Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 539.3

ИЗГИБ КЛИНОВИДНЫХ ПЛАСТИНОК С УПРУГОЗАКРЕПЛЕННЫМИ ИЛИ ПОДКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНЯМИ

В. В. Реут, Л. Я. Тихоненко

(Одесса)

Получено точное решение ряда задач, связанных с исследованием изгиба клиновидных пластинок либо с упругоопертыми или защемленными гранями, либо подкрепленных упругим стержнем. Рассмотрены следующие задачи: 1) обе грани пластинки упруго сопротивляются прогибам и не сопротивляются поворотам; 2) одна грань пластинки жестко защемлена, а вторая упруго сопротивляется прогибу и не сопротивляется повороту; 3) обе грани опертой пластинки упруго сопротивляются повороту; 4) одна грань пластинки свободна, а другая оперта и упруго сопротивляется повороту; 5) две клиновидные пластинки с разными углами раствора и различными упругими свойствами соединены между собой посредством упругого стержня, работающего только на изгиб.

Точные решения перечисленных задач использованы для исследования характера особенности усилий в угловой точке пластинки и на бесконечности.

В работах [1,2] предложен метод решения задач о контакте полубесконечной балки с упругим клином, основанный на использовании краевой задачи Карлемана для полосы. Ниже метод [1,2] применяется к задачам 1) — 5). Каждая из перечисленных задач может быть усложнена путем задания неоднородных краевых условий. В этом случае вспомогательная задача с классическими краевыми условиями сводит задачу к решению однородного уравнения с неоднородными неклассическими краевыми условиями. Такое преобразование равносильно замене внешней нагрузки нагрузкой, действующей только на упругозаделанных гранях, и подробно рассмотрено на примере задачи 1).

Задачи 1) — 5) рассмотрены в пп. 1—5 соответственно.

1. Задача 1) формулируется следующим образом:

$$\Delta^2 w(r,\theta) = q(r,\theta)/D, \quad -\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant r < \infty \tag{1.1}$$

$$\theta = \pm\alpha, \quad M_\theta = m_\pm, \quad w - f_\pm = k\,(v_\pm \mp V_\theta)$$

$$\int_0^\infty \Big\{ v_+(r) + \sigma_i v_-(r) + k^{-1}[w(r,\alpha) + w(r,-\alpha)]\,\eta_i(\alpha) + \tag{1.2}$$

$$+ \int_{-\alpha}^{\alpha} q(r,\theta)\,\eta_i(\theta)\,r\,d\theta \Big\}\,dr = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 = -\sigma_2 = 1, \quad \eta_0(\theta) = 1, \quad \eta_1(\theta) = \cos\theta, \quad \eta_2(\theta) = \sin\theta$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{\partial}{r\,\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\,\partial\theta^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) w \tag{1.3}$$

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{\partial}{r\,\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\,\partial\theta^2}\right)\right] w$$

$$V_\theta = -D\left[\frac{\partial}{r\,\partial\theta}\Delta + (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial}{r\,\partial\theta}\right)\right] w$$

$$V_r = -D\left[\frac{\partial}{\partial r}\Delta + (1-\nu)\frac{\partial}{r\,\partial r}\left(\frac{\partial^2}{r\,\partial\theta^2}\right)\right] w$$

Здесь $w(r, \theta)$, ν, D — соответственно прогиб, коэффициент Пуассона и жесткость пластинки, k — коэффициент податливости упругой заделки; M_θ, M_r, V_θ, V_r — изгибающие моменты и обобщенные поперечные силы; $q(r, \theta)$ — заданная нагрузка, действующая на пластинку; $m_\pm(r)$, $v_\pm(r)$ и $f_\pm(r)$ — соответственно моменты, силы и начальные прогибы, заданные на гранях $\theta = \pm\alpha$.

