УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

И. П. Ковальский, Г. И. Кудин

(Киев)

Исследуется асимптотическая устойчивость движения механических объектов, параметры математических моделей которых претерпевают резкие изменения во времени. Примером может служить спутник на орбите, к которому присоединяются или отделяются некоторые массы. Возникает задача выбора такого режима изменения математических моделей, при котором система была бы асимптотически устойчива.

Пусть механическое движение объекта описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$dx/dt = A(\beta)\,x, \quad t \geqslant t_0 \tag{1}$$

Здесь x — фазовый вектор размеренности n; β — неизвестная вектор-функция, компоненты которой $\beta_i = \beta_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, I)$ — кусочно-постоянные функции, непрерывные справа в точках разрыва и принимающие значения из замкнутых интервалов $[a_i, b_i]$ при $t \geqslant t_0$, a_i, b_i — известные постоянные; $A(\beta) = \{a_{ij}(\beta)\}_{i,\,j=1}^{n}$ — $n \times n$-матрица, компоненты которой непрерывно дифференцируемы по β.

При сделанных предположениях матрица $A(\beta(t))$ кусочно-постоянная по t для всех $t \geqslant t_0$, так как существует единственное непрерывное решение задачи Коши для системы уравнений (1) на любой реализации $\beta(t)$.

Пусть $\Omega(t_0, T)$ — множество ограниченных кусочно-постоянных вектор-функций

$$\Omega(t_0, T) = \{g(t)\colon g(t) = (g_1(t), \ldots, g_I(t)), -\infty < a_i \leqslant g_i(t) \leqslant b_i < \infty,$$
$$t \in [t_0, T],\ i = 1, 2, \ldots, I\}$$

Теорема. Для асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$ системы (1) необходимо и достаточно, чтобы существовал такой конечный момент времени $T \geqslant t_0$, для которого выполняется условие

$$\max_{\beta \in \Omega(t_0,\, T)} \sum_{l,\,k=1}^{n} X_{lk}^2(\beta, T, t_0) < 1 \tag{2}$$

где X_{lk} — компоненты матрицы фундаментальной системы решений $X(\beta, T, t_0)$ системы (1).

Достаточность условий теоремы может быть доказана аналогично доказательству теоремы 4 работы [1].

Необходимость. Пусть невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво, однако не существует конечного $T > t_0$, для которого выполняется условие (2). Тогда для любого $\tau > t_0$ существует хотя бы одна вектор-функция $\beta(t)$, $t \in [t_0, \tau]$, такая, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} X_{ij}^2(\beta, \tau, t_0) \geqslant 1 \tag{3}$$

Если $x(t_0) \in G_\lambda = \{x\colon x^*x \leqslant \lambda^2\}$ при $t = t_0$,
то при $t = \tau$

$$x(\tau) \in Q = \{x\colon x^* R(\beta, \tau, t_0)\, x \leqslant \lambda^2\}$$
$$R(\beta, \tau, t_0) = X^{-1*}(\beta, \tau, t_0)\, X^{-1}(\beta, \tau, t_0)$$

Множество Q в фазовом пространстве представляет собой эллипсоид, для которого справедливы равенства [2]

$$\max_{x \in Q} (e_i^* x)^2 = e_i^* R^{-1}(\beta, \tau, t_0)\, e_i \lambda^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, I)$$

где e_i — координатный орт. Очевидно, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} X_{ij}^2(\beta, \tau, t_0) = \sum_{i=1}^{n} R_{ii}^{-1}(\beta, \tau, t_0)$$

Поэтому из неравенства (3) следует

$$\sum_{i=1}^{n} \max (e_i{}^* x)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} R_{ii}^{-1} (\beta, \tau, t_0) \geqslant \lambda^2$$

Таким образом, существует некоторый индекс i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, такой, что

$$\max_{x \in Q} (e_i x) \geqslant \frac{\lambda}{n}$$

В силу произвольности $\tau > t_0$ получено противоречие предположению об асимптотической устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ системы (1).

Обсудим вопрос о практической применимости условий теоремы. Можно показать, что матрица $R^{-1}(\beta, t, t_0)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dR^{-1}(\beta, t, t_0)}{dt} = A(\beta) R^{-1}(\beta, t, t_0) + R^{-1}(\beta, t, t_0) A^*(\beta) \tag{4}$$

$$R^{-1}(\beta, t_0, t_0) = E$$

Поэтому проверку условий теоремы можно свести к решению следующей задачи оптимального управления: найти оптимальную вектор-функцию $\beta(t)$ и минимальное конечное время $T > t_0$, которые минимизируют функционал

$$J(\beta, T) = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} R_{ii}^{-1} (\beta, T, t_0) \tag{5}$$

