Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 539.3

КРУЧЕНИЕ ШАРОВОГО СЛОЯ СФЕРИЧЕСКИМ КОЛЬЦЕВЫМ ШТАМПОМ

В. М. Александров, В. А. Карпенко

(Москва, Ростов-на-Дону)

Методом [1,2] сведения парных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам исследуется смешанная задача теории упругости о кручении шарового слоя, внутренняя или внешняя поверхность которого жестко закреплена, кольцевыми сферическими штампами, сцепленными с другой поверхностью слоя. Полученные бесконечные алгебраические системы первого рода после регуляризации приводятся к системам второго рода, решение которых можно строить методом последовательных приближений. Аналогичным методом в работах [3,4] рассмотрены некоторые динамические задачи кручения тел со сферическими поверхностями.

1. Рассмотрим задачу о кручении упругого шарового слоя, одна из поверхностей $r = R_0$ которого жестко закреплена, вызванного поворотом относительно оси $\theta = 0$ на некоторый угол ε произвольного сферического (кругового или кольцевого) штампа, сцепленного с другой поверхностью $r = R$ слоя на участке $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. Направление осей сферической системы координат (r, θ, φ) выбираем так, что $\theta_1 < \pi / 2$, $\theta_2 \neq \pi$. Если $\theta_1 = 0$, то сферический штамп называем круговым; если $\theta_1 \neq 0$, то штамп называем кольцевым. Предполагаем, что поверхность $r = R$ шарового слоя вне штампа свободна от напряжений.

Введем специальные координаты (t, x, φ), связанные со сферическими (r, θ, φ) соотношениями

$$t = \ln (rR^{-1}), \quad x = \cos\theta \tag{1.1}$$

Требуется определить функцию перемещения $\psi(t, x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению [5] и граничным условиям

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + (1 - x^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 3\frac{\partial\psi}{\partial t} - 4x\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\psi(a, x) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \psi(0, x) = \varepsilon, \quad b \leqslant x \leqslant c \\ \sqrt{1 - x^2}\,\frac{\partial\psi(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad -1 \leqslant x < b, \; c < x \leqslant -1 \\ (a = \ln(R_0R^{-1}), \quad b = \cos\theta_2, \quad c = \cos\theta_1)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Перемещения u_φ и напряжения $\tau_{t\varphi}$, $\tau_{x\varphi}$ связаны с функцией перемещения соотношениями

$$u_\varphi = Re^t\sqrt{1-x^2}\,\psi$$
$$\tau_{t\varphi} = G\sqrt{1-x^2}\,\partial\psi/\partial t, \quad \tau_{x\varphi} = G(1-x^2)\,\partial\psi/\partial x$$

Решением дифференциального уравнения (1.2), удовлетворяющим первому граничному условию (1.3), является [5] функция

$$(1.4) \qquad \psi(t, x) = e^{-{}^3/{}_2 t}\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left[\operatorname{sh}\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{th}\left(\frac{2k+1}{2}\,a\right)\operatorname{ch}\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)\right]\frac{d}{dx}P_k^1(x)$$

Чтобы функция $\psi(t, x)$ (1.4) была решением рассматриваемой задачи, коэффициенты A_k должны удовлетворять, согласно последним двум граничным условиям (1.3), парным рядам-уравнениям, которые запишем в виде

$$(1.5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} B_k K(u_k)\, y(u_k, x) = P_1^1(x), \quad b \leqslant x \leqslant c$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k y(u_k, x) = 0, \quad -1 \leqslant x < b, \quad c < x \leqslant 1$$

Здесь

$$(1.6) \qquad B_k = -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{u_k^2 - {}^1/{}_4}{u_k}}\left[u_k + \frac{3}{2}\operatorname{th}(au_k)\right]A_k$$
$$y(u_k, x) = \sqrt{\frac{u_k}{u_k^2 - {}^1/{}_4}}\,P^1_{-{}^1/{}_2+u_k}(x), \quad u_k = k + \frac{1}{2}$$
$$K(u) = \frac{\operatorname{sh}(au)}{{}^3/{}_2\operatorname{sh}(au) + u\operatorname{ch}(au)}$$

($P_k^1(x)$ — функции Лежандра первого порядка).

