/2}(S)$.

Лемма 2. Функция $f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}))$ обладает свойством

$$\sup_{\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)} |f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}))| = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{u} \notin U \\ 0, & \mathbf{u} \in U \end{cases}$$

Если $\mathbf{u} \in U$, то $f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})) \leqslant 0$ и достаточно выбрать $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) = 0$, чтобы выполнялось равенство

$$\sup_{\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)} f(u, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})) = 0$$

Если $\mathbf{u} \notin U$, то существует вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)$, такой, что $f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})) > 0$, и так как $\mathbf{u} \notin U$, $\|\mathbf{u}\|_{1/2, S} > 1$, то имеет место

$$\sup_{\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)} f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})) = \sup_{\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)} [\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\rangle - \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\|_{-1/2, S}] =$$

$$= \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\|_{-1/2, S} \cdot (\|\mathbf{u}\|_{1/2, S} - 1) > 0$$

Тогда [6]

$$\sup_{t^{(v)}(v)\in W_2^{-1/2}(S)} f(u, t^{(v)}(v)) \geqslant f(u, \lambda t^{(v)}(v)), \qquad \forall\lambda > 0$$

и, следовательно

$$\sup_{t^{(v)}(v)\in W_2^{-1/2}(S)} f(u, t^{(v)}(v)) = +\infty$$

Пусть требуется найти $\inf\limits_{u^*\in U} I(u^*)$, где $I(u^*)$ — строго выпуклый функционал. Так как $U \subset W_2^1(G)$ — выпуклое замкнутое подмножество, то эта задача имеет единственное решение и, в силу леммы 2, может быть заменена эквивалентной задачей, в которой inf разыскивается на всем пространстве $W_2^1(G)$

$$\inf_{u^*\in W_2^1(G)} \sup_{t^{(v)}(u^*)\in W_2^{-1/2}(S)} \{I(u^*) + f(u^*, t^{(v)}(u^*))\} = \tag{3}$$

$$= \inf_{u^*\in W_2^1(G)} \begin{cases} +\infty, & u^* \notin U \\ I(u^*) = \inf\limits_{u^*\in U} I(u^*) \end{cases}$$

При этом, если $u^* \in U$, то $\| u^* \|_{1/2,\, S} \leqslant 1$, следовательно, в силу теорем вложения для пространств Соболева — Слободецкого [4] имеем $\| t^{(v)}(u^*) \|_{-1/2,\, S} \leqslant 1$ и вид числовой функции

$$\sup_{\| t^{(v)}(u^*)\|_{-1/2,\, S}\leqslant 1} f(u^*, t^{(v)}(u^*)) = \| u^* \|_{1/2,\, S} - \| t^{(v)}(u^*) \|_{-1/2,\, S}$$

идентичен слагаемому в квадратных скобках в выражении обобщенного функционала Трефтца (1).

Задача определения

$$\sup_{t^{(v)}(u^*)\in W_2^{-1/2}(S)} \inf_{u^*\in W_2^1(G)} \{I(u^*) + f(u^*, t^{(v)}(u^*))\}$$

называется двойственной к задаче (3); вектор $t^{(v)}(u^*)$ играет роль множителя Лагранжа [6].

Таким образом, конструкция построенных в [1] обобщенных функционалов Трефтца идентична конструкции лагранжиана $L(u^*, t^{(v)}(u^*)) = I(u^*) + f(u^*, t^{(v)}(u^*))$, где вид функции $f(u^*, t^{(v)}(u^*))$ определяется вообще говоря, неоднозначно.