Введем преобразование [3]

$$t = \omega\tau + t_0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1$$

и обозначим

$$S^* = (R_{11}, \ldots, R_{n1}, R_{12}, \ldots, R_{n2}, \ldots, R_{nn})$$

$$C^* = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 1)$$

$$B(\beta) = \{G_{ij}(\beta)\}_{i, j=1}^{n}$$

$$G_{ij}(\beta) = \begin{cases} A(\beta) + a_{ii}(\beta) E, & i = j \\ a_{ij}(\beta) E, & i \neq j \end{cases}$$

что позволяет рассматривать вместо задачи (4), (5) задачу оптимального управления с дополнительным управляющим параметром ω, но с фиксированным временем управления для системы скалярных уравнений

$$\min_{\omega} \min_{\beta \in \Omega(0,1)} [C^* S(1)]^{-1} \tag{6}$$

$$\frac{dS}{d\tau} = \omega B(\beta) S, \quad S(0) = C$$

Для решения задачи (6) можно применить следующий градиентный метод:

$$\beta^{i+1}(\tau) = \mathrm{Pr}_{\Omega(0,1)} \left(\beta^i(\tau) + \alpha_1 \frac{\partial H}{\partial \beta}\right)$$

$$\omega^{i+1} = \omega^i + \alpha_2 \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \omega} d\tau$$

где α_1, α_2 — положительные скалярные постоянные, определяемые, как и в градиентном методе наискорейшего спуска, путем минимизации функции $J(\beta^{i+1}, \omega^{i+1})$; $H(S, \beta, \psi, \omega) = \omega\psi^* BS$ — гамильтониан, $\psi(\tau)$ — вектор сопряженной системы

$$d\psi/d\tau = -\partial H/\partial S, \quad \psi(1) = C$$

$\mathrm{Pr}\Omega(0,1)$ — оператор проектирования на множество $\Omega(0, 1)$.

Сходимость рассмотренного градиентного метода зависит от вида зависимости $A(\beta(t))$ и обсуждалась в работах [3, 4].

Если в результате решения сформулированной задачи будут найдены $\beta(t)$ и ω, доставляющие глобальный минимум функционалу (6), то (согласно условиям теоремы) это позволит сделать однозначный вывод об асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (4). Однако известные методы решения задач оптимального управления вида (6) позволяют исследовать только локальное поведение функционалов. Поэтому практически можно проверить только достаточные условия устойчивости.

Авторы благодарят В. Г. Демина за обсуждение полученных результатов.

Поступила 15 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кириченко Н. Ф.* Численный алгоритм определения устойчивости системы. Науч. конф. «Вычисл. матем. в современном научно-техническом прогрессе», Канев, 1974, стр. 291.
2. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и стабилизации движения. Изд-во Киевск. ун-та, 1973.
3. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем, М., «Наука», 1971, стр. 424.
4. *Quintana V. H., Davison E. I.* A numerical method for solving optimal control problems with unspecified terminal time. Interntat. Control, 1973, vol. 17, No. 97—115.

УДК 533.69

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СИЛАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА РАЗЛИЧНЫЕ ПО ФОРМЕ ТЕЛА, ДВИЖУЩИЕСЯ В ГАЗЕ

А. В. Дубинский

(Москва)

Излагается метод построения пространственных тел, имеющих одинаковые коэффициенты сопротивления при обтекании в условиях гипотезы локального взаимодействия. Равенство характеристик сохраняется независимо от выбора функций, описывающих взаимодействие потока с поверхностью тела, т. е. при изменении режима обтекания.

1. В работах [1,2] предложен метод пересчета аэродинамических характеристик тел при обтекании в условиях гипотезы локального взаимодействия, т. е. в предположении, что локальный коэффициент силы $\mathbf{c}_f$, действующей со стороны потока на тело в данной точке поверхности, зависит лишь от местного угла между направлением набегающего потока $\mathbf{v}$ и ортом внутренней нормали $\mathbf{n}$

$$\mathbf{c}_f = \Omega_p(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} + \Omega_\tau(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = [\mathbf{v} - \mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})] \,/\, \sqrt{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^2} \tag{1.1}$$

где функции Ω_p, Ω_τ задают конкретную модель обтекания (аргументами могут служить также параметры, характеризующие процесс обтекания тела).

Метод, развитый в работах [1,2], позволяет при заданных функциях Ω_p, Ω_τ строить классы соответственных тел, характеристики которых связаны линейными соотношениями; рассматривались плоские профили, тела вращения, некоторые типы пространственных тел.

Принципиальные особенности принятого в данной работе подхода, существенно расширяющие область применения, следующие: переход к рассмотрению пространственных тел и отказ от задания конкретного вида функций Ω_p, Ω_τ. Показано, что для пространственного тела можно построить класс соответственных тел, характеризующихся тем же значением коэффициента сопротивления в потоке, причем равенство сохраняется при изменении вида функций Ω_p, Ω_τ, т. е. при изменении режима обтекания