Функции $y(u_k, x)$ — собственные функции (соответствующие собственным значениям u_k) задачи Штурма — Лиувилля

$$(1.7) \qquad Ly = u^2 y, \quad Ly = -(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{1-x^2}\right)y$$
$$y(u, -1) = 0, \quad y(u, 1) = 0$$

Функции $y(u_k, x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ составляют полную ортонормированную систему функций на отрезке $[-1, 1]$

$$(1.8) \qquad \int_{-1}^{1} y(u_k, x)\, y(u_n, x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$$

Функция $K(u)$ (1.6) в плоскости комплексного переменного $u = s + i\sigma$ — четная мероморфная функция. Все ее нули $\pm i\delta_n$ и полюса $\pm i\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — мнимые числа. Пронумеруем последовательно нули $z = i\delta_n$ и полюса $\zeta = i\gamma_n$, лежащие в полуплоскости $\sigma > 0$, в порядке возрастания модулей. Видно, что

$$\delta_n = \frac{\pi n}{|a|}, \quad \frac{(2n-1)\pi}{2|a|} < \gamma_n < \frac{\pi n}{|a|}$$
$$\gamma_n \to \frac{(2n-1)\pi}{2|a|} \quad \text{при } n \to \infty$$

Учитывая, что на любой правильной системе контуров Γ_n, лежащих в плоскости $u = s + i\sigma$, при $n \to \infty$ имеет место оценка

$$K(u) = O(u^{-1}), \quad |u| \to \infty$$

функцию $K(u)$ можно представить в виде ($N_1(u^2)$, $N_2(u^2)$ — целые функции)

$$K(u) = A\frac{N_1(u^2)}{N_2(u^2)} = A\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+u^2\delta_n^{-2}}{1+u^2\gamma_n^{-2}} \tag{1.9}$$
$$A = \frac{2a}{2+3a}$$

Введем обозначение

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k y(u_k, x) \tag{1.10}$$

Отметим, что функция $q(x)$ (1.10) с точностью до множителя $G\varepsilon$ совпадает с функцией распределения напряжений $\tau_{t\varphi}(0, x)$.

Учитывая (1.9), (1.10) и то, что оператор L (1.7) преобразует функцию $y(u_k, x)$ в функцию $u_k^2 y(u_k, x)$, представим первое соотношение парного уравнения (1.5) в виде

$$AN_1(L)q(x) = N_2(L)P_1^1(x) \tag{1.11}$$

Здесь $N_1(L)$ и $N_2(L)$ — дифференциальные операторы по x бесконечного порядка.

Решение дифференциального уравнения (1.11) относительно функции $q(x)$ имеет вид

$$q(x) = K^{-1}(u_1)P_1^1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x), \quad b \leqslant x \leqslant c \tag{1.12}$$

$$H_n(x) = C_n^\circ P^1_{-1/2+i\delta_n}(x) + C_n^* P^1_{-1/2-i\delta_n}(x) + D_n^\circ Q^1_{-1/2+i\delta_n}(x) + \tag{1.13}$$
$$+ D_n^* Q^1_{-1/2-i\delta_n}(x)$$

В формуле (1.12) первое слагаемое есть частное решение неоднородного уравнения, определяемое символическим методом, а бесконечная сумма дает общее решение однородного уравнения. Присоединенные функции Лежандра $P^1_{-1/2+u}(x)$ и $Q^1_{-1/2+u}(x)$ — линейно-независимые решения уравнения (1.7), C_n°, C_n^*, D_n°, D_n^* — постоянные величины.

