

Если в результате решения сформулированной задачи будут найдены $\beta(t)$ и ω , доставляющие глобальный минимум функционалу (6), то (согласно условиям теоремы) это позволит сделать однозначный вывод об асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (4). Однако известные методы решения задач оптимального управления вида (6) позволяют исследовать только локальное поведение функционалов. Поэтому практически можно проверить только достаточные условия устойчивости.

Авторы благодарят В. Г. Демина за обсуждение полученных результатов.

Поступила 15 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кириченко Н. Ф.* Численный алгоритм определения устойчивости системы. Науч. конф. «Вычисл. матем. в современном научно-техническом прогрессе», Канев, 1974, стр. 291.
2. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и стабилизации движения. Изд-во Киевск. ун-та, 1973.
3. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем, М., «Наука», 1971, стр. 424.
4. *Quintana V. H., Davison E. I.* A numerical method for solving optimal control problems with unspecified terminal time. *Internat. Control*, 1973, vol. 17, No. 97—115.

УДК 533.69

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СИЛАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА РАЗЛИЧНЫЕ ПО ФОРМЕ ТЕЛА, ДВИЖУЩИЕСЯ В ГАЗЕ

А. В. Дубинский

(Москва)

Излагается метод построения пространственных тел, имеющих одинаковые коэффициенты сопротивления при обтекании в условиях гипотезы локального взаимодействия. Равенство характеристик сохраняется независимо от выбора функций, описывающих взаимодействие потока с поверхностью тела, т. е. при изменении режима обтекания.

1. В работах [1, 2] предложен метод пересчета аэродинамических характеристик тел при обтекании в условиях гипотезы локального взаимодействия, т. е. в предположении, что локальный коэффициент силы c_f , действующей со стороны потока на тело в данной точке поверхности, зависит лишь от местного угла между направлением набегающего потока v и ортом внутренней нормали n

$$(1.1) \quad c_f = \Omega_p (v \cdot n) \cdot n + \Omega_\tau (v \cdot n) \cdot \tau, \quad \tau = [v - n (v \cdot n)] / \sqrt{1 - (v \cdot n)^2}$$

где функции Ω_p , Ω_τ задают конкретную модель обтекания (аргументами могут служить также параметры, характеризующие процесс обтекания тела).

Метод, развитый в работах [1, 2], позволяет при заданных функциях Ω_p , Ω_τ строить классы соответственных тел, характеристики которых связаны линейными соотношениями; рассматривались плоские профили, тела вращения, некоторые типы пространственных тел.

Принципиальные особенности принятого в данной работе подхода, существенно расширяющие область применения, следующие: переход к рассмотрению пространственных тел и отказ от задания конкретного вида функций Ω_p , Ω_τ . Показано, что для пространственного тела можно построить класс соответственных тел, характеризующихся тем же значением коэффициента сопротивления в потоке, причем равенство сохраняется при изменении вида функций Ω_p , Ω_τ , т. е. при изменении режима обтекания

в рамках гипотезы локального взаимодействия. В результате появляется возможность расчета характеристик соответственных тел по результатам экспериментов, проведенных для исходного тела, без конкретизации модели обтекания; исходное и соответственное тела, существенно различаясь по форме, имеют одинаковые коэффициенты сопротивления (в широком диапазоне режимов обтекания), что расширяет возможности выбора рациональной формы летательного аппарата.

2. Выражение для сопротивления тела запишем в виде

$$(2.1) \quad F = S_0 q c_F = q \iint_{(S)} c_f \cdot v \, dS = q \iint_{(S)} \Omega (v \cdot n) \, dS, \quad \Omega(t) = t\Omega_p(t) + \sqrt{1-t^2}\Omega_\tau(t)$$

где S_0 — характерная площадь, c_F — коэффициент сопротивления тела, q — скоростной напор.

