УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Л. К. Кузьмина

(Казань)

Рассматриваются системы гироскопической стабилизации как электромеханические системы с учетом некоторых реальных свойств их элементов. Исследуется устойчивость установившегося движения при постоянно действующих возмущениях определенного типа.

В работе [1] решалась задача об устойчивости установившегося движения системы гироскопической стабилизации при параметрических возмущениях. Однако для приложений важно рассмотреть вопрос об устойчивости и при постоянно действующих возмущениях. На основании результатов работы [1] можно предположить, что малые (в определенном смысле) возмущения, действующие по электрическим обобщенным координатам и по части механических обобщенных координат, не должны нарушить устойчивость (являются несущественными). Это положение, требующее дополнительного исследования, обосновывается в данной работе.

1. Будем рассматривать систему гироскопической стабилизации, моделируя ее, как в работе [1], электромеханической системой на неподвижном основании. Дифференциальные уравнения возмущенного движения, полученные в [1], для принятой модели имеют вид

$$\frac{d}{dt} a\mathbf{q}_M^{\bullet} + (b^\circ + g^\circ)\,\mathbf{q}_M^{\bullet} = \mathbf{Q}_M' + \mathbf{Q}_M'' + \mathbf{\Phi}_M \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt} L\mathbf{q}_E^{\bullet} + B^\circ \mathbf{q}_3^{\bullet} = \mathbf{Q}_E' + \mathbf{Q}_E'' + \mathbf{\Phi}_E, \quad \frac{d\mathbf{q}_M}{dt} = \mathbf{q}_M^{\bullet}$$

$$\mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_E^{\bullet}) = \begin{Vmatrix} 0 \\ A^\circ \mathbf{q}_E^{\bullet} \\ -c^\circ \mathbf{q}_4 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{Q}_E'(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_E^{\bullet}) = -\begin{Vmatrix} \omega^\circ \mathbf{q}_1 + R_1^\circ \mathbf{q}_E^{\bullet} \\ (R_2^\circ + \Omega^\circ)\,\mathbf{q}_E^{\bullet} \\ R_3^\circ \mathbf{q}_E^{\bullet} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_M = \begin{Vmatrix} \mathbf{\Phi}_{1M} \\ \mathbf{\Phi}_{2M} \end{Vmatrix}$$

Здесь $\mathbf{\Phi}_M = \mathbf{\Phi}_M(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_M^{\bullet}, \mathbf{q}_E^{\bullet}, t)$ и $\mathbf{\Phi}_E = \mathbf{\Phi}_E(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_M^{\bullet}, \mathbf{q}_E^{\bullet}, t)$ — соответственно n- и u-мерные векторные функции, характеризующие постоянно действующие возмущения; в остальном сохранены обозначения, принятые в [1]. При этом функции $\mathbf{\Phi}_M$ и $\mathbf{\Phi}_E$ полагаем такими, что в каждой точке рассматриваемой области существует единственное решение уравнений (1.1).

Нулевое решение системы (1.1) без возмущений определяет установившееся движение, устойчивость которого будем исследовать. Далее будем полагать, что возмущения, действующие на систему, приводят к появлению возмущающих сил только по части переменных, а именно: пусть первые m компонент вектора $\mathbf{\Phi}_M$ равны нулю, т. е. $\mathbf{\Phi}_{1M} = 0$. Систему дифференциальных уравнений (1.1) (при сделанном предположении о векторе $\mathbf{\Phi}_M$) будем называть возмущенной системой, а систему уравнений, получающуюся из (1.1) при $\mathbf{\Phi}_M = 0$ и $\mathbf{\Phi}_E = 0$, — невозмущенной, обозначая последнюю (1.1′).

