Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 539.311

О РАВНОВЕСИИ СВОБОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Л. П. Лебедев

(Ростов-на-Дону)

Доказываются теоремы о разрешимости следующих задач нелинейной теории анизотропных пластин: о равновесии закрепленной в трех точках пластины, подверженной действию внешней нагрузки (задача I), о равновесии под действием внешних сил пластины, свободной от геометрических связей (задача 2).

Разрешимости некоторых основных краевых задач нелинейной теории пластин (уравнения Кармана) посвящены работы [1–4].

1. Основные соотношения и предположения. Уравнения равновесия анизотропной пластины с переменными модулями упругости можно записать в следующей интегродифференциальной форме:

$$(w\cdot\chi)_1 = -[\Phi,\ w,\ \chi] + \int\limits_\Omega F\chi\, d\Omega + \int\limits_\Gamma (N\chi + M_1\chi_x + M_2\chi_y)\, ds \tag{1.1}$$

$$(\Phi\cdot\eta)_2 = [w, w,\ \eta] \quad \left(\eta\Big|_\Gamma = \frac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0\right)$$

где введены обозначения

$$(w\cdot\chi)_1 = \int\limits_\Omega \{(D_1 w_{xx} + D_{12}w_{yy})\,\chi_{xx} + (D_2 w_{yy} + D_{12}w_{xx})\,\chi_{yy} +$$
$$+ 2D_k w_{xy}\chi_{xy}\}\, d\Omega, \quad [\Phi, w, \chi] = \int\limits_\Omega \{\Phi_{yy}w_x\chi_x +$$
$$+ \Phi_{xx}w_y\chi_y - \Phi_{xy}\,(w_x\chi_y + w_y\chi_x)\}\, d\Omega$$
$$(\Phi\cdot\eta)_2 = \int\limits_\Omega \{(E_1E_2 - E_{12}{}^2)^{-1}\,[(E_1\Phi_{xx} - E_{12}\Phi_{yy})\,\eta_{xx} +$$
$$+ (E_2\Phi_{yy} - E_{12}\Phi_{xx})\,\eta_{yy}] + G^{-1}\Phi_{xy}\eta_{xy}\}\, d\Omega,\ d\Omega = dxdy$$

Здесь w, Φ — функции прогиба и напряжений; F, N, M_1, M_2 — внешняя нагрузка, приложенная к пластине; нижние индексы x, y означают дифференцирование по соответствующим переменным, принадлежащим двумерной односвязной ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ; χ, η — произвольные допустимые вариации функций w, Φ соответственно, удовлетворяющие условиям, приведенным в скобках в (1.1); буквами D, E, G с различными индексами обозначены упругие характеристики пластины.

Первое уравнение (1.1) выражает принцип возможных перемещений в теории пластин, второе— уравнение совместности. Из этих уравнений обычным для вариационного исчисления методом можно получить уравнения равновесия пластины Кармана в дифференциальной форме [1-3] и естественные краевые условия, которые выписываться здесь не будут.

Для полной постановки задач 1 и 2 необходимо еще указать краевые условия для функции Ф

(1.2) $$\Phi\Big|_\Gamma = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$$

а в задаче 1, кроме того, условия

(1.3) $$w(x_k,\ y_k) = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

где $(x_k,\ y_k)$ — точки области Ω, не лежащие на одной прямой. Условию (1.3) должны при этом удовлетворять и функции χ из первого уравнения (1.1). Область Ω такова, что для пространств С. Л. Соболева $W_2^{(2)}(\Omega)$ выполнены теоремы вложения [5].