Рассмотрим два тела $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ (здесь и далее индекс в скобках указывает номер тела); пусть форма тела $T^{(i)}$ задается в декартовых координатах вектором $r^{(i)}$ (α, β), причем $(\alpha, \beta) \in (\sigma_{\alpha\beta})$. Тогда выражение для силы сопротивления можно записать в форме (знак обеспечивает выбор внутренней нормали к поверхности)

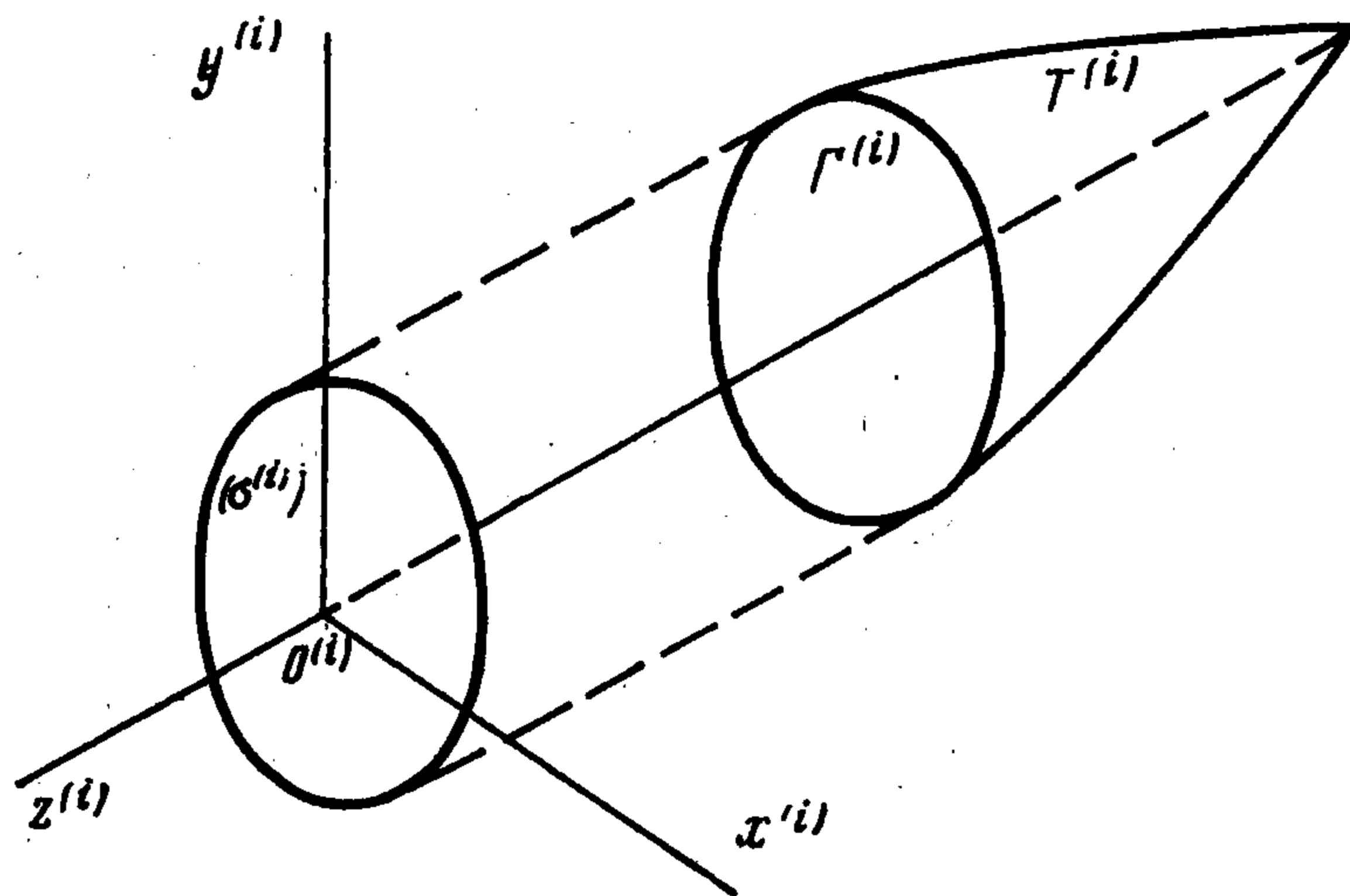
$$(2.2) \quad F^{(i)} = S_0^{(i)} q c_F^{(i)} = q \iint_{(\sigma_{\alpha\beta})} \Omega \left[\pm \frac{v^{(i)} r_\alpha^{(i)} r_\beta^{(i)}}{|r_\alpha^{(i)} \times r_\beta^{(i)}|} \right] |r_\alpha^{(i)} \times r_\beta^{(i)}| \, d\alpha \, d\beta$$

Цель исследования — выявление соответствия между формой поверхности тел $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$, обеспечивающего при изменении функции Ω сохранение отношения их сопротивлений

$$(2.3) \quad F^{(1)} / F^{(0)} = k$$

Такие тела будем называть соответственными.

