Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 539.4:534.1

ДВУМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

О. В. Голубева

(Москва)

Рассмотрены динамические процессы в слоях с произвольной сетью главных направлений анизотропии. Изучен случай, отвечающий криволинейной однородной анизотропной среде. Приведены решения ряда конкретных задач.

1. При анизотропии среды, стационарности процесса и линейности основного динамического закона в явлениях фильтрации жидкости (закон Дарси) и теплопроводности (закон Фурье) уравнения движения и переноса тепла имеют вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\nabla\varphi, \quad \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — соответственно скорость фильтрации и тепловой поток; $\varphi = -(P + \gamma z) / \mu$ в случае фильтрации (P — давление жидкости, γ — ускорение силы тяжести, μ — вязкость жидкости); $\varphi = -t$ в случае теплопроводности (t — температура).

При тех же условиях магнитные и электрические поля на основании уравнений Максвелла и закона Ома описываются соотношениями

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \quad \nabla\mathbf{T}\mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — соответственно напряженность магнитного поля и плотность тока, $\varphi = -V$, где V — магнитный и электрический потенциал.

В уравнениях (1.1) и (1.2) $\mathbf{T}$ — тензор второго ранга, коэффициенты которого зависят от координат и характеризуют соответственно неоднородность, теплопроводность, магнитную проницаемость и удельное сопротивление среды и ее анизотропию.

При двумерности процесса уравнения (1.1) имеют вид

$$v_i = k_{i1}\partial\varphi / \partial x_1 + k_{i2}\partial\varphi / \partial x_2 = (-1)^j H^{-1}\partial\psi / \partial x_j \tag{1.3}$$
$$i = 1,\ j = 2; \quad i = 2,\ j = 1$$

Здесь x_i — декартовы координаты плоскости (z), вдоль которой развивается процесс или на которую конформно отображается процесс в слое, расположенном вдоль криволинейной поверхности, v_i — проекции вектора $\mathbf{v}$ на оси x_i, H — закон изменения толщины слоя, который в общем случае зависит от координат [1], ψ — функция тока.

Уравнения (1.2) при двумерном процессе аналогичны:

$$v_i = \partial\varphi / \partial x_i = (-1)^j(k_{i1}\partial\psi / \partial x_1 + k_{i2}\partial\psi / \partial x_2) \tag{1.4}$$
$$i = 1,\ j = 2; \ i = 2,\ j = 1$$

Укажем характер определяемой тензором **T** анизотропии среды в двумерном случае. Движение в заданной точке по направлению s вдоль вектора **v** будем рассматривать как одномерное и характеризовать среду в этом направлении коэффициентом k_s. При линейном законе процесса движение вдоль s описывается уравнением

$$v = k_s(\cos\alpha_1 \partial\varphi \,/\, \partial x_1 + \cos\alpha_2 \partial\varphi \,/\, \partial x_2) \tag{1.5}$$

где $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$ — направляющие косинусы.

Введем вектор длины $\sqrt{k_s}$ с началом в данной точке и координатами $X_i = \sqrt{k_s}\cos\alpha_i$ и тензор **F** с компонентами f_{ij}, такой, что $\nabla\varphi = \mathbf{F}\mathbf{v}$. Тогда равенство (1.4) запишем в виде

$$f_{11}X_1^2 + (f_{12} + f_{21})\, X_1X_2 + f_{22}X_2^2 = 1 \tag{1.6}$$

Так как $k_s \neq \infty$, то из (1.5) следует, что $\sqrt{k_s}$ в зависимости от s меняется по эллиптическому закону, что соответствует тензорному характеру уравнений (1.3). Таким образом, уравнения (1.3) и, аналогично, (1.4) описывают динамические процессы в среде с частным видом анизотропии. Экспериментальное подтверждение такого характера анизотропии см., например, в [2].

Введем ортогональную систему координат p_i в плоскости (z) вдоль главных осей эллипсов, определяемых равенством (1.6). Тогда в этих переменных будут иметь место два случая: 1) $f_{12} = f_{21} = 0$ или $k_{12} = k_{21} = 0$ и 2) $f_{12} = -f_{21}$ или $k_{12} = -k_{21}$.

При $k_{12} = k_{21}$ в криволинейных координатах p_i квадрат элемента дуги dS^2 в плоскости (z) имеет вид

$$dS^2 = H_1^2dp_1^2 + H_2^2dp_2^2 \tag{1.7}$$

где H_1 и H_2 — коэффициенты Ламе.

Уравнения (1.3) в этих координатах будут

$$\begin{gathered} v_i = k_iH_i^{-1}\partial\varphi \,/\, \partial p_i = (-1)^j(H_jH)^{-1}\partial\psi \,/\, \partial p_j \\ i = 1,\ j = 2; \qquad i = 2,\ j = 1 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь v_i — проекции вектора v на координатные оси p_i, k_i — коэффициенты, характеризующие среду в направлении p_i, H_i определяются равенством (1.7).

