

Пусть исходное тело образовано вращением дуги параболы, уравнение его поверхности имеет вид

$$z^{(1)} = 1/2 \left(\sqrt{x^{(1)2} + y^{(1)2}} + \theta \right)^2 - 1/2 (1 + \theta)^2$$

Тогда уравнение поверхности тела $T^{(0)}$ определяется как решение задачи

$$\begin{aligned} z_x^2 + z_y^2 &= A^2 x^2 + B^2 y^2 \\ z &= 0, \quad x = x_0(t), \quad y = y_0(t) \quad A^2 x_0^2 + B^2 y_0^2 = 1 \end{aligned}$$

которое в предположении тонкости тела в направлении Oy имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{z}(\bar{x}, \bar{y}) &= |\bar{y}| \left(1/2 \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \theta \right) - (1/2 - \theta) \sqrt{1 - \bar{x}^2} + \\ &+ \bar{x}^2 \ln \frac{|\bar{y}| + \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{x}^2}}, \quad \bar{z} = Bz, \quad \bar{x} = Ax, \quad \bar{y} = By \end{aligned}$$

Форма тел, имеющих одинаковое сопротивление, показана на фиг. 2 ($k = 1$, $a = 0.5$, $\theta = 2.5$); все линейные размеры отнесены к некоторой характерной длине. Сплошные линии относятся к телу $T^{(0)}$, штриховые — к телу $T^{(1)}$. Кривые указывают форму сечений поверхности тела плоскостью $z^{(i)} = -d$, перпендикулярной направлению набегающего потока ($x^{(i)} \geq 0$, $y^{(i)} \geq 0$), и соответствуют, в порядке следования номеров, значениям d , равным 0, 1, 2. Видно, что преобразование, сохраняя сопротивление, существенно меняет форму тела.

Автор благодарит А. И. Бунимовича за внимание к работе и полезное обсуждение.

Поступила 11 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Обобщенные законы подобия при обтекании тел в условиях «закона локальности». ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
2. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Обобщенные законы подобия при обтекании пространственных тел. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Л. К. М а р т и н с о н

(Москва)

В приближении теплового пограничного слоя решается задача конвективного теплопереноса в идеальной жидкости, обтекающей нагретое тело, в случае, когда коэффициент теплопроводности жидкости зависит от температуры степенным образом. Показано существование на конечном расстоянии от нагретого тела стационарной поверхности, отделяющей область возмущения от невозмущенной области, куда тепловые возмущения от нагретого тела не проникают.

Рассмотрим нагретое цилиндрическое тело, сечение S которого в плоскости xu ограничено контуром $\partial\Omega$. Пусть это тело помещено в однородный поток идеальной несжимаемой жидкости, движущейся в направлении оси x . Обтекаемое тело вносит возмущение и нарушает однородность потока. Будем считать возникающее при обтекании тела течение потенциальным и обозначим через $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ потенциал скорости и функцию тока для этого течения, имеющие размерность длины. Учитывая, что для заданного контура $\partial\Omega$ эти функции могут быть найдены методами функций комплексного переменного [1], будем считать функции φ и ψ известными, причем компонен-

ты скорости жидкости выражаются через φ и ψ соотношениями

$$(1) \quad v_x = v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

В общем случае на контуре $\partial\Omega$ положим функцию ψ равной нулю, а значение потенциала скорости φ на $\partial\Omega$ будем считать известным и изменяющимся от нуля в точке разветвления потока до некоторого значения L в точке схода потока.

Решая задачу конвективного теплопереноса в движущейся жидкости, будем считать температуру набегающего потока равной нулю, а температуру на поверхности цилиндра известной функцией $u = f(P)$, $P \in \partial\Omega$. При этом требуется определить температурное поле в жидкости.

Решение поставленной задачи в рамках [линейной] теории теплопроводности рассматривалось в работе [2]. В данной работе исследуется теплоперенос в нелинейной среде, когда коэффициент теплопроводности жидкости k зависит от температуры по степенному закону

$$(2) \quad k = k_0 (u / u_0)^\sigma, \quad k_0, \sigma > 0$$

где u_0 — характерная температура поверхности обтекаемого тела.