Укажем вначале на простейший случай, когда форма тел такова, что $v^{(i)} \cdot n^{(i)} = \mu = \text{const}$. Тогда из соотношения (2.2) следует, что условие (2.3) для этих тел вы-



Фиг. 1

полняется, причем $k = S^{(1)} / S^{(0)}$, где $S^{(i)}$ — площадь «смачиваемой» поверхности (поверхности, где $\Omega \neq 0$).

В общем случае условие (2.3) выполняется независимо от выбора функции Ω , если удовлетворяется система условий

$$(2.4) \quad \begin{aligned} |r_\alpha^{(1)} \times r_\beta^{(1)}| &= k |r_\alpha^{(0)} \times r_\beta^{(0)}| \\ \frac{v^{(1)} r_\alpha^{(1)} r_\beta^{(1)}}{|r_\alpha^{(1)} \times r_\beta^{(1)}|} &= \pm \frac{v^{(0)} r_\alpha^{(0)} r_\beta^{(0)}}{|r_\alpha^{(0)} \times r_\beta^{(0)}|} \end{aligned}$$

Из первого равенства (2.4) вытекает соотношение

$$(2.5) \quad S^{(1)} = kS^{(0)}$$

связывающее площади смачиваемых поверхностей соответственных тел.

3. Перейдем к вопросу о нахождении формы соответственного тела $T^{(0)}$, если известна форма тела $T^{(1)}$. Выберем систему координат (фиг. 1), связанную с телом, таким образом, чтобы направление оси $O^{(i)}z^{(i)}$ совпадало с направлением $v^{(i)}$. Уравнение $z = z(x, y)$ определяет поверхность тела $T^{(0)}$ (нулевой индекс будем опускать); форма поверхности тела $T^{(1)}$ задается параметрическим уравнением $x^{(1)} = x^{(1)}(x, y)$, $y^{(1)} = y^{(1)}(x, y)$, $z^{(1)} = z^{(1)}[x^{(1)}(x, y), y^{(1)}(x, y)]$. Положив $\alpha = x$, $\beta = y$, условия (2.4) можно записать в виде

$$(3.1) \quad x_x^{(1)}y_y^{(1)} - x_y^{(1)}y_x^{(1)} = k$$

$$(3.2) \quad z_x^2 + z_y^2 = [z_{x^{(1)}}^{(1)2} + z_{y^{(1)}}^{(1)2}]_{x^{(1)}=x^{(1)}(x, y), y^{(1)}=y^{(1)}(x, y)}$$

$$x_\delta^{(i)} = \partial x^{(i)} / \partial \delta, \quad y_\delta^{(i)} = \partial y^{(i)} / \partial \delta, \quad z_\delta^{(i)} = \partial z^{(i)} / \partial \delta, \quad \delta = x, y, x^{(1)}, y^{(1)}$$

Обозначим проекцию поверхности тела, задаваемой однозначной функцией $z^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$, на плоскость $z^{(i)} = 0$ через $(\sigma^{(i)})$; $(\sigma^{(i)})$ — также проекция миделевого сечения тела. Тогда функции $x^{(1)}(x, y)$, $y^{(1)}(x, y)$ задают преобразование области $(\sigma^{(0)})$ в $(\sigma^{(1)})$, причем из равенства (3.1) вытекает соотношение

$$(3.3) \quad \sigma^{(1)} = k\sigma^{(0)}$$

Сравнивая (2.2), (2.3), (3.3), можно заключить, что коэффициенты сопротивления соответственных тел равны, если в качестве характерной площади выбрать площадь смачиваемой поверхности либо ее проекцию на плоскость, перпендикулярную направлению потока. Соотношения (2.3), (2.5) могут использоваться для пересчета эффективного числа Рейнольдса для соответственного тела.