Относительно упругих характеристик пластины предполагается, что все они — ограниченные измеримые функции переменных x, y и удовлетворяют некоторым энергетическим соотношениям [6]. Из этих соотношений, в частности, вытекает, что существует постоянная $m > 0$, такая, что

(1.4) $$\|u\|_1 \geqslant m\|u\|_3,\ \|u\|_2 \geqslant m\|u\|_3,\ \forall u \in C^{(2)}(\Omega)$$

$$\|u\|_1^2 = (u\cdot u)_1,\quad \|u\|_2^2 = (u\cdot u)_2,\quad \|u\|_3^2 = \int\limits_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)d\Omega$$

2. Вспомогательные предложения. Из указанных выше ограничений вытекают неравенства

$$\|u\|_1 \leqslant M\,\|u\|_3,\ \|u\|_2 \leqslant M\,\|u\|_3,\ \ \forall u \in C^{(2)}(\Omega)$$

с постоянной M, не зависящей от u. Отсюда и из (1.4) следует, что нормы $\|\cdot\|_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ эквивалентны на пространстве классов функций С. Л. Соболева $L_2^{(2)}(\Omega)$ [5]. Разность функций, принадлежащих одному и тому же классу из $L_2^{(2)}(\Omega)$,— некоторый полином $ax + by + c$. Формы $(u\cdot v)_k$ $(k = 1,\ 2)$ — скалярные произведения на $L_2^{(2)}(\Omega)$. Далее пространство $L_2^{(2)}(\Omega)$ будет рассматриваться с нормой $\|\cdot\|_1$.

Определение 1. Пространством H_1 (пространством H_2) называется замыкание множества всех функций из $C^{(4)}(\Omega)$, удовлетворяющих соотношениям (1.3), в норме $\|\cdot\|_1$ (соответственно краевым условиям (1.2) в норме $\|\cdot\|_2$).

Из свойств нормы пространства H_2 вытекает, что H_2 совпадает с пространством С. Л. Соболева $W_2^{0(2)}(\Omega)$.

Лемма 1. Пространство H является подпространством пространства С. Л. Соболева $W_2^{(2)}(\Omega)$, причем

(2.1) $$0 < m_1 \leqslant \|u\|_1 \|u\|^{-1}_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqslant M_1 < \infty,\quad \forall u \in H_1$$

с постоянными m_1, M_1, не зависящими от u.

Правая часть этого неравенства (2.1) тривиальна. Левая часть неравенства доказывается от противного с учетом непрерывности оператора вложения $W_2^{(2)}(\Omega)$ в $C^{(0)}(\Omega)$ [5].

Очевидно, что пространства H_1 и H_2 гильбертовы.

Лемма 2. Пространство H_1 и пространство $L_2{}^2$ (Ω) с нормой $\|\cdot\|_1$ изоморфны и изометричны. Каждый класс функций из $L_2^{(2)}(\Omega)$ содержит представителя из пространства H_1, который и ставится ему в соответствие.

Доказательство. Каждый элемент H_1 входит, как это следует из леммы 1, в некоторый класс элементов из $L_2^{(2)}(\Omega)$. Обратно. Берется любой представитель $u(x, y)$ произвольного класса элементов из $L_2^{(2)}(\Omega)$; по теореме вложения С. Л. Соболева $u(x, y) \in C^{(0)}(\Omega)^2$. Его сумма $u^*(x, y)$ с полиномом $ax + by + c$ не выходит из указанного класса. Точки (x_k, y_k) $(k = 1, 2, 3)$ не лежат на одной прямой, поэтому всегда можно найти такие постоянные a, b, c, что для элемента $u^*(x, y)$ выполнено условие (1.3). Очевидно, что $u^*(x, y) \in H_1$. Совпадение вида норм на H_1 и $L_2^{(2)}(\Omega)$ заканчивает доказательство.

Лемма 3. Пусть $u \in H_2$, $\varphi, \psi \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Имеют место следующие равенства (a_k — произвольные постоянные):

$$[u, \varphi, \varphi] = [\varphi, \varphi, u] = 2\int_\Omega (\varphi_{xy}^2 - \varphi_{xx}\varphi_{yy})\, u\, d\Omega \tag{2.2}$$

$$[u,\ \varphi + a_1x + a_2y + a_3,\ \psi + a_4x + a_5y + a_6] = [u,\ \varphi,\ \psi] \tag{2.3}$$

Равенства (2.2), (2.3) проверяются непосредственно для гладких функций. Общий случай получается путем замыкания с учетом теорем вложения в пространстве $W_2^{(2)}(\Omega)$.