Расчет стационарного температурного поля в движущейся жидкости сводится в этом случае к решению нелинейной краевой задачи в области $\Omega = R^2 \setminus S$, которая имеет вид [3]

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(uv) &= k_0 (\rho c)^{-1} \operatorname{div} [(u / u_0)^\sigma \operatorname{grad} u] \\ u &= f(P), \quad P \in \partial\Omega \\ u &\rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

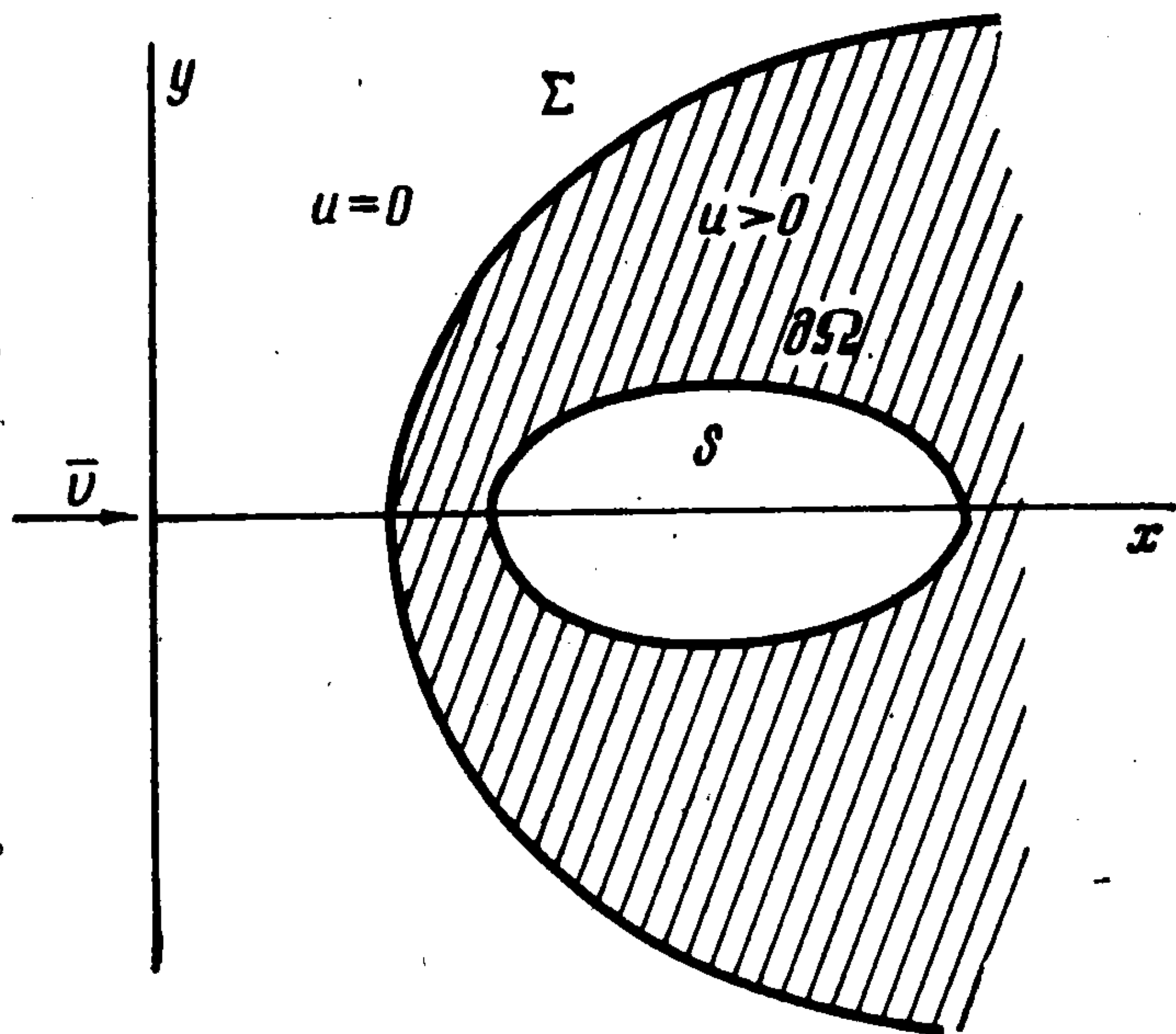
Здесь ρ — плотность, c — удельная теплоемкость жидкости.

Как было показано в [4, 5], в рассматриваемой нелинейной среде скорость распространения тепловых возмущений конечна, причем по мере удаления фронта тепловой волны от тела скорость его движения уменьшается. Учитывая, что в движущейся нелинейной среде скорость распространения фронта тепловой волны уменьшается в направлениях, встречных направлению движения среды [6], можно ожидать, что в этих направлениях тепловая волна проникнет в движущуюся среду лишь на конечную глубину. В стационарной задаче (3) это приведет к появлению вблизи нагретого тела некоторой стационарной поверхности (линии в плоскости xy) возмущения Σ , отделяющей область, куда проникли тепловые возмущения от тела и $u > 0$, от невозмущенной области, где $u = 0$ (см. фиг. 1, на которой область возмущения заштрихована).