Условия равновесия (1.2) обеспечивают единственность решения поставленной задачи, которое ищется в виде

$$w(r, \theta) = w_0(r, \theta) + w_1(r, \theta) + w_2(r, \theta)$$

Для w_i имеем следующие уравнения, краевые условия и условия равновесия

$$\Delta^2 w_0(r, \theta) = q(r, \theta)/D, \quad \Delta^2 w_i(r, \theta) = 0 \tag{1.4}$$

$$\theta = \pm\alpha, \quad M_\theta^{(0)} = m_\pm(r), \quad M_\theta^{(i)} = 0$$

$$w_0 = f_\pm + kv_\pm, \quad w_i = \mp k(V_\theta^{(1)} - V_*)$$

$$\int_0^\infty \left[V_+(r) - \frac{1}{k} w_1(r, \alpha)\right] dr = 0$$

$$2\eta_i(\alpha) \int_0^\infty \left[V_* - \frac{1}{k} w_i(r, \alpha)\right] r\, dr = 0, \quad i = 1, 2$$

$$i = 1, \quad V_* = V_+; \quad i = 2, \quad V_* = V_-;$$

$$V_\pm(r) = {}^1/_2 [V_\theta^{(0)}(r, \alpha) \mp V_\theta^{(0)}(r, -\alpha)]$$

Функции $M_\theta^{(i)}$ и $V_\theta^{(i)}$ определяются через w_i по формулам (1.3).

Для нахождения функции w_0 достаточно применить преобразование Меллина (см., например, [3])

$$\bar{w}(p, \theta) = \int_0^\infty w(r, \theta) r^{p-2} dr, \quad w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega \bar{w}(p, \theta) r^{1-p} dp \tag{1.5}$$

При определении функций w_i ($i = 1, 2$) кроме преобразования (1.5) следует использовать схему работ [1,2].

Рассмотрим задачу для функции $w_1(r, \theta)$, решение которой ищем в классе функций, обладающих асимптотикой $r \to 0$, $w_1 = o(1)$ и $r \to \infty$, $w_1 = o(r^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Учитывая четность этой задачи и первое из краевых условий для w_1, получим

$$w_1(r, \theta) = \frac{1-\nu}{8\pi i} \int_\Omega \left[(p + \varkappa) \frac{\cos(p-1)\theta}{\cos(p-1)\alpha} - \right. \tag{1.6}$$

$$\left. - (p-1) \frac{\cos(p+1)\theta}{\cos(p+1)\alpha}\right] \Phi(p) r^{1-p} dp$$

Здесь $\varkappa = (3 + \nu)(1 - \nu)^{-1}$, $\Omega = \Omega_0$, Ω_n — прямая $\operatorname{Re} p = c + 3n$ в плоскости комплексного переменного p, причем постоянная c определяется классом искомых функций и в данном случае должна быть выбрана из интервала $1 < c < 1 + \varepsilon$.

Предполагая, что $\Phi(p)$ аналитична в полосе Π_0 ($\Pi_n = \{c + 3n < \operatorname{Re} p < c + 3 + 3n\}$), непрерывна в замкнутой полосе Π_0 и равномерно относительна $c \leqslant \sigma \leqslant c+3$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\sigma + it)|^2 dt < \text{const}$$

и требуя, чтобы функция (1.6) удовлетворяла второму краевому условию для w_1 из (1.4), придем к краевой задаче Карлемана для полосы

$$\Phi(p_0 + 3) - \lambda p_0 (p_0^2 - 1) K(p_0) \Phi(p_0) = G(p_0), \quad \operatorname{Re} p_0 = c \tag{1.7}$$

$$\lambda = \frac{kD(1-\nu)}{4(3+\nu)}, \quad K_0(p) = \frac{\sin 2p\alpha - p\varkappa^{-1} \sin 2\alpha}{\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha}$$

$$G_\pm(p) = \int_0^\infty V_\pm(r) r^{1+p} dr$$

Операции, проделанные при получении задачи (1.7), законны при $V_+(r) r^{c+1/2} \in L_2(0, \infty)$ и $G_0(p) \in H_\Omega$ (H_Ω — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера на прямой Ω).

С помощью функции

$$\Psi(p) = \Phi(p)[\lambda^{p/3} \Gamma(p-1) \sin \pi p/2]^{-1} \tag{1.8}$$

краевое условие (1.7) запишем в виде

$$\Psi(p_0 + 3) + K(p_0) \Psi(p_0) = G(p_0), \quad \operatorname{Re} p_0 = c \tag{1.9}$$

$$K(p) = -K_0(p) \operatorname{tg} \pi p/2$$

$$G(p) = -G_+(p)[\lambda^{1+p/3} \Gamma(p+2) \cos \pi p/2]^{-1}$$

Искомая функция $\Psi(p)$ в полосе Π_0 имеет два простых полюса $p_1 = 2$ и $p_2 = 4$. Коэффициент $K(p)$ не имеет нулей, обладает асимптотикой $K(p) = 1 + o(e^{-2\beta|p|})$, $|p| \to \infty$, $\beta = \min\{\alpha, \pi/2\}$, удовлетворяет условию Гельдера и, кроме того, $[\arg K(p)] = 0$. Тогда, согласно [1,2], решение задачи (1.9) дается формулами