Используя функциональные соотношения [6]

$$P^1_{-1/2+u}(-x) = P^1_{-1/2+u}(x)\cos[(1/2+u)\pi] -$$
$$- 2/\pi\, Q^1_{-1/2+u}(x)\sin[(1/2+u)\pi]$$
$$P^1_{-1/2+u}(x) = P^1_{-1/2-u}(x), \quad -1 < x < 1$$

функции $H_n(x)$ (1.13) запишем в виде

$$H_n(x) = C_n P^1_{-1/2+i\delta_n}(x) + D_n P^1_{-1/2+i\delta_n}(-x)$$

Поскольку функция $P^1_{-1/2+i\delta_n}(-x)$ неограниченно возрастает при $x \to 1$, то в случае кругового штампа (чтобы удовлетворить условию ограниченности контактных напряжений при $x \to 1$) постоянные D_n следует считать равными нулю.

Формула (1.12) вместе со вторым соотношением парного уравнения (1.5) определяет функцию $q(x)$ при $x \in [-1,1]$ с точностью до счетного множества постоянных C_n и D_n. С тем же произволом можно определить коэффициенты B_n (1.6), если воспользоваться свойством ортогональности (1.8) функций $y(u_k, x)$. Получаем

$$B_k = \left\{(1-x^2)\left[y(u_k, x)\left(\frac{dP_1^1(x)/dx}{(u_k^2-u_1^2)K(u_1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{u_k^2+\delta_n^2}\right) - \right.\right. \tag{1.14}$$

$$\left.\left. - y'(u_k, x)\left(\frac{P_1^1(x)}{(u_k^2-u_1^2)K(u_1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(x)}{u_k^2+\delta_n^2}\right)\right]\right\}_{x=b}^{x=c}$$

При выводе формулы (1.14) использовано равенство

$$\int_b^c y(v, x)\, y(w, x)\, dx = \left\{\frac{1-x^2}{v^2-w^2}\left[y(v, x)\, y'(w, x) - y'(v, x)\, y(w, x)\right]\right\}_{x=b}^{x=c} \tag{1.15}$$

справедливое для любых различных ($v \neq w$) решений $y(v, x)$ и $y(w, x)$ (т. е. для любых функций $P^1_{-1/2+v}(x)$, $Q_{-1/2+v}(x)$ и $P^1_{-1/2+w}(x)$, $Q^1_{-1/2+w}(x)$ при $v \neq w$) уравнения (1.7).

2. Для определения постоянных C_n и D_n используем первое соотношение парного уравнения (1.5).

Отметим, что функцию

$$y^\circ(u_1, x) = \begin{cases} P_1^1(x), & b \leqslant x \leqslant c \\ 0, & -1 \leqslant x < b, \quad c < x \leqslant 1 \end{cases}$$

можно, учитывая равенство (1.15), представить в виде ряда

$$y^\circ(u_1, x) = \sum_{k=1}^{\infty} y(u_k, x)\left\{\frac{1-x^2}{u_k^2-u_1^2}\left[y(u_k, x)\frac{d}{dx}P_1^1(x) - \right.\right. \tag{2.1}$$

$$\left.\left. - y'(u_k, x)\, P_1^1(x)\right]\right\}_{x=b}^{x=c}$$

Подставив коэффициенты B_k (1.14) и функцию $y^\circ(u_1, x)$, представленную в виде ряда (2.1) ($P_1^1(x) = y^\circ(u_1, x)$ при $b \leqslant x \leqslant c$), в первое соотношение парного уравнения (1.5) и учитывая, что $K(i, \delta_n) = 0$, получим соотношение

$$\left\{(1-d^2)\left[K^{-1}(u_1)\left(P_1^1(d)\, S_d(-iu_1, x) - T_d(-iu_1, x)\, dP_1^1(d)/dd\right) + \right.\right. \tag{2.2}$$

$$\left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(d)\, S_d(\delta_n, x) - H'(d)\, T_d(\delta_n, x)\right)\right]\right\}_{d=b}^{d=c} = 0$$

$$T_d(\varkappa, x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K(u_k) - K(i\varkappa)}{u_k^2+\varkappa^2}\, y(u_k, d)\, y(u_k, x) \tag{2.3}$$

$$S_d(\varkappa, x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K(u_k) - K(i\varkappa)}{u_k^2+\varkappa^2}\, y'(u_k, d)\, y(u_k, x)$$