При $k_{12} = k_{21}$ координаты p_i называются главными направлениями анизотропии среды, уравнения (1.8) называются отнесенными к главным направлениям. Аналогичная система координат использовалась в задачах фильтрационной диффузии [3].

Уравнения (1.4) при $k_{12} = k_{21}$, отнесенные к главным направлениям анизотропии среды, имеют вид

$$\begin{gathered} v_i = H_i^{-1}\partial\varphi \,/\, \partial p_i = (-1)^j\, (k_iH_jH)^{-1}\partial\psi \,/\, \partial p_j \\ i = 1,\ j = 2; \quad i = 2,\ j = 1 \end{gathered} \tag{1.9}$$

При $k_{12} = -k_{21}$ уравнения (1.3) и (1.4) в переменных p_i не приводятся к виду (1.8) и (1.9). Главные направления анизотропии в этом случае неортогональны и при записи уравнений в канонической форме целесообразно использовать неортогональные координаты.

Запишем уравнения (1.8) в виде

$$\sqrt{K_1/K_2}\partial\varphi \,/\, \partial p_i = (-1)^j \partial\psi \,/\, (\sqrt{K_1K_2}\partial p_j)$$
$$K_i = k_i H H_j \,/\, H_i,\quad i = 1,\ j = 2;\ i = 2,\ j = 1$$

Введем вспомогательные переменные ξ_i, которые удовлетворяют уравнениям Бельтрами

$$\sqrt{K_i/K_j}\partial\xi_1 \,/\, \partial p_i = (-1)^j\, \partial\xi_2 \,/\, \partial p_j \tag{1.10}$$
$$i = 1,\ j = 2;\ i = 2,\ j = 1$$

В переменных ξ_1, ξ_2, которые представляют собой квазиконформное преобразование плоскости (z) в плоскости (ζ) с переменными ξ_i, уравнения (1.8), а также (1.9) принимают вид

$$\partial\varphi \,/\, \partial\xi_i = (-1)^j\, \partial\psi \,/\, (H\sqrt{k_1k_2}\partial\xi_j) \tag{1.11}$$
$$i = 1,\ j = 2;\quad i = 2,\ j = 1$$

Решения этих уравнений выражаются через P-аналитические функции.

Уравнения (1.11) являются канонической формой дифференциальных уравнений (1.2) (см., например, [4]). Физический смысл этих уравнений заключается в том, что изучаемый двумерный динамический процесс в анизотропной среде сводится к подобному процессу в неоднородно-изотропной среде.

2. Влияние на динамический процесс анизотропии среды, не осложненной неоднородностью, в общем случае описывается моделью с криволинейной однородной анизотропией ($H = 1$, k_i — постоянны).

Как следует из уравнений (1.11), аппаратом исследования динамического процесса в этом случае являются аналитические функции.

Предположим, что сеть главных направлений анизотропии приводима к изотермической. Это значит, что криволинейные координаты p_i представляют собой действительную и мнимую части аналитической функции $f(z)$, которая осуществляет связь p_i с x_i.

Квадрат элемента дуги плоскости (z) записывается в виде

$$dS^2 = c^2\,(dp_1^2 + dp_2^2) \tag{2.1}$$

Коэффициенты Ламе в изотермических координатах равны $H_1 = H_2 = c$. Заметим, что неизотермическая сеть p_i (см. (1.7)) приводима к изотермической (см. 2.1), если H_i удовлетворяют условиям $H_i = A_i(p_1)\,B_i(p_2)$ или $H_1 = A\,(p_1, p_2)\,B_i\,(p_i)$, $i = 1,2$, где A, B — произвольные функции соответствующих координат.

Уравнения (1.8) в сделанных предположениях записываются в виде

$$cv_i = k_i\partial\varphi \,/\, \partial p_i = (-1)^j \partial\psi \,/\, \partial p_j \tag{2.2}$$
$$i = 1,\ j = 2;\quad i = 2,\ j = 1$$

В плоскости (z) эти уравнения записаны в ее криволинейных главных направлениях анизотропии.

Введем плоскость анизотропии $\omega = p_1 + ip_2$, которая связана конформным преобразованием с плоскостью (z). В этой плоскости уравнения (2.2) описывают динамический процесс в среде с прямолинейной анизотропией, главные направления которой совпадают с координатными линиями (см., например, [5]).