$$\Psi(p) = X(p) \left[\frac{1}{6i} \int_\Omega \frac{G(s)\, ds}{X(s+3) \sin \pi (p-s)/3} + \frac{C_1}{\sin \pi (p-2)/3} + \right. \tag{1.10}$$

$$\left. + \frac{C_2}{\sin \pi (p-4)/3} \right]$$

$$X(p) = \exp\left\{ \frac{1}{3} \int_\Omega \frac{\ln K(s)\, ds}{\exp[^2/_3 \pi i (s-p)] - 1} \right\}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Для любого целого n функция $\Psi(p)$ аналитична в каждой полосе Π_n, за исключением точек $p_1 = 3n + 2$ и $p_2 = 3n + 4$, где находятся простые полюса, а на каждой прямой Ω_n она имеет скачок, причем предельные значения ее на этой прямой слева ($\Psi_-(p)$) и справа ($\Psi_+(p) \equiv \Psi(p_0)$) связаны соотношением

$$\Psi_-(p) = K(p - 3n) \Psi_+(p) - (-1)^n G(p - 3n), \quad p \in \Omega_n \tag{1.11}$$

$$\Psi_+(p) = X_+(p) \left[\frac{1}{2} \frac{G(p)}{X(p+3)} + \frac{1}{6i} \int_\Omega \frac{G(s)\, ds}{X(s+3) \sin (p-s)\pi/3} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{\sin \pi (p-2)/3} + \frac{C_2}{\sin \pi (p-4)/3} \right]$$

$$X_+(p) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \ln K(p) + \frac{1}{3} \int_\Omega \frac{\ln K(s)\, ds}{\exp[^2/_3 \pi i (p-s)] - 1} \right\}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим, удовлетворяя условиям равновесия (1.4) для w_1, которые с учетом (1.6), (1.8) и (1.10) приводят к следующим уравнениям относительно этих постоянных:

$$(1.12)\qquad 2G_+(-1) + 3k^{-1}\lambda^{2/3}X(2)C_1 = 0; \quad 2\cos\alpha\,[G_+(0) + \lambda k^{-1}\Psi(3)] = 0$$

Построенное точное решение задачи (1.4) для w_1 позволяет определить асимптотику упругих величин в пластинке. Используя схему работ [1, 2] и формулы (1.3), (1.6), (1.8) и (1.10), найдем, что при $r \to \infty$ справедлива асимптотика

$$(1.13)\qquad w = O(r^{1-\gamma}), \quad M_r = M_\theta = O(r^{-1-\gamma}), \quad V_r = V_\theta = O(r^{-2-\gamma})$$

$$\gamma = -1 + \pi(2\alpha)^{-1}$$

Исследуем поведение этих величин у острия клина, асимптотика которых при $r \to 0$ определяется полюсами подынтегральных выражений полученных интегралов Меллина в полуплоскости $\operatorname{Re} p < c$. Так как выражение (1.10) определяет функцию $\Psi(p)$, аналитическую в полосе Π_0, применим к построенному решению формулы (1.11), т. е. будем рассматривать $\Psi(p)$ в полосе Π_{-1}. Например, преобразованный таким образом интеграл для величины M_r имеет вид

$$(1.14)\qquad M_r = \frac{D(1-\nu)^2}{8\pi i}\int\limits_{\Omega} F(p)\,\Lambda_1(p,\theta)\,\frac{\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2p\alpha - p\varkappa^{-1}\sin 2\alpha}\,dp$$

$$\Lambda_1(p,\theta) = \left(p + \frac{3+\nu}{1-\nu}\right)\frac{\cos(p-1)\theta}{\cos(p-1)\alpha} - \left(p - \frac{1+3\nu}{1-\nu}\right)\frac{\cos(p+1)\theta}{\cos(p+1)\alpha}$$

$$F(p) = [\lambda^{p/3}\Gamma(p+2)\Psi_-(p)\cos\pi p/2 - k\lambda^{-1}G_+(p)]\,(p + 1)^{-1}r^{-1-p}$$

Исследуя расположение полюсов подынтегральной функции (1.14), применяя теорему о вычетах и формулу (1.12), получим

$$(1.15)\qquad r \to 0, \quad M_r = O(r^{-1+\mu})$$

Здесь μ — вещественная часть лежащего наиболее близко от прямой $\operatorname{Re} p = 0$ корня уравнения $\varkappa\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha = 0$, $\operatorname{Re} p > 0$. Во всех встречающихся ниже трансцендентных уравнениях рассматриваются лишь такие корни. Положение этих корней в зависимости от угла α описано в [3].