Обобщенное уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала $\Phi(u^*)$ на векторах u_0 и φ_0 имеет вид

$$\Phi(u_0, \varphi_0) = 2\int\limits_G W(u_0, \varphi_0)\, dG - \int\limits_S u_0 \cdot t^{(v)}(\varphi_0)\, ds = 0 \qquad (t^{(v)}(u_0)|_S = 0)$$

и при $u = u_0$ совпадает с интегральным тождеством, определяющим обобщенное решение $\varphi_0 \in W_2{}^1(G)$ дополнительной задачи (2)

$$2\int\limits_G W(\varphi_0, u)\, dG - \int\limits_S u \cdot t^{(v)}(u^*)\, ds = 0, \qquad \forall u \in W_2^1(G)$$

Таким образом, вектор $t^{(v)}(u^*)$, играющий роль множителя Лагранжа в выражении функционала $\Phi(u^*)$, есть граничное значение вектора $t^{(v)}(\varphi_0)$ в дополнительной задаче (2).

Поступила 23 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терещенко В. Я.* Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 4.
2. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.

3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
4. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1958, т. 197.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
6. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., «Мир», 1973.

УДК 539.3:534.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ РЕЙССНЕРА С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

С. А. Солоп

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о нелинейных колебаниях однородной изотропной непологой оболочки вращения Рейсснера постоянной толщины с учетом затухания и периодичности внешней нагрузки. Доказывается существование обобщенного периодического решения и сходимость метода Бубнова — Галеркина.

Вопросам существования периодических решений нелинейных уравнений теории пластин и пологих оболочек с учетом затухания посвящены работы [1,2].

1. Основные соотношения. Рассматривается замкнутая в окружном направлении изотропная однородная непологая оболочка вращения, описываемая соотношениями

$$\varepsilon_1 = \alpha_0^{-1}(u'\cos\vartheta + w'\sin\vartheta) + \cos(\vartheta - \vartheta_0) - 1, \quad \varepsilon_2 = r_0^{-1}u$$
$$\gamma = \alpha_0^{-1}(w'\cos\vartheta - u'\sin\vartheta) - \sin(\vartheta - \vartheta_0)$$
$$\varkappa_1 = \alpha_0^{-1}(\vartheta_0' - \vartheta'), \quad \varkappa_2 = r_0^{-1}(\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta)$$
$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad M_1 = D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \quad Q = C\gamma \quad (1 \rightleftarrows 2).$$
$$B = (1 - \nu^2)^{-1}Eh, \quad D = 12^{-1}(1 - \nu^2)^{-1}Eh^3, \quad C = 2^{-1}(1 + \nu)^{-1}Eh$$

Штрих означает производную по пространственной координате ξ. По поводу других обозначений см. [3,4].

Дифференциальные уравнения колебаний оболочки с учетом затухания можно представить в виде

$$\mathbf{u}_{tt} + \varepsilon\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, $\mathbf{F}$ — известная вектор-функция времени, индекс t внизу всюду означает производную по t; $\mathbf{A}$ — нелинейный оператор, не зависящий явно от t.

Пусть оболочка находится под действием периодических по времени с периодом ω массовых сил $\mathbf{F}$. Ставится задача — найти вектор $\mathbf{u}(\xi, t) = (u, w, \vartheta)$ $(a \leqslant \xi \leqslant b, -\infty < t < +\infty)$, удовлетворяющий уравнениям 1.1 и условиям

$$\mathbf{u}(a, t) = \mathbf{u}(b, t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u}(\xi, t + \omega) = \mathbf{u}(\xi, t), \quad \mathbf{u}_t(\xi, t + \omega) = \mathbf{u}_t(\xi, t) \tag{1.3}$$

2. Основные предположения. Пусть выполнены условия

1) срединная поверхность оболочки представляет собой поверхность вращения, заключенную между параллелями $\xi = a$, $\xi = b$; гомеоморфное отображение ее меридиана на отрезок $[a, b]$ производится функцией $\mathbf{r} \in C^{(2)}(a, b)$;

2) в области изменения параметра ξ $(0 < a \leqslant \xi \leqslant b < \infty)$ имеют место неравенства

$$0 < m_1 \leqslant \alpha_0^{-1}r_0, \quad E \leqslant m_2 < \infty, \quad 0 < \nu < 2^{-1}$$

где m_1, m_2 — некоторые постоянные;