Преобразование $\xi_1 = \sqrt{k_2/k_1}\, p_1$, $\xi_2 = p_2$, являющееся частным решением уравнений (1.10), сводит уравнения (2.2) к условиям Коши— Римана

(2.3) $$\partial\varphi_1 / \partial\xi_i = (-1)^j\, \partial\psi_1 / \partial\xi_j$$
$$i = 1,\ j = 2;\ i = 2,\ j = 1,\ \varphi_1 = \varphi,\ \psi_1 = \psi / \sqrt{k_1 k_2}$$

3. Опираясь на результаты п. 2, решим ряд конкретных задач из различных областей изучаемых двумерных процессов.

1°. Рассмотрим плоскопараллельное течение под средним сечением плотины с непроницаемым плоским флютбетом. Предположим, что границы верхнего и нижнего бьефов являются продолжением флютбета и вдоль них выбрана ось x_1. Предположим, что горизонтальный водоупор отстоит от оси x_1 на расстоянии d, и главные направления анизотропии грунта p_i определяются через x_i аналитической функцией $\omega = \exp \pi z / (2d)$. Переход от плоскости (z) к плоскости анизотропии (ω) осуществляется преобразованием $z = 2d \ln \omega/\pi$. Квазиконформное преобразование ω к плоскости (ζ) имеет вид $\omega = p_1 + ip_2 = \sqrt{k_2/k_1}\, \xi_1 + i\xi_2$, где k_i — проницаемость грунта вдоль главных направлений. В плоскости (ζ) задача сводится к исследованию течения в однородном грунте под плотиной с плоским флютбетом вдоль оси ξ_1, начало и конец которого определяются точками $\zeta = a_1, b_1$. Вертикальная ось при этом непроницаема. В плоскости (ζ) задача решается при помощи комплексного потенциала [6]

$$w = \frac{\pi(\varphi_B - \varphi_A)}{4K(\sqrt{b_1^2 - a_1^2}/b_1)} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - a_1^2)(\zeta^2 - b_1^2)}}$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода, φ_B, φ_A — постоянные значения φ вдоль границ нижнего и верхнего бьефов.

Связанное с $\varphi(x_i)$ поле давлений и линии тока $\psi(x_i)$ в плоскости (z) определяются комплексным потенциалом w и преобразованием плоскости (ζ) к плоскостям (ω) и (z). Размер флютбета в плоскости (z) определяется точками его начала (a) и конца (b), которые находятся преобразованием точек $\zeta = a_1$, b_1 при переходе к плоскости (z).

2°. Рассмотрим задачу о теплоотдаче прямолинейной нагретой трубы, заложенной в безграничной среде, теплопроводность которой анизотропна и главные направления анизотропии p_1, p_2 расположены в плоскости $z = x_1 + ix_2 = R \exp \alpha_i$, перпендикулярной к оси трубы.

Пусть главные направления анизотропии представляют собой семейства ортогональных парабол. Тогда p_i связаны с x_i уравнениями

$$x_2^2 = 4p_1^2(p_1^2 - x_1), \quad x_2^2 = 4p_2^2(x_1 + p_2^2)$$

Нагретую трубу в плоскости (z) моделируем источником мощности Q. Расположение оси трубы обозначим точкой z_0. Переход к плоскости анизотропии (ω) в этом случае осуществляется преобразованием $z = \omega^2$, переход к плоскости (ζ) — преобразованием $\zeta = \sqrt{k_2/k_1}\, p_1 + ip_2$. Учитывая двулистность плоскости (z) при переходе от (ω) к (z), решение задачи в плоскости (ζ) запишем в виде комплексного потенциала

$$w = (Q / 2\pi) \ln (\zeta^2 - \zeta_1^2)$$

где ζ_1 соответствует точке z_0.

Распределение температуры $(-\varphi)$ и линии тока теплового потока ψ в плоскости (z) определяются на основании комплексного потенциала w и преобразований плоскостей (ζ) — к (ω) и (z).

3°. Рассмотрим задачу об искажении напряженности плоского прямолинейного магнитного поля круглым включением радиуса R_0, обладающего анизотропной магнитной проницаемостью, главные направления анизотропии которой расположены по неконцентрическим окружностям. Уравнение этих окружностей запишем в виде

$$[x_1 - r^2a / (r^2 - a^2)]^2 + x_2^2 = [a^2r / (r^2 - a^2)]^2$$
$$(x_1 - a/2)^2 + (x_2 - a \operatorname{ctg} \theta / 2)^2 = (a / (2\sin \theta))^2 .$$

Здесь постоянная a связана с R_0 соотношением $R_0 = a^2 / (a^2 - 1)$; центр включения расположен в точке $z = a / (a^2 - 1)$; $a > 1$, r, θ — параметры, определяющие различные кривые главных направлений анизотропии включения.

Обозначим через k магнитную проницаемость среды вне включения и через n_i магнитную проницаемость среды вдоль главных направлений внутри включения.