Мероморфную функцию $K(u)$ (1.6) представим в виде ряда

$$K(u) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m\gamma_m}{u^2+\gamma_m^2}, \quad g_m = \frac{i\pi}{[K^{-1}(i\gamma_m)]'} \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), запишем выражения (2.3) в следующем виде:

$$T_d(\varkappa, x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m\gamma_m}{\gamma_m^2-\varkappa^2}\rho_d(\gamma_m, x) \tag{2.5}$$

$$S_d(\varkappa, x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m\gamma_m}{\gamma_m^2-\varkappa^2}\sigma_d(\gamma_m, x)$$

$$\rho_d(\gamma_m, x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y(u_k, d)\,y(u_k, x)}{u_k^2+\gamma_m^2} \tag{2.6}$$

$$\sigma_d(\gamma_m, x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y'(u_k, d)\,y(u_k, x)}{u_k^2+\gamma_m^2}$$

Ряды (2.6) можно просуммировать, используя соотношение [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{u-k}-\frac{1}{u+k+1}\right)P_k^1(x_1)\,P_k^{-1}(x_2) = \tag{2.7}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi u)}P_u^1(x_1)\,P_u^{-1}(x_2)$$

$$(x_1 = \cos\alpha_1,\ x_2 = \cos\alpha_2,\ 0<\alpha_1<\pi,\ 0<\alpha_2<\pi,$$

$$\alpha_1+\alpha_2<\pi)$$

После преобразований получаем

$$\rho_b(\gamma_m, x) = \lambda_m P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)\,P^1_{-1/2+i\gamma_m}(x) \tag{2.8}$$

$$\rho_c(\gamma_m, x) = \lambda_m P^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)\,P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-x)$$

$$\sigma_b(\gamma_m, x) = \lambda_m\, dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)\,/\,db P^1_{-1/2+i\gamma_m}(x)$$

$$\sigma_c(\gamma_m, x) = \lambda_m\, dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)\,/\,dc P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-x)$$

$$\lambda_m = \pi\,[2(\gamma_m^2+{}^1/_4)\operatorname{ch}(\pi\gamma_m)]^{-1}$$

Таким образом, функции $\rho_b(\gamma_m, x)$, $\rho_c(\gamma_m, x)$, $\sigma_b(\gamma_m, x)$ и $\sigma_c(\gamma_m, x)$ представлены в виде линейных комбинаций функций $P^1_{-1/2+i\gamma_m}(x)$ и $P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-x)$.

Подставляя выражения (2.5) с учетом формул (2.8) в соотношение (2.2) и приравнивая нулю суммы коэффициентов при одинаковых функциях $P^1_{-1/2+i\gamma_m}(x)$ и $P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, получаем бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для определения постоянных C_n и D_n, которые запишем в матричной форме

$$BX + B_0Y = D, \quad C_0X + CY = E \tag{2.9}$$

Здесь $B = (b_{mn})$, $B_0 = (b_{mn}^\circ)$, $C = (c_{mn})$, $C_0 = (c_{mn}^\circ)$ — известные матрицы бесконечного порядка, $D = (d_m)$, $E = (e_m)$ — известные матрицы-столбцы (матрицы порядка $\infty \times 1$), $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ — неизвестные матрицы-столбцы, причем