Аналогично находится асимптотика прогибов и поперечной силы:

$$(1.16)\qquad r \to 0, \quad w = O(1), \quad M_\theta = O(r^{-1+\mu}), \quad V_\theta = V_r = O(r^{-2+\mu})$$

Выражения (1.11) позволяют определить следующие члены разложений асимптотик (1.13), (1.15) и (1.16).

Из (1.16) следует, что при $r \to 0$ перерезывающая сила ограничена только при $\alpha \leqslant \alpha^*$ ($\alpha^* = {}^1/_2\arccos\varkappa^{-1}$). Последнее вместе с асимптотикой (1.13), (1.15) позволяет сделать вывод, что решение задачи (1.4) для w_1 можно строить по указанной схеме лишь при $\alpha \leqslant \alpha^*$, так как только в этом случае выполняется условие равновесия углового элемента пластинки, а также обеспечено существование интегралов (1.5).

Перейдем к задаче (1.4) для функции w_2, решение которой ищем в классе функций, обладающих асимптотикой $r \to 0$, $w_2 = o(r^\delta)$; $\delta > 0$ и $r \to \infty$, $w_2 = o(r^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > -\delta$. В соответствии с этим в интегралах Меллина (1.5) Ω — прямая $\operatorname{Re} p = c$ $(1 - \delta < c < 1 + \varepsilon)$. Аналогично решению задачи для w_1 приходим к задаче Карлемана (1.7) с правой частью $G_-(p)$ и коэффициентом, имеющим вид

(1.17) $$K_0(p) = (\sin 2p\alpha + p\varkappa^{-1} \sin 2\alpha)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)^{-1}$$

Частичная факторизация задачи (1.7), (1.17) осуществляется функцией

$$\Psi(p) = \Phi(p)\,[\lambda^{p/3}\Gamma(p-1)\cos \pi p/2]^{-1}$$

имеющей в полосе Π_0 единственный полюс $p = 3$. Следовательно, эта функция определяется выражениями

(1.18) $$\Psi(p) = X(p)\left[\frac{1}{6i}\int\limits_\Omega \frac{G(s)\,ds}{X(s+3)\sin \pi(p-s)/3} + \frac{C}{\sin \pi p/3}\right]$$

Функция $X(p)$ определена в (1.10). Постоянная C определяется из условия равновесия (1.4) для w_2 и вычисляется по формуле

$$C = -2kG(0)\,[3\lambda X(3)]^{-1}$$

Окончательно решение задачи (1.4) для w_2 выражается через функцию (1.18) следующим образом:

(1.19) $$w_2(r, \theta) = \frac{1-\nu}{8\pi i}\int\limits_\Omega \Lambda_2(p, \theta)\,\lambda^{p/3}\Gamma(p-1)\,\Psi(p)\cos \pi p/2 r^{1-p}\,dp$$

$$\Lambda_2(p, \theta) = (p + \varkappa)\;[\sin(p-1)\theta/\sin(p-1)\alpha - \\ -\sin(p+1)\theta/\sin(p+1)\alpha]$$

Решение (1.19) приводит к асимптотическому поведению упругих величин вида

(1.20) $$\begin{gathered} r \to \infty, \quad w_2 = O(r^{1-\gamma}), \quad M_r = M_\theta = O(r^{-1-\gamma}), \quad V_r = V_\theta = O(r^{-2-\gamma}) \\ r \to 0, \quad w_2 = O(r^{1+\mu}), \quad M_r = M_\theta = O(r^{-1+\mu}), \quad V_r = V_\theta = O(r^{-2+\mu}) \\ \gamma = -1 + \pi/2 \end{gathered}$$

Здесь μ — вещественная часть корня уравнения $\varkappa \sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha = 0$.