Такой эффект в тепловой задаче для движущейся нелинейной среды аналогичен эффекту образования стационарной поверхности возмущения при сверхзвуковом обтекании тела потоком сжимаемого газа или эффекту образования такой поверхности при движении заряженной частицы со скоростью, превышающей скорость распространения электромагнитных возмущений в среде (в обоих случаях именно конечная скорость распространения возмущений является существенным фактором).

Совершим преобразование Буссинеска $(x, y) \rightarrow (\varphi, \psi)$. Тогда, вводя безразмерные величины $u' = u / u_0$, $\varphi' = \varphi / L$, $\psi' = \psi / L$ (в дальнейшем штрихи у безразмерных величин опускаются), перейдем от задачи (3) к нелинейной задаче

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\operatorname{Pe}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right], \quad \operatorname{Pe} = \frac{v_0 L}{k_0 (\rho c)^{-1}} \\ u &= F^\pm(\varphi), \quad \psi = 0 \pm 0, \quad 0 < \varphi < 1 \\ u &\rightarrow 0, \quad \varphi^2 + \psi^2 \rightarrow +\infty \end{aligned}$$



Фиг. 1

Решение задачи (4) проведем в приближении теплового пограничного слоя, считая выполненным условие $Pe \gg 1$, где Pe — число Пекле. Задача (4) сводится к следующей задаче для функции $u(\varphi, \psi)$ в области $R_+^2 = \{(\varphi, \psi): \varphi \geq 0, \psi \geq 0\}$:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \\ u &= F^+(\varphi), \quad \psi = 0, \quad \varphi > 0 \\ u &= 0, \quad \varphi = 0 \\ u &\rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

и к аналогичной задаче в области $R_-^2 = \{(\varphi, \psi): \varphi \geq 0, \psi \leq 0\}$.

Задача (5) с физической точки зрения соответствует задаче о тепловом пограничном слое вблизи полуграниченной нагретой пластины, помещенной в однородный поток идеальной несжимаемой жидкости, движущейся параллельно поверхности пластины. При этом коэффициент теплопроводности жидкости зависит от температуры по степенному закону.

Из результатов работы [7] следует, что решение задачи (5) при $\sigma \neq 0$ для случая степенной зависимости $F^+(\varphi) = \varphi^\alpha$ может быть представлено в виде асимптотического разложения

$$(6) \quad u(\varphi, \psi) = \begin{cases} \varphi^\alpha \left(1 - \frac{\psi}{\Lambda \varphi^m}\right)^{1/\sigma} B^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(1 - \frac{\psi}{\Lambda \varphi^m}\right)^i, & \psi < \Lambda \varphi^m \\ 0, & \psi \geq \Lambda \varphi^m \end{cases}$$

$$m = \frac{\alpha\sigma + 1}{2}, \quad B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i, \quad \Lambda^2 = [m\sigma B^\sigma Pe]^{-1}$$

Коэффициенты $b_i = b_i(\sigma, \alpha)$ являются коэффициентами разложения в ряд вблизи точки $\xi = 1$ некоторой функции

$$f(\xi) = B^{-1} (1 - \xi)^{1/\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} b_i (1 - \xi)^i$$

удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению и граничным условиям

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha f - m\xi \frac{df}{d\xi} &= m\sigma B^\sigma \frac{d}{d\xi} \left[f^\sigma \frac{df}{d\xi} \right] \\ f(0) &= 1, \quad f(1) = 0 \end{aligned}$$

Из (7) могут быть найдены некоторые рекуррентные соотношения, из которых находятся коэффициенты b_i . В частности [7]

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{\alpha\sigma - m}{2m\sigma(\sigma + 1)}, \quad b_2 = -b_1 \frac{1 + 0.5b_1(6\sigma^2 + \sigma - 3)}{3(2\sigma + 1)}$$

Особо можно выделить случай $\alpha = \sigma^{-1}$, когда для $i \geq 1$ все $b_i = 0$, и точное решение задачи (5) может быть записано в простой аналитической форме

$$u(\varphi, \psi) = \begin{cases} \varphi^{1/\sigma} (1 - \psi/(\lambda\varphi))^{1/\sigma}, & \psi < \lambda\varphi \\ 0, & \psi \geq \lambda\varphi \end{cases} \quad (\lambda = (\sigma Pe)^{-1/2})$$

Из вида решения (6) следует, что в движущейся нелинейной среде ($\sigma > 0$) существует стационарная поверхность (линия на плоскостях xu или $\varphi\psi$), отделяющая область возмущения вблизи нагретого тела, где $u > 0$, от невозмущенной области, где $u = 0$.