3. Существование обобщенного решения. *Определение 2.* Обобщенным решением задачи 1 (задачи 2) называется пара элементов

$w \in H_1$, $\Phi \in H_2$ $(w \in L_2^{(2)}(\Omega),\ \Phi \in H_2)$, удовлетворяющих

интегродифференциальным равенствам (1.1) при любых функциях

$$\chi \in H_1,\ \eta \in H_2\ (\chi \in L_2^{(2)}(\Omega),\ \eta \in H_2)$$

Поскольку в задаче 2 элемент $\chi \in L_2^{(2)}(\Omega)$ определен с точностью до полинома $ax + by + c$, то из (1.1) необходимо следует, что

$$\int_\Omega F(ax + by + c)\, d\Omega + \int_\Gamma \{N(ax + by + c) + aM_1 + bM_2\}\, ds = 0 \tag{3.1}$$

при любых постоянных a, b, c. Данное равенство механически означает самоуравновешенность нагрузки.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$F \in L(\Omega), \quad N \in L(\Gamma), \quad M_1, M_2 \in L^p(\Gamma) \tag{3.2}$$

где $p > 1$. Тогда существует по меньшей мере одно обобщенное решение задачи 1. Все решения задачи 1 находятся внутри некоторой сферы достаточно большого радиуса пространства $H_1 \times H_2$.

Для доказательства теоремы решение задачи 1 в обобщенной постановке сводится к решению эквивалентного операторного уравнения относительно w в пространстве H_1. Это уравнение и исследуется далее на разрешимость.

Из теорем вложения С. Л. Соболева и равенства (2.2) вытекает, что правая часть второго уравнения (1.1) при фиксированном $w \in H_1$ — непрерывный линейный функционал относительно η в пространстве H_2. По теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве этот функционал определяет некоторый нелинейный оператор $\mathbf{R}$, действующий из пространства H_1 в H_2

$$(3.3)\qquad (\mathbf{R}w\cdot\eta)_2 = [w,\ w,\ \eta]$$

Лемма 4. Оператор R, действующий из пространства H_1 в H_2, усиленно непрерывен.

Доказательство. Пусть $w_k \to w_0$ при $k\to\infty$ слабо в пространстве H_1. Каждая пара соответствующих членов разности

$$(\mathbf{R}w_k\cdot\eta)_2 - (\mathbf{R}w_0\cdot\eta)_2 = [\eta,\ w_k,\ w_k] - [\eta,\ w_0,\ w_0]$$

(следствие (2.2)) оценивается с помощью неравенства Гельдера через

$$m_2\|\eta\|_2\{\|w_k\|_1+\|w_0\|_1\}\,(\|w_{kx}-w_{0x}\|_{L^4(\Omega)}+\|w_{ky}-w_{0y}\|_{L^4(\Omega)})$$

сверху. Здесь m_2 — постоянная, не зависящая от w_k, χ. По теореме о полной непрерывности оператора вложения $W_2^{(2)}(\Omega)$ в $W_4^{(1)}(\Omega)$ [5] слагаемые, стоящие в круглых скобках, стремятся к нулю при $k\to\infty$. Выбор $\chi = \mathbf{R}w_k - \mathbf{R}w_0$ завершает доказательство.