Перейдем от плоскости (z) к плоскости анизотропии $\omega = r \exp \theta i$ при помощи конформного преобразования

$$\omega = az / (z - a), \quad z = a\omega / (\omega - a)$$

Квазиконформное преобразование плоскости (ω) к плоскости (ζ) вида $\zeta = r^{\sqrt{n_1/n_2}} \exp\theta i$ сводит задачу к определению магнитного поля в плоскости (ζ), вызванного диполем в точке $\zeta = a$, в среде с прерывно однородной магнитной проницаемостью k и $\sqrt{n_1 n_2}$ соответственно вне и внутри окружности единичного радиуса. Применяя фильтрационную теорему об окружности [1], решение задачи в плоскости (ζ) запишем в виде

$$w(\zeta_1) = 1/(\zeta_1 - a) + (k - \sqrt{n_1n_2})/(k + \sqrt{n_1n_2})(\zeta - 1/a)$$
$$w(\zeta_2) = 2\sqrt{n_1n_2}/(k + \sqrt{n_1n_2})(\zeta_2 - a)$$

Здесь ζ_1 и ζ_2 — соответственно точки вне и внутри окружности $|\zeta| = 1$, которые связаны с плоскостью анизотропии и равенствами $\zeta_1 = \omega$, $\zeta_2 = r^{\sqrt{n_1/n_2}} \exp \theta i$.

Магнитостатический потенциал φ и линии тока вектора напряженности магнитного поля в плоскости (z) определим при помощи комплексных потенциалов $w(\zeta_1)$, $w(\zeta_2)$ и преобразований плоскости (ζ) к плоскостям (ω) и (z).

4°. Рассмотрим плоское электрическое поле постоянного тока в проводящей анизотропной среде. Предположим, что поле создается заряженным отрезком напряжения Q, начало и конец которого имеют координаты x_a, x_b. Пусть главные направления анизотропии среды расположены по эллипсам и гиперболам (фокусное расстояние равно двум), удельные сопротивления вдоль которых равны k_1 и k_2.

Решение этой задачи имеет вид

$$w = (Q \ln \zeta_1) / 2\pi, \quad \zeta_2 = (\zeta_1 + R_0^2 / \zeta_1) / 2R_0$$
$$\zeta_3 = \zeta_2 - A = (\zeta + b^2 / \zeta) / (2b), \quad b = a_0^{\sqrt{k_2 / k_1}}$$
$$\zeta = r^{\sqrt{k_2 / k_1}} \exp \theta i, \quad \omega = r \exp \theta i, \quad z = (\omega + a_0^2 / \omega)/(2a_0)$$

Функции $\varphi(x_i)$, $\psi(x_i)$ определяют электрический потенциал и линии плотности тока; $w(\zeta_1)$ определяет безграничное электрическое поле плоского однородного проводника, порождаемое заряженной проводящей круглой границей. Последующие преобразования являются решениями ряда задач по схеме, указанной в п. 2, которые выявляют смысл входящих в решение постоянных R_0, A, b, a_0 и их связь с x_a, x_b.

Следует отметить, что в рассмотренных задачах φ и ψ, записанные в координатах плоскости (ω), представляют собой решения задач с прямолинейными или радиальными главными направлениями анизотропии, а φ, ψ, записанные в координатах плоскости (ζ), являются решениями задач для однородно-изотропных сред.

Следует также отметить, что идентичность уравнений рассмотренных динамических процессов позволяет каждую из приведенных задач интерпретировать как решение соответствующей задачи из другой области. Конформное преобразование на криволинейные поверхности плоскостей (z), (ω) и (ζ) является решением соответствующих задач в искривленных слоях.

В заключение отметим, что уравнение установившегося динамического процесса при нелинейном динамическом законе и «эллипсоидальном» типе анизотропии имеют вид

$$f(v)\,\mathbf{v} = \mathbf{T}\nabla\varphi$$

Если коэффициенты тензора **T** не зависят от v, то он характеризует анизотропные и неоднородные свойства среды, которые не зависят от закона динамического процесса. Функция $f(v)$ определяет тот или иной не зависящий от свойств среды нелинейный закон процесса.

Зависящие от $\mathbf{v}$ коэффициенты тензора **T** характеризуют свойства среды, которые зависят от динамики процесса и при $f(v) = 1$ полностью определяют его нелинейность.

Поступила 4 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., «Высшая школа», 1972.
2. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
3. *Николаевский В. Н.* Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 5.
4. *Толпаев В. А.* Связь плоскопараллельных фильтрационных течений жидкости в изотропных и анизотропных грунтах. В сб.: Гидромеханика (Моск. обл. пед. ин-т им. Н. К. Крупской). М., 1975.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., «Наука», 1977.
6. *Голубев В. В.* Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. М.—Л., ГОНТИ, Ред. техн.-теор. лит-ры, 1938.