Введем новые переменные с помощью неособенного равномерно-регулярного преобразования [1]

$$\mathbf{z} = a_1\mathbf{q}_M^{\bullet} + (b_1^\circ + g_1^\circ)\,\mathbf{q}_M, \quad \mathbf{x}_1 = a\mathbf{q}_M^{\bullet}, \quad \mathbf{x}_2 = L\mathbf{q}_E^{\bullet}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{x}_4 = \mathbf{q}_4$$

Уравнения (1.1) в новых переменных

$$
\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = P\mathbf{x} + \mathbf{X} + \Phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{x}) \tag{1.2}
$$

$$
P = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} -(b^\circ + g^\circ)\, d^\circ & \begin{array}{c} 0 \\ A^\circ L^{-1} \\ 0 \end{array} & 0 & \begin{array}{c} 0 \\ -c^\circ \end{array} \\ \hline -E^\circ & -R^\circ L^{-1} & \begin{array}{c} -\omega^\circ \\ 0 \end{array} & \\ \cline{1-3} \begin{array}{c} d_1^\circ \\ d_4^\circ \end{array} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{x} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{array} \right\|, \quad R^\circ = \left\| \begin{array}{c} R_1^\circ \\ R_2^\circ + \Omega^\circ \\ R_3^\circ \end{array} \right\|
$$

Здесь $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$ — m-, $(2n + u - m)$-мерные векторы соответственно; $\mathbf{Z} = \beta \mathbf{x}_1$, $\mathbf{X} = \gamma \mathbf{x}$, где $\beta = \| \beta_{kj}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \|$ и $\gamma = \| \gamma_{rs}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \|$ — матрицы размерами $m \times n$ и $(2n + u - m) \times (2n + u - m)$ соответственно.

Невозмущенной системе (1.1') в новых переменных будет соответствовать система (1.2'), которая получается из (1.2) при $\Phi = 0$.

Будем называть далее переменную $\mathbf{x}$ основной, а переменную $\mathbf{z}$ — критической. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения невозмущенной системы при постоянно действующих возмущениях по части переменных (по основной переменной). Заметим, что для рассматриваемой системы имеет место критический (по Ляпунову [2]) случай m нулевых корней.

2. Пусть, как это обычно полагают при решении задачи об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [3,4], возмущения малы: $\| \Phi \| < \rho$, $\rho > 0$ — малое число. Тогда справедлива

Теорема 1. Если в системе (1.2) P — устойчивая матрица, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такие положительные числа η и ρ, что для любого решения системы (1.2) с начальными условиями

$$
\| \mathbf{z}(t_0) \| < \eta, \quad \| \mathbf{x}(t_0) \| < \eta
$$

при всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться неравенства

$$
\| \mathbf{z} \| < \varepsilon, \quad \| \mathbf{x} \| < \varepsilon
$$

при любых Φ, удовлетворяющих в рассматриваемой области соотношению

$$
\| \Phi \| < \rho \tag{2.1}
$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим решение уравнения

$$
d\mathbf{x} / dt = P\mathbf{x} + \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\zeta}(t), \mathbf{x}) + \Phi(t, \boldsymbol{\zeta}(t), \mathbf{x}) \tag{2.2}
$$

которое получается из уравнения системы (1.2) для основной переменной подстановкой $\mathbf{z} = \boldsymbol{\zeta}(t)$, где $\boldsymbol{\zeta}(t)$ — произвольная непрерывная функция со значениями из рассматриваемой области. При этом полагаем, что

$$
\| \boldsymbol{\zeta}(t_0) \| < \eta, \quad \| \mathbf{x}(t_0) \| < \eta, \quad 0 < \eta < \varepsilon
$$

$$
\| \boldsymbol{\zeta}(t) \| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1]
$$