Из второго уравнения (1.1) и (3.3) следует

$$(3.4)\qquad \Phi = \mathbf{R}w$$

Это выражение для Φ подставляется в первое уравнение (1.1). По переменной χ правая часть первого уравнения (1.1) при фиксированной функции $w\in H_1$ есть теперь непрерывный линейный функционал. Это вытекает из условий теоремы 1 и теорем вложения С. Л. Соболева. Применяя, как и выше, теорему Рисса, правую часть первого уравнения (1.1) с учетом (3.4) можно записать в виде $(\mathrm{G}w\cdot\chi)_1$. Здесь G — нелинейный оператор, действующий в пространстве H_1. Таким образом, разрешимость задачи 1 эквивалентна разрешимости операторного уравнения (3.5) в пространстве H_1

$$(3.5)\qquad w = \mathrm{G}w$$

Лемма 5. Оператор G, действующий в пространстве H_1, усиленно непрерывен.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Далее составляется функционал $\Psi(w,\ t) = ((w - t\mathrm{G}w)\cdot w)_1$.

Используя явный вид оператора G, этот функционал приводим к виду

$$\Psi(w,t) = \|w\|_1^2 + t\|Rw\|_2^2 - t\left\{\iint_\Omega Fw\,d\Omega + \right.$$
$$\left. + \int_\Gamma (Nw + M_1w_x + M_2w_y)\,ds\right.$$

откуда следует оценка $\Psi(w,\ t) \geqslant R^2 - tcR$, $R = \|w\|_1$, где c — конечная норма функционала

$$T(w) = \int_{\Omega} Fw\,d\Omega + \int_{\Gamma} (Nw + M_1 w_x + M_2 w_y)\,ds$$

в пространстве H_1 по переменной w. Отсюда при $t \in [0, 1]$ и $R \geqslant 2c$ вытекает, что

$$\Psi(w, t) \geqslant {}^1/_2 R^2$$

Из последнего неравенства, леммы 5 и принципа Шаудера — Лерея [7] следует лемма 6, оканчивающая доказательство теоремы 1.

Лемма 6. На сфере $\|w\|_1 = R$ достаточно большого радиуса R вращение [7] вполне непрерывного поля $\mathrm{I} - \mathrm{G}$ равно плюс единице. Внутри этой сферы существует по меньшей мере одно решение операторного уравнения (3.5). Более того, все решения операторного уравнения (3.5) лежат внутри этой сферы.

Для задачи 2 имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3.2). Для разрешимости задачи 2 в обобщенной постановке необходима и достаточна самоуравновешенность внешней нагрузки, т. е. выполнение равенства (3.1) с любыми постоянными a, b, c. При этом все обобщенные решения w, Φ задачи 2 лежат внутри некоторого шара достаточно большого радиуса пространства $L_2{}^{(2)}(\Omega) \times H_2$.

Необходимость условия (3.1) для разрешимости задачи уже показана выше.

Достаточность. Применение леммы 2 сводит проблему разрешимости задачи 2 к разрешимости задачи 1. Действительно, из любого класса функций $L_2{}^{(2)}(\Omega)$ можно выбрать представителя, принадлежащего пространству H_1. При таком выборе задача 2 формально совпадает с задачей 1 и по теореме 1 разрешима. Возврат к первоначальной задаче 2 тривиален, поскольку обе части уравнений (1.1) не меняются при добавлении к функциям w, χ пространства H_1 нуля пространства $L_2{}^{(2)}(\Omega)$, который является совокупностью всех полиномов вида $ax + by + c$ (по лемме 3). Теорема доказана.

Замечание. Пользуясь леммой 6, аналогично [6] можно обосновать применение метода Бубнова — Галеркина в задачах 1 и 2.

Автор благодарит И. И. Воровича за постановку задачи.

Поступила 19 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов Н. Ф.* К нелинейной теории тонких пластин. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 5.
2. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
3. *Дубинский Ю. А.* О разрешимости системы уравнений сильного изгиба пластинок. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 5.
4. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., Морозов Н. Ф.* О напряженно-деформированном состоянии в окрестности вершины трещины при нелинейном изгибе пластины. Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 4.
5. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
7. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.