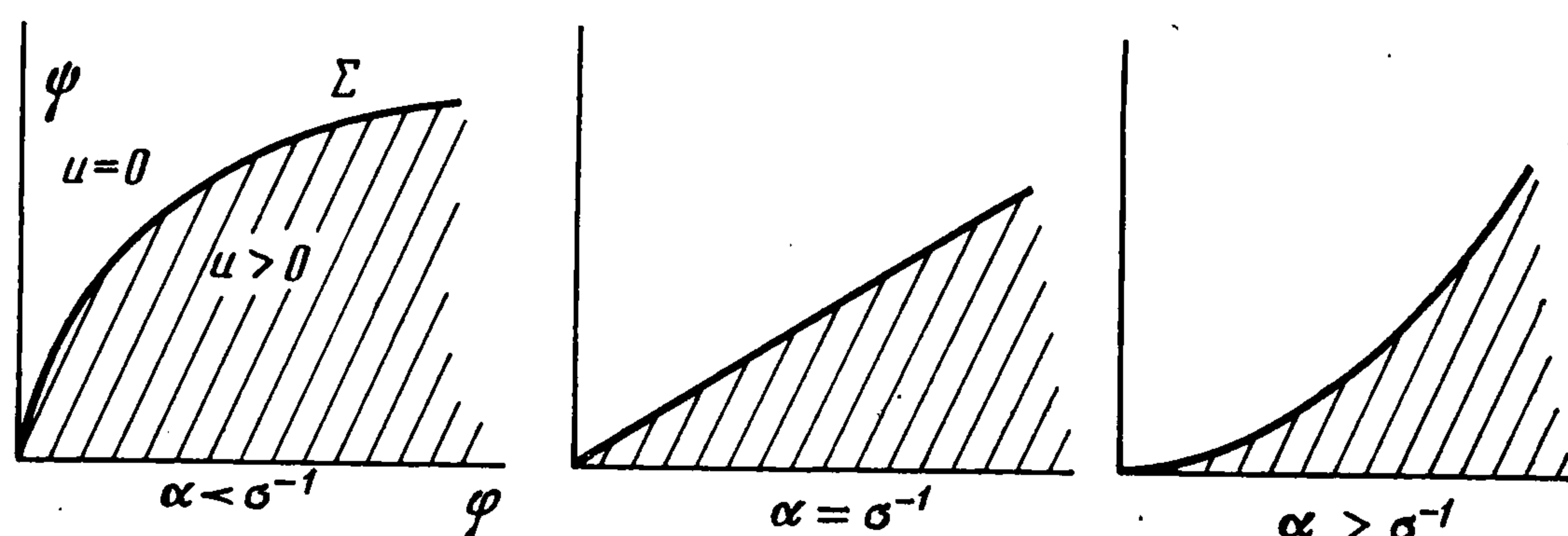
На плоскости $\varphi\psi$ уравнение этой линии имеет вид

$$\psi = \Lambda \varphi^m, \quad m = 1/2 (\alpha\sigma + 1) > 0$$

Отметим, что на поверхности возмущения, которая в общем случае является поверхностью слабого разрыва функции u , выполнены условия непрерывности температуры и теплового потока.

На фиг. 2 для разных значений показателя степени α , соответствующих различным законам изменения температуры по поверхности тела, изображен качественный вид линии возмущения, определяющий форму теплового пограничного слоя. Видно, что для заданного значения α изменение параметра нелинейности σ существенно влияет на пространственную структуру теплового пограничного слоя.

С физической точки зрения наличие такой стационарной поверхности возмущения означает конечную толщину теплового пограничного слоя вблизи нагретого тела. Это



Фиг. 2

обусловлено тем, что в нелинейной среде тепловые возмущения распространяются с конечной скоростью и за счет движения среды сносятся вниз по потоку, проникая в движущуюся среду в направлении ψ лишь на конечное расстояние.

С увеличением числа Пекле толщина теплового пограничного слоя уменьшается. С другой стороны, при $\sigma \rightarrow 0$ имеем $\Lambda \rightarrow +\infty$, и температура в жидкости с постоянным коэффициентом теплопроводности стремится к нулю лишь асимптотически на бесконечности. Это связано с тем, что в такой линейной среде тепловые возмущения от пластины, распространяющиеся с бесконечной скоростью, проникают в движущуюся среду неограниченно далеко.