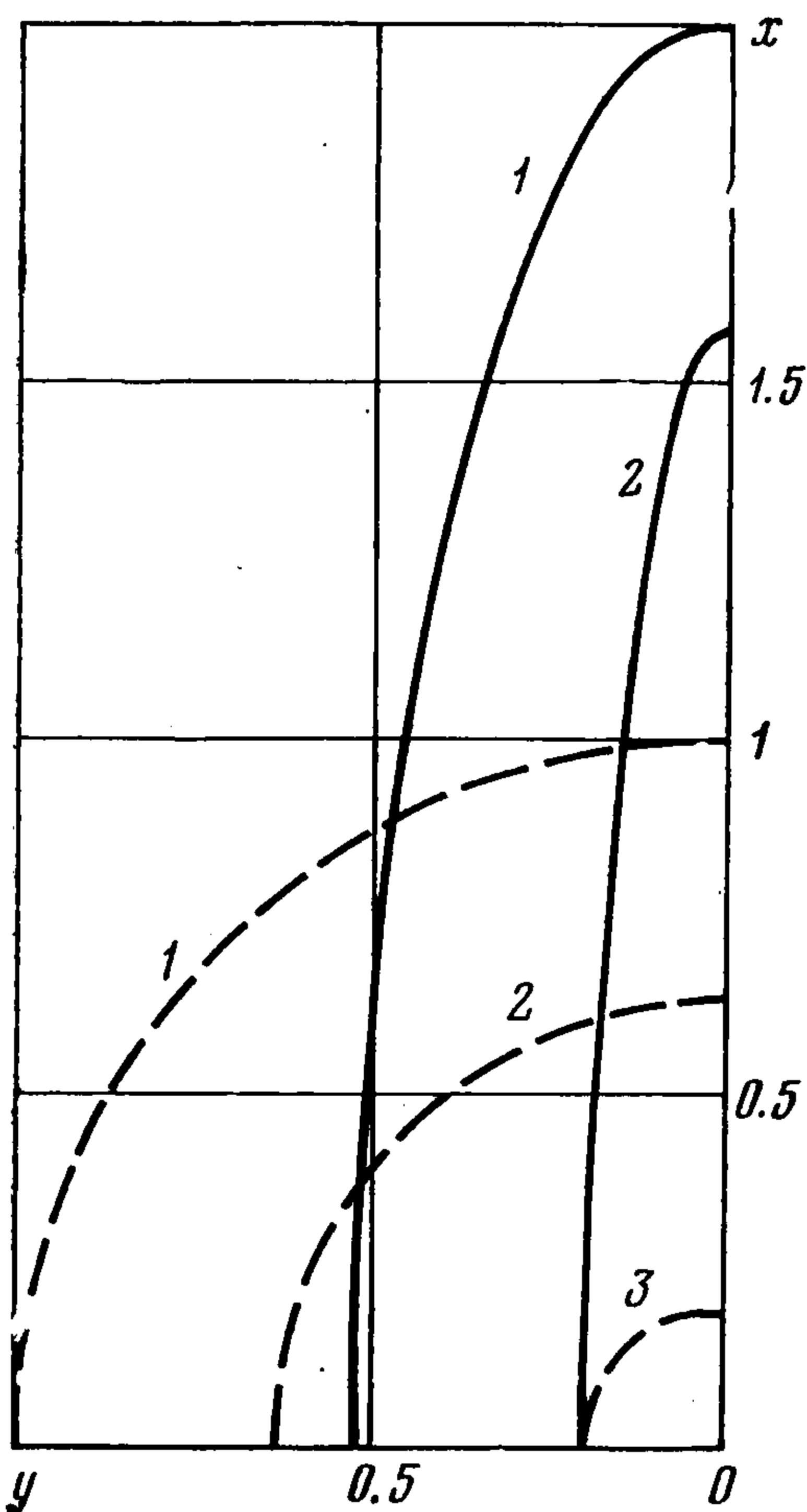
Процедура нахождения соответственного тела сводится к следующему. Пусть задано уравнение поверхности тела $T^{(1)}$, которая ограничена контуром $\Gamma^{(1)}$; проекция $\Gamma^{(1)}$ на плоскость $z^{(1)} = 0$ (замкнутая кривая $\gamma^{(1)}$) ограничивает область $(\sigma^{(1)})$. Задана также форма миделевого сечения соответственного тела $\Gamma^{(0)}$. Тогда, если найдено преобразование $x^{(1)} = x^{(1)}(x, y)$, $y^{(1)} = y^{(1)}(x, y)$, переводящее $(\sigma^{(0)})$ в $(\sigma^{(1)})$ и $(\gamma^{(0)})$ в $(\gamma^{(1)})$, то поверхность соответственного тела находится в результате решения уравнения (3.2); она должна проходить через контур $\Gamma^{(0)}$ (задача Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка).