Как следует из (1.19), (1.20), в отличие от задачи для w_1 решение задачи (1.4) для w_2 можно получить по описанной схеме для углов раствора $\alpha \leqslant \pi/4 + \alpha^*$. Эта же схема применима для решения задачи 1) в случае, когда в вершине клина приложены сосредоточенные сила и моменты.

2. В простейшем случае задача 2) формулируется так:

(2.1) $$\Delta^2 w(r, \theta) = 0$$

$$\theta = \alpha,\ w = 0,\ r^{-1}\partial\omega/\partial\theta = 0,\ \theta = 0,\ M_\theta = 0,\ w - k\,V_\theta = v(r)$$

Решение задачи (2.1) ищется в классе функций, обладающих асимптотикой $r \to 0$, $w = o(r^\delta)$, $\delta > -1$ и $r \to \infty$, $w = o(r^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > -\delta$ в виде интеграла Меллина

(2.2) $$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Omega [A_1\cos(p-1)\theta + A_2\cos(p+1)\theta + \\ + B_1\sin(p-1)\theta + B_2\sin(p+1)\theta]\,r^{1-p}\,dp$$

Здесь A_j, B_j $(j = 1, 2)$ определяются из граничных условий следующими соотношениями:

$$A_1 = -A_2 (p + \varkappa)(p - \varkappa)^{-1},\ B_j = b_j b^{-1} A_2,\ j = 1, 2$$

$$A_2 = 4(1 - \nu)^{-1} \lambda^{p/3} \Gamma(p) \Psi_+(p) \sin \pi p/2$$

$$\Psi(p) = X(p) \left[\frac{1}{6i} \int\limits_{\Omega} \frac{G(s)\,ds}{X(s+3) \sin \pi (p-s)/3} - \frac{C}{\sin (p-2)\pi/2} \right]$$

$$b_1 = -p - 1 + (p-1)^{-1}(p+\varkappa)(\cos 2p\alpha + p\cos 2\alpha)$$

$$b_2 = -\cos 2\alpha p + p\cos 2\alpha - p - \varkappa,\quad b = \sin 2\alpha p - p \sin 2\alpha$$

Функция $X(p)$ определена в (1.10), где функции $K(p)$ и $G(p)$ определяются формулами (1.9), в которых следует положить

$$K_0(p) = -b^{-1} [\cos 2\alpha p - 2\varkappa^{-1} p^2 \sin^2\alpha + (\varkappa^2 + 1)(2\varkappa)^{-1}]$$

$$G_+(p) = \int\limits_0^\infty v(r) r^{1+p} dp$$

Произвольная постоянная C фиксируется условием корректности проделанных при решении задачи операций $\Psi(1) = 0$.

Построенное точное решение приводит к асимптотическим формулам (1.20), в которых γ и μ — вещественные части корней соответственно уравнений $(\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha)(p-1)^{-1} = 0$ и $\varkappa \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2/4 = 0$. Из найденной асимптотики видно, что решение задачи (2.1) можно искать в виде интеграла Меллина (2.2) для любого α. Заметим, что, несмотря на неограниченность величин изгибающего момента и обобщенной поперечной силы в вершине пластинки (при тех α, для которых $\mu < 2$), для каждого элемента, содержащего угловую точку, выполняются условия равновесия, т. е. возникающие в пластинке усилия являются самоуравновешенными. Наряду с задачей (2.1) можно сформулировать задачи изгиба пластинок, у которых одна грань упруго оперта ($M_\theta = 0$, $w - kV_\theta = v(r)$), а на другой задается одно из классических условий: $r^{-1}\partial w/\partial\theta = V_\theta = 0$; $M_\theta = w = 0$; $M_\theta = V_\theta = 0$. Однако первые две задачи нет необходимости рассматривать специально, поскольку их можно трактовать как задачи (1.4) для w_1 и w_2 соответственно для половины пластинки.

3. В простейшем случае осесимметричная составляющая задачи равносильна построению в области $0 \leqslant r < \infty$, $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$ бигармонической функции, удовлетворяющей краевым условиям

$$\theta = \pm\alpha,\ w = 0,\ M_\theta \pm kr^{-1}\,\partial w/\partial\theta = m_+(r) \tag{3.1}$$

Здесь k — коэффициент податливости упругой заделки, $m_\pm(r)$ — приложенная к границе моментная нагрузка.