В силу непрерывности для t, близких к t_0, продолжает выполняться неравенство $\| \mathbf{x}(t) \| < \varepsilon$. Пусть в некоторый момент времени $t_1' \leqslant t_1$ будет $\| \mathbf{x}(t_1') \| = \varepsilon$. При этом для $t \in [t_0, t_1']$

$$
\| \mathbf{X} \| \leqslant \gamma_1(\varepsilon)\, \varepsilon \tag{2.3}
$$

где $\gamma_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Заметим, что в силу условия теоремы $\| e^{Pt} \| \leqslant De^{-\alpha t}$, где D и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные. В таком случае для любого решения уравнения (2.2) с начальными значениями t_0, x_0 справедливо [5, 6] соотношение

$$
\| \mathbf{x} \| \leqslant \| \mathbf{x}_0 \| De^{-\alpha(t - t_0)} + \int_{t_0}^{t} De^{-\alpha(t - \tau)} \| \mathbf{X} \| d\tau + \left\| \int_{t_0}^{t} e^{P(t - \tau)} \Phi\, d\tau \right\| \tag{2.4}
$$

Используя соотношения (2.1), (2.3), (2.4), оценим $x(t_1')$

$$\|\mathbf{x}(t_1')\| < \eta D + D\gamma_1\varepsilon / \alpha + D\rho / \alpha$$

Выбрав $\eta \leqslant \varepsilon / (4D)$, $D\gamma_1 / \alpha \leqslant 1/4$, $D\rho / \alpha \leqslant \varepsilon / 4$, получим

$$\|\mathbf{x}(t_1')\| < 3/4\ \varepsilon < \varepsilon$$

Пришли к противоречию. Следовательно, $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ для всех тех t, для которых $\|\boldsymbol{\zeta}(t)\| \leqslant \varepsilon$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$dz / dt = \mathbf{Z}$$

Интегрируя его с учетом того, что правая часть в старых переменных имеет вид

$$\varkappa(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}})\, \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}}$$

где $\varkappa(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}})$ — матрица размером $m \times n$, получим

$$\|\mathbf{z}\| \leqslant \|\mathbf{z}_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \varkappa(\mathbf{q}_M(t), \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}}(t))\, d\mathbf{q}_M(t) \right\| \tag{2.5}$$

Рассмотрим решение возмущенной системы (1.2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$$

с начальными условиями $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta$, $\|\mathbf{z}(t_0)\| < \eta$, $0 < \eta < \varepsilon$. В силу непрерывности для моментов времени t, близких к t_0, будет еще выполняться неравенство $\|\mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$.

Пусть в некоторый момент времени t_2 будет

$$\|\mathbf{z}(t_2)\| = \varepsilon \tag{2.6}$$

В соответствии с полученным выше для $t \in [t_0, t_2]$ имеем

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$$

Причем для этих t в силу преобразования переменных будут выполняться неравенства

$$\|\mathbf{q}_i\| < \varepsilon \quad (i = 1,4); \ \|\mathbf{q}_j\| < \varepsilon_1(\varepsilon) \ (j = 2, 3); \ \|\varkappa\| < \varkappa_1(\varepsilon)$$

где ε_1 и $\varkappa_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая это, можно с помощью соотношения (2.5) получить оценку

$$\|\mathbf{z}(t_2)\| < \eta + \varkappa_1 M\varepsilon$$

где M — некоторая постоянная, не зависящая от ε.

При $\eta \leqslant \varepsilon/3$, $\varkappa_1 M \leqslant 1/3$ будет $\|\mathbf{z}(t_2)\| < 2/3\ \varepsilon < \varepsilon$, что противоречит предположению (2.6).

Таким образом, если $\eta \leqslant \min[\varepsilon / (4D), \varepsilon / 3]$, $\rho \leqslant \alpha\varepsilon / (4D)$, то при всех $t \geqslant t_0$ будет $\|\mathbf{z}\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$.

3. Пусть возмущения не малы, но являются ограниченными функциями, удовлетворяющими условиям [7]

$$\|\Phi\| \leqslant K_1, \quad \int_{t}^{t+T} \Phi(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})\, d\tau = 0, \quad T > 0 \tag{3.1}$$

для любых фиксированных значений $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}$.