Отметим, что в качестве показателя F в выражении (2.1) могут быть рассмотрены различные характеристики (например, другие составляющие аэродинамической силы), возможно обобщение на более общие случаи представления показателя F .

4. В качестве примера рассмотрим класс соответственных тел, порождаемый преобразованием

$$x^{(1)} = Ax, \quad y^{(1)} = By, \quad A = a\sqrt{k}, \quad B = \sqrt{k}/a$$

и предположим, что контур $\Gamma^{(i)}$, ограничивающий миделево сечение тела $T^{(i)}$, лежит в плоскости $z^{(i)} = 0$. Такое преобразование переводит, в частности, тела вращения в тела с эллиптической формой миделевого сечения.



Фиг. 2

Пусть исходное тело образовано вращением дуги параболы, уравнение его поверхности имеет вид

$$z^{(1)} = 1/2 \left(\sqrt{x^{(1)2} + y^{(1)2}} + \theta \right)^2 - 1/2 (1 + \theta)^2$$

Тогда уравнение поверхности тела $T^{(0)}$ определяется как решение задачи

$$\begin{aligned} z_x^2 + z_y^2 &= A^2 x^2 + B^2 y^2 \\ z = 0, \quad x &= x_0(t), \quad y = y_0(t) \quad A^2 x_0^2 + B^2 y_0^2 = 1 \end{aligned}$$

которое в предположении тонкости тела в направлении Oy имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{z}(\bar{x}, \bar{y}) &= |\bar{y}| \left(1/2 \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \theta \right) - (1/2 - \theta) \sqrt{1 - \bar{x}^2} + \\ &+ \bar{x}^2 \ln \frac{|\bar{y}| + \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{x}^2}}, \quad \bar{z} = Bz, \quad \bar{x} = Ax, \quad \bar{y} = By \end{aligned}$$

Форма тел, имеющих одинаковое сопротивление, показана на фиг. 2 ($k = 1$, $a = 0.5$, $\theta = 2.5$); все линейные размеры отнесены к некоторой характерной длине. Сплошные линии относятся к телу $T^{(0)}$, штриховые — к телу $T^{(1)}$. Кривые указывают форму сечений поверхности тела плоскостью $z^{(i)} = -d$, перпендикулярной направлению набегающего потока ($x^{(i)} \geq 0$, $y^{(i)} \geq 0$), и соответствуют, в порядке следования номеров, значениям d , равным 0, 1, 2. Видно, что преобразование, сохраняя сопротивление, существенно меняет форму тела.

Автор благодарит А. И. Бунимовича за внимание к работе и полезное обсуждение.

Поступила 11 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Обобщенные законы подобия при обтекании тел в условиях «закона локальности». ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
2. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Обобщенные законы подобия при обтекании пространственных тел. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Л. К. М а р т и н с о н

(Москва)

В приближении теплового пограничного слоя решается задача конвективного теплопереноса в идеальной жидкости, обтекающей нагретое тело, в случае, когда коэффициент теплопроводности жидкости зависит от температуры степенным образом. Показано существование на конечном расстоянии от нагретого тела стационарной поверхности, отделяющей область возмущения от невозмущенной области, куда тепловые возмущения от нагретого тела не проникают.

Рассмотрим нагретое цилиндрическое тело, сечение S которого в плоскости xu ограничено контуром $\partial\Omega$. Пусть это тело помещено в однородный поток идеальной несжимаемой жидкости, движущейся в направлении оси x . Обтекаемое тело вносит возмущение и нарушает однородность потока. Будем считать возникающее при обтекании тела течение потенциальным и обозначим через $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ потенциал скорости и функцию тока для этого течения, имеющие размерность длины. Учитывая, что для заданного контура $\partial\Omega$ эти функции могут быть найдены методами функций комплексного переменного [1], будем считать функции φ и ψ известными, причем компонен-