Решение задачи в классе функций, обладающих асимптотикой

$$r \to 0,\ w = o(r^\delta),\ \delta > 0 \text{ и } r \to \infty,\ w = o(r^{-\varepsilon}),\ \varepsilon > -\delta$$

имеет вид

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega} L_{+}(p,\theta)\,\Gamma(p)\,\lambda^{p}K^{+}(p)\,\Psi_{+}(p)\,r^{1-p}\sin\pi p/2\,dp \tag{3.2}$$

$$L_{+}(p,\theta)=\cos(p-1)\theta/\cos(p-1)\alpha-$$
$$-\cos(p+1)\theta/\cos(p+1)\alpha$$
$$K^{\pm}(p)=(\cos 2p\alpha\pm\cos 2\alpha)(\sin 2p\alpha\pm p\sin 2\alpha)^{-1},\ \lambda=4Dk^{-1}$$

Здесь аналитическая в полосе $c\leqslant \operatorname{Re}p\leqslant c+1$ функция является решением следующей задачи Карлемана:

$$\Psi(p+1)+K(p)\,\Psi(p)=G(p),\ K(p)=K^{+}(p)\operatorname{tg}\pi p/2 \tag{3.3}$$

$$G(p)=G_{+}(p)\,[\lambda^{p+1}\Gamma(p+1)\cos\pi p/2]^{-1},\qquad G_{\pm}(p)=\int\limits_{0}^{\infty} m_{\pm}(r)\,r^{p-1}dr$$

$$\Psi(p)=X(p)\frac{1}{2i}\int\limits_{\Omega}\frac{G(s)\,ds}{X(s+1)\sin\pi(p-s)} \tag{3.4}$$

$$X(p)=\exp\left\{\int\limits_{\Omega}\frac{\ln K(s)\;ds}{\exp[2\pi i(s-p)]-1}\right\}$$

Асимптотические выражения величин определяются формулами (1.20), в которых γ — вещественная часть корня уравнения $\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha=0$, а $\mu=-1+\pi(2\alpha)^{-1}$.

Эта асимптотика показывает, что решения задачи (3.1) можно искать в виде (3.2) для $\alpha<\pi/4$.

Для антисимметричной составляющей постановка задачи 3) отличается от симметричного случая только краевыми условиями

$$\theta=\pm\alpha,\ w=0,\ \pm M_{\theta}-kr^{-1}\,\partial w/\partial\theta=m_{-}(r)$$

Решение ее дает следующий интеграл:

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega} L_{-}(p,\theta)\,\Gamma(p)\,\lambda^{p}K^{-}(p)\,\Psi_{+}(p)\,r^{1-p}\sin\pi p/2\,dp \tag{3.5}$$

$$L_{-}(p,\theta)=\sin(p-1)\theta/\sin(p-1)\alpha-$$
$$-\sin(p+1)\theta/\sin(p+1)\alpha$$

Здесь функция $\Psi(p)$ определяется выражениями (3.3), (3.4), функция $K^{-}(p)$ определена в (3.2).

Асимптотика задачи имеет вид (1.20), в котором γ является соответствующим решением уравнения $(p-1)^{-1}(\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha)=0$, а $\mu=-1+\pi\alpha^{-1}$

Отметим, что формула (3.5) дает решение антисимметричной составляющей задачи 3) при $\alpha<\pi/2$.

4. Рассмотрим задачу изгиба пластинки с одной опертой и упруго-сопротивляющейся повороту гранью, задавая на второй грани одно из классических краевых условий:

$$r^{-1}\,\partial w/\partial\theta=V_{\theta}=0,\ \ w=M_{\theta}=0,\ \ w=r^{-1}\,\partial w/\partial\theta=0$$
$$M_{\theta}=V_{\theta}=0$$

Первые два варианта можно рассматривать как симметричную и антисимметричную составляющие задачи 3) для половины пластинки. Остановимся только на последнем варианте. В простейшем случае он равносилен построению в области $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$ бигармонической функции $w\ (r,\ \theta)$, удовлетворяющей условиям

$$\theta = \alpha, \quad M_\theta = V_\theta = 0; \quad \theta = 0, \quad w = 0, \quad kr^{-1}\,\partial w\,/\,\partial\theta + M_\theta = m\,(r)$$

$$\int\limits_0^\infty \left[m\,(r) + kr^{-1}\frac{\partial w}{\partial\theta}(r,0)\right] dr = 0$$

Здесь $m\ (r)$ — моментная нагрузка, приложенная к грани пластинки $\theta = 0$.