(2.10) $$b_{mn}=\xi_{mn}(b)\left[\frac{dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)/db}{P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)}-\frac{dP^1_{-1/2+i\delta_n}(b)/db}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(b)}\right]$$

$$\overset{\circ}{b}_{mn}=\frac{\xi_{mn}(b)}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(-c)}\left[\frac{P^1_{-1/2+i\delta_n}(-b)}{P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)}\frac{dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)}{db}-\frac{dP^1_{-1/2+i\delta_n}(-b)}{db}\right]$$

$$c_{mn}=\xi_{mn}(c)\left[\frac{dP^1_{-1/2+i\delta_n}(-c)/dc}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(-c)}-\frac{dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)/dc}{P^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)}\right]$$

$$\overset{\circ}{c}_{mn}=\frac{\xi_{mn}(c)}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(b)}\left[\frac{dP^1_{-1/2+i\delta_n}(c)}{dc}-\frac{P^1_{-1/2+i\delta_n}(c)}{P^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)}\frac{dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)}{dc}\right]$$

$$d_m=\eta_m(b)\left[\frac{dP_1{}^1(b)}{db}-\frac{P_1{}^1(b)}{P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)}\frac{dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(-b)}{db}\right]$$

$$e_m=\eta_m(c)\left[\frac{P_1{}^1(c)}{P^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)}\frac{dP^1_{-1/2+i\gamma_m}(c)}{dc}-\frac{dP_1{}^1(c)}{dc}\right]$$

$$\xi_{mn}(d)=\frac{\sqrt{1-d^2}}{\gamma_m{}^2-\delta_n{}^2},\quad \eta_m(d)=\frac{\sqrt{1-d^2}}{(\gamma_m{}^2+u_1{}^2)K(u_1)}$$

$$x_n=C_nP^1_{-1/2+i\delta_n}(b),\quad y_n=D_nP^1_{-1/2+i\delta_n}(-c)$$

В случае кругового штампа для определения постоянных C_n получаем матричное уравнение

(2.11) $$BX=D$$

3. Используя асимптотические разложения [7] функций Лежандра, легко получить для больших значений σ

(3.1) $$\frac{d}{dx}P^1_{-1/2+i\sigma}(\pm x)=\mp\frac{\sigma}{\sqrt{1-x^2}}P^1_{-1/2+i\sigma}(\pm x)\left[1+O(\sigma^{-1})\right]$$

Учитывая соотношения (3.1), замечаем, что при $\gamma_m\to\infty$ и $\delta_n\to\infty$ и фиксированных значениях x элементы $b_{mn}{}^\circ$ и $c_{mn}{}^\circ$ матриц B_0 и C_0 стремятся к нулю, а элементы b_{mn} и c_{mn} (2.10) матриц B и C стремятся к соответствующим элементам матрицы $T=(\tau_{mn})$

(3.2) $$\tau_{mn}=(\gamma_m-\delta_n)^{-1}$$

Элементы матрицы T^{-1}, двухсторонней обратной к матрице T, определены формулой [2,8]

(3.3) $$t_{nm}=\{K_+{}'(-i\delta_n)\,[K_-{}^{-1}(i\gamma_m)]'\,(\delta_n-\gamma_m)\}^{-1}$$

$$K_+(u)=K_-(u)=\sqrt{A}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u}{i\delta_k}+1\right)\left(\frac{u}{i\gamma_k}+1\right)^{-1}$$

С помощью матрицы T^{-1} (3.3) системы уравнений (2.9) и (2.11) могут быть регуляризованы [8]. Получаем следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

в случае кругового штампа

(3.4) $$X+T^{-1}(B-T)X=T^{-1}D$$

в случае кольцевого штампа

(3.5) $$X + T^{-1}(B - T)X + T^{-1}B_0Y = T^{-1}D$$
$$Y + T^{-1}(C - T)Y + T^{-1}C_0X = T^{-1}D$$

Решение систем уравнений (3.4) и (3.5) можно строить [8] методом последовательных приближений.