Найденное распределение температуры в тепловом пограничном слое (6) позволяет оценить интенсивность конвективной теплопередачи в рассматриваемой задаче. Для простоты ограничимся анализом случая $\alpha = 0$, когда температура поверхности обтекаемого тела постоянна и равна u_0 .

Локальный тепловой поток q на поверхности пластины в случае $\alpha = 0$ может быть найден из соотношения

$$(8) \quad q = - \frac{k_0 u_0}{L \Lambda \sqrt{\varphi}} \left(\frac{df}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=0} = \frac{k_0 u_0}{L \Lambda B \sqrt{\varphi}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(i + \frac{1}{\sigma} \right)$$

Интегрирование теплоотдачи по длине L на верхней поверхности пластины с учетом (8) приводит к следующему выражению для интегрального числа Нуссельта:

$$(9) \quad \text{Nu}(\sigma) = \frac{Q}{k_0 u_0} = \frac{2}{B \Lambda} \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(i + \frac{1}{\sigma} \right) = \text{Nu}(0) \sqrt{\frac{\pi B^{\sigma-2}}{2\sigma}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i (1 + i\sigma)$$

Здесь $\text{Nu}(0) = 2\sqrt{\text{Re}/\pi}$ — число Нуссельта при обтекании пластины жидкостью с постоянным коэффициентом теплопроводности.

В частности, для $\sigma = 1$ коэффициенты b_i имеют следующие значения [8]: $b_0 = 1$, $b_1 = -0.25$, $b_2 = 0.014$, $b_3 = 0.0069$, $b_4 = -0.0064$. Поэтому из (9) находим, что $\text{Nu}(1) / \text{Nu}(0) = 0.77$. Аналогичный расчет для $\sigma = 4$ дает $\text{Nu}(4) / \text{Nu}(0) = 0.56$.

Заметим, что решение задачи (5) о тепловом пограничном слое, являясь главным членом асимптотики задачи (4) по параметру Re^{-1} , не описывает температурного поля вблизи критической точки разветвления потока, которое должно находиться из точного решения задачи (4). Это решение может быть найдено, например, численными методами по схемам, предложенным в [7]. Используя результаты работы [6], можно

оценить ширину области возмущения вблизи критической точки в зависимости от параметров задачи в виде $H \sim L\sigma^{-1}Re^{-1}$.

В заключение отметим, что задача (5) в приближении диффузионного пограничного слоя описывает также процесс массопереноса в движущейся среде, когда коэффициент диффузии — степенная функция концентрации.

Поступила 2 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
2. Борзых А. А., Черепанов Г. П. Плоская задача теории конвективной теплопередачи и массообмена, ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1966.
4. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линъ. Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т. 22, № 5.
6. Граник И. С., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Температурные волны в движущихся средах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 5.
7. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4.
8. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.

УДК 539.3

О ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, АНАЛОГИЧНЫХ ОБОБЩЕННЫМ ФУНКЦИОНАЛАМ ТРЕФТЦА

В. Я. Терещенко

(Ростов-на-Дону)

Указывается возможный общий подход к построению выпуклых функционалов в вариационных задачах теории упругости, использующей множителя Лагранжа. Показано, что конструкция таких функционалов аналогична конструкции обобщенных функционалов Трефтца, построенных в [1] для основных граничных задач теории упругости. Обсуждается также минимизация таких функционалов, использующая идеи двойственности.

В [1] для основных граничных задач теории упругости построены обобщенные функционалы Трефтца, имеющие, например для второй граничной задачи теории упругости, вид

$$(1) \quad \Phi(u^*) = 2 \int_G W(u^*) dG + \frac{1}{\alpha} [\alpha \|u^*\|_{1/2, S} - \|t^{(v)}(u^*)\|_{-1/2, S}]^2 - \alpha \|u^*\|_{1/2, S}^2$$

$$\|t^{(v)}(u^*)\|_{-1/2, S} = \sup_{u^* \in W_2^{1/2}(S)} \frac{|\langle u^*, t^{(v)}(u^*) \rangle|}{\|u^*\|_{1/2, S}}$$

Здесь $u^*(x)$, $x \in \bar{G}$ — решения в обычном или обобщенном смысле уравнения теории упругости $Au^* = K(x)$, каждое из которых, как показано в [1], представимо в виде суммы $u^*(x) = u_0(x) + \varphi_0(x)$, где u_0 — энергетическое решение основной