Решение этой задачи запишем в виде интеграла Меллина:

$$w\,(r,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Omega L_*\,(p,\theta)\,a^{-1}\lambda^p\Gamma\,(p)\,\Psi_+\,(p)\,r^{1-p}\cos\pi p/2\,dp$$

$$L_*\,(p,\,\theta) = \cos\,(p+1)\,\theta - \cos\,(p-1)\,\theta + a_1\sin\,(p+1)\,\theta + a_2\sin\,(p-1)\,\theta$$

$$a = \sin^2 p\alpha + p^2\varkappa^{-1}\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2\,(4\varkappa)^{-1}$$

$$a_1 = \cos 2p\alpha + p\varkappa^{-1}\cos 2\alpha - \varkappa^{-1}\,(p-1) \quad a_2 = \cos 2p\alpha - p\varkappa^{-1}\cos 2\alpha + \varkappa^{-1}\,(p-1)^{-1}\,(p^2-\varkappa^2)$$

$$\Psi\,(p) = \mathrm{X}\,(p)\left[\frac{1}{2i}\int\limits_\Omega \frac{G\,(s)\,ds}{\mathrm{X}\,(s+1)\sin\pi\,(p-s)} + \frac{C}{\sin\pi\,(p-1)}\right]$$

$$C = \frac{G_0\,(0)}{2\pi D}$$

$$G\,(p) = -\,G_0\,(p)\,[\lambda^{p+1}\Gamma\,(1+p)\sin\pi p/2]^{-1}, \quad G_0\,(p) = \int\limits_0^\infty m\,(r)\,r^{p-1}dr$$

Контур интегрирования Ω выбирается так же, как и в задаче 3), а функция $\mathrm{X}\ (p)$ определена в (3.4), где

$$K\,(p) = -\,(\sin 2p\alpha - p\varkappa^{-1}\sin 2\alpha)\,a^{-1}\,\mathrm{ctg}\,\pi p/2$$

Асимптотика задачи 4) определяется формулами (1.20), где γ и μ — соответственно вещественные части корней уравнений

$$\varkappa\sin^2\alpha p + p^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2/4 = 0$$

$$\varkappa\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha = 0$$

5. Исследуем задачу об изгибе занимающих области A: $(0 \leqslant r < \infty,\ -\beta \leqslant \theta \leqslant 0)$ и B: $(0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha)$ двух клиновидных пластинок, шарнирно-опертых по граням $\theta = -\beta$ и $\theta = \alpha$ и соединенных стержнем, не работающим на кручение. Индексом минус обозначим упругие величины в области A, а индексом плюс — в области B. Рассматриваемая задача сводится к построению в областях A и B двух бигармонических функций $w^-\ (r,\ \theta)$ и $w^+\ (r,\ \theta)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\theta = -\beta, \; w^- = M_\theta^- = 0; \; \theta = \alpha, \; w^+ = M_\theta^+ = 0$$
$$\theta = 0, \; D_0\,\partial^4 w\,/\,\partial r^4 = V_\theta^+ - V_\theta^- + g\,(r), \; w^- = w^+ = w \tag{5.1}$$
$$\partial\omega^-\,/\,\partial\theta = \partial w^+\,/\,\partial\theta, \; M_\theta^- = M_\theta^+$$

Здесь w — прогиб балки, $q(r)$ — действующая на нее нагрузка.

Решение задачи (5.1) в классе функций $r \to 0$, $w^{\pm} = o(r^{\varepsilon})$, $\varepsilon > 1$ и $r \to \infty$, $w^{\pm} = o(r^{\delta})$, $\varepsilon > -\delta$ представимо в виде интеграла Меллина

$$w^{\pm}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Omega} R^{\pm}(p, \theta) \lambda^p \Gamma(p-1) \Psi_+(p) r^{1-p} \cos \pi p/2 \, dp \tag{5.2}$$

$$R^{\pm}(p, \theta) = A_1 \cos(p-1)\theta + A_2 \cos(p+1)\theta + B_1^{\pm} \sin(p-1)\theta + B_2^{\pm} \sin(p+1)\theta$$

$$A_1 = a_1 \sin(p-1)\alpha \sin(p-1)\beta, \quad A_2 = -a_2 \sin(p+1)\alpha \times \sin(p+1)\beta$$