Теорема 2. Если в системе (1.2) P — устойчивая матрица, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такие положительные числа η и T_0, что для любого решения системы (1.2) с начальными условиями

$$\|\mathbf{z}(t_0)\| < \eta, \quad \|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta$$

при всех $t > t_0$ будут выполняться неравенства

$$\|\mathbf{z}\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{x}\| < \varepsilon$$

при любых Φ, удовлетворяющих условиям (3.1), если $T \leqslant T_0$.

Доказательство. Рассуждая аналогично предыдущему, выведем для решения уравнения (2.2) оценку (2.4). В рассматриваемом случае, учитывая, что

$$\left\| e^{Pt} \int_{t_0}^{t} e^{-P\tau} \Phi \, d\tau \right\| < KT$$

из (2.4) получим

$$\| \mathbf{x}\,(t_1') \| < \eta D + D\gamma_1 \varepsilon \,/\, \alpha + KT$$

При $\eta \leqslant \varepsilon \,/\, (4D)$, $D\gamma_1 \,/\, \alpha \leqslant {}^1/_4$, $T \leqslant \varepsilon \,/\, (4K)$ будет

$$\| \mathbf{x}\,(t_1') \| < {}^3/_4\, \varepsilon < \varepsilon$$

Повторяя все остальные выкладки, получим, что если $\eta \leqslant \min\, [\varepsilon \,/\, 3,\ \varepsilon \,/\, (4D)]$, $T \leqslant T_0 = \varepsilon \,/\, (4K)$, то при всех $t \geqslant t_0$ будет $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{z}\| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

4. Заметим, что при условиях теорем нулевое решение невозмущенной системы (1.2′) устойчиво, но не асимптотически [2]. Из полученных результатов следует, что постоянно действующие по основной переменной возмущения (малые или удовлетворяющие условиям (3.1)) не нарушают этой устойчивости (в смысле утверждений теорем).

Возвращаясь к старым переменным, получаем, что справедлива

Теорема 3. Если кроме m нулевых корней все остальные корни характеристического уравнения системы первого приближения для невозмущенной системы (1.1′) имеют отрицательные вещественные части, то для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие числа η и ρ (или η и T_0), что для любого решения системы (1.1) с начальными условиями

$$\| \mathbf{q}_M (t_0) \| < \eta, \quad \| \mathbf{q}_M^{\cdot} (t_0) \| < \eta, \quad \| \mathbf{q}_E^{\cdot} (t_0) \| < \eta$$

при всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться неравенства

$$\| \mathbf{q}_M \| < \varepsilon, \quad \| \mathbf{q}_M^{\cdot} \| < \varepsilon, \quad \| \mathbf{q}_E^{\cdot} \| < \varepsilon$$

при любых Φ_{2M}, Φ_E, удовлетворяющих условиям типа (2.1) (или (3.1) соответственно).

Следовательно, постоянно действующие по части обобщенных координат (по механическим координатам $\mathbf{q}_3$ и $\mathbf{q}_4$ и по электрическим координатам $\mathbf{q}_E$) возмущения рассматриваемого типа не нарушают устойчивости установившегося движения системы гироскопической стабилизации.

Замечание. Таким образом, для рассматриваемой модели системы гиростабилизации малые или периодические высокочастотные возмущения, действующие, например, по осям стабилизации и в электрических цепях, несущественны с точки зрения их влияния на устойчивость установившегося движения. Результат остается справедливым и в частных случаях, когда электрические цепи следящих систем принимаются безынерционными и когда собственные кинетические моменты гироскопов постоянны.

Из приведенных результатов следует, в частности, что для принятой в работе математической модели гиростабилизатора в случаях, когда амплитуды гармонических возмущающих моментов малы или частоты их велики, все обобщенные скорости $\mathbf{q}_M^{\cdot}$, $\mathbf{q}_E^{\cdot}$ и механические обобщенные координаты $\mathbf{q}_M$ остаются малыми во все время движения системы.

Поступила 19 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмина Л. К.* К вопросу устойчивости систем гироскопической стабилизации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
4. *Горшин С. И.* К принципу сведения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
5. *Персидский К. П.* Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1948, вып. 2.
6. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.