$$B_1^- = a_1 \sin(p-1)\alpha \cos(p-1)\beta, \quad B_2^- = -a_2 \sin(p+1)\alpha \times \cos(p+1)\beta$$

$$B_1^+ = -a_1 \cos(p-1)\alpha \sin(p-1)\beta, \quad B_2^+ = a_2 \cos(p+1)\alpha \times \sin(p+1)\beta$$

$$a_1 = (p+1) \operatorname{cosec}[(\alpha+\beta)(p-1)], \quad a_2 = (p-1) \operatorname{cosec}[(\alpha+\beta)(p+1)]$$

$$\lambda = \frac{D_0}{4D_1}, \quad \Psi(p) = X(p) \left[\frac{1}{2i} \int\limits_{\Omega} \frac{G(s)\, ds}{X(s+1) \sin \pi (p-s)} \right]$$

$$X(p) = \exp\left\{ \int\limits_{\Omega} \frac{\ln K(s)\, ds}{\exp[2\pi i(p-s)] - 1} \right\}, \quad G(s) = \frac{Q(p)}{D_0 \lambda^p \Gamma(p+3) \sin \pi p/2}$$

$$Q(p) = \int\limits_0^{\infty} g(r) r^{p+2} dr, \quad K(p) = a_1 a_2 (p^2-1)^{-1} (A_1 + A_2) \operatorname{ctg} \pi p/2$$

Асимптотика упругих величин имеет вид (1.20), где $\gamma = -1 + \pi(\alpha+\beta)^{-1}$, а μ является вещественной частью корня уравнения

$$\sin 2p(\alpha+\beta) - \cos 2\alpha \sin 2p\beta - \cos 2\beta \sin 2p\alpha + p[\sin 2(\alpha+\beta) - \sin 2\alpha \cos 2p\beta - \sin 2\beta \cos 2p\alpha] = 0$$

Помимо рассмотренной задачи 5) можно указать цикл задач об изгибе клиновидных пластин, подкрепленных упругими стержнями, точное решение которых строится изложенным методом. К этому циклу относятся задачи, в которых стержень, имеющий только конечную изгибную жесткость, отличается условиями контакта на грани $\theta = 0$. При $\theta = 0$ первые два условия в (5.1) являются общими, а последние могут быть заменены любой из следующих пар условий: 1) $r^{-1}\partial w^+ / \partial\theta = r^{-1} \partial w^- / \partial\theta = 0$, 2) $M_\theta^+ = M_\theta^- = 0$, 3) $r^{-1}\partial w^+ / \partial\theta = M_\theta^- = 0$ или $M_\theta^+ = r^{-1}\partial w^- / \partial\theta = 0$.

Указанным методом строится также решение задач, в которых вместо стержня, имеющего конечную изгибную жесткость, на грани $\theta = 0$ помещен стержень, имеющий конечную жесткость кручения. Для таких стержней общими являются условия

$$r^{-1}\partial w^+ / \partial\theta = r^{-1}\partial w^- / \partial\theta; \quad G_0 r^{-1} \partial w / \partial\theta = M_\theta^+ - M_\theta^- + m(r)$$

к которым нужно присоединить любую из следующих пар условий:

$$1)\ w^+ = w^-,\ V_\theta^+ = V_\theta^-; \quad 2)\ w^+ = w^- = 0$$

$$3)\ V_\theta^+ = V_\theta^- = 0; \quad 4)\ w^+ = V_\theta^- = 0$$

или $w^- = V_\theta^+ = 0$. Во всех этих задачах условия шарнирного опирания на гранях $\theta = -\beta$, $\theta = \alpha$ могут быть заменены другими классическими условиями, не обязательно одинаковыми на обеих гранях. Кроме того, материалы клиньев A и B могут иметь различные упругие свойства вплоть до анизотропии. К этому циклу задач относятся также задачи об изгибе клиновидной пластинки, у которой одна грань закреплена классически, а другая подкреплена упругим стержнем (балкой), причем это подкрепление описывается условиями

$$D_0 \partial^4 w / \partial r^4 = g(r) - V_\theta, \quad M_\theta = m(r)$$

Последнее условие можно заменить условием $r^{-1} \partial w / \partial \theta = \varphi(r)$.

Авторы благодарят Г. Я. Попова за постоянное внимание к работе.

Поступила 10 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
2. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.