Контактные напряжения, согласно (1.10), (1.12) и (2.10), после нахождения коэффициентов x_n, y_n определяются по формуле

(3.6) $$\tau_{t\varphi}(0, x) = G\varepsilon\left\{\frac{3R_0^3\sqrt{1-x^2}}{R^3-R_0^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x_n}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(b)}P^1_{-1/2+i\delta_n}(x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{y_n}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(-c)}P^1_{-1/2+i\delta_n}(-x)\right]\right\}$$

Для величины крутящего момента, приложенного к штампу, учитывая равенство (1.15), получаем

(3.7) $$\frac{M}{2\pi R^3G\varepsilon}\,\frac{[3(c-b)-c^3+b^3]R_0^3}{R^3-R_0^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{x_n[F_n(c)-F_n(b)]}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(b)} - \right.$$
$$\left. - \frac{y_n[F_n(-c)-F_n(-b)]}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(-c)}\right\}$$
$$F_n(x) = \frac{1-x^2}{u_1^2-\delta_n^2}\left[P_1^1(x)\frac{d}{dx}P^1_{-1/2+i\delta_n}(x) - P^1_{-1/2+i\delta_n}(x)\frac{d}{dx}P_1^1(x)\right]$$

Если относительная толщина шарового слоя мала, то, использовав асимптотическое разложение [7] функции $P^1_{-1/2+i\delta_n}(x)$ при больших значениях δ_n ($\delta_n > 32n$ при $|R_0 - R|R^{-1} \leqslant 0.1$), получим соотношения

(3.8) $$\frac{P^1_{-1/2+i\delta_n}(x)}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(b)} = \left(\frac{1-b^2}{1-x^2}\right)^{1/4}\left[\exp(-\delta_n(\theta_2-\theta)) + O\left(\frac{\exp(-\delta_n\theta_2)}{\delta_n}\right)\right]$$
$$\frac{P^1_{-1/2+i\delta_n}(-x)}{P^1_{-1/2+i\delta_n}(-c)} = \left(\frac{1-c^2}{1-x^2}\right)^{1/4}\left[\exp(-(\theta-\theta_1)\delta_n) + O\left(\frac{\exp(-\delta_n(\pi-\theta_1))}{\delta_n}\right)\right]$$

В качестве главных членов асимптотики (при малой относительной толщине $|R_0 - R|R^{-1}$ шарового слоя) решения системы уравнений (2.9) можно взять решения [8]

(3.9) $$X_0 = (x_n^\circ),\quad Y_0 = (y_n^\circ)$$
$$\frac{x_n^\circ}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{y_n^\circ}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{3R_0^3}{R^3-R_0^3}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

системы уравнений

$$T_0X_0 = D_0,\quad T_0Y_0 = E_0$$
$$T_0 = (\overset{\circ}{\tau}_{mn}),\quad D_0 = (d_m^\circ),\quad E_0 = (e_m^\circ),\quad \overset{\circ}{\tau}_{mn} = (\gamma_m^\circ - \delta_n)^{-1}$$
$$d_m^\circ = \frac{3R_0^3\sqrt{1-b^2}}{(R_0^3-R^3)\gamma_m^\circ},\quad e_m^\circ = \frac{3R_0^3\sqrt{1-c^2}}{(R_0^3-R^3)\gamma_m^\circ},\quad \gamma_m^\circ = \frac{(2m-1)\pi}{2|a|}$$

Просуммировав с учетом (3.8) и (3.9) ряды в (3.6), для приближенного вычисления контактных напряжений при малой относительной толщине шарового слоя получаем следующую формулу:

$$\tau_{r\varphi}(R,\theta)=\frac{3R_0^3G\varepsilon\sin\theta}{R^3-R_0^3}\left\{1-\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta}\right)^{3/2}\left[1-\left(1-\exp\left(-\frac{\pi(\theta_2-\theta_1)}{|a|}\right)\right)^{-1/2}\right]-\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}\right)^{3/2}\left[1-\left(1-\exp\left(-\frac{\pi(\theta-\theta_1)}{|a|}\right)\right)^{-1/2}\right]\right\} \tag{3.10}$$

Зависимость (3.7) величины крутящего момента M, приложенного к штампу, от величины ε угла поворота штампа дается, с учетом (3.1), (3.8), (3.9), соотношением

$$M=6\pi R^3R_0^3G\varepsilon(R^3-R_0^3)^{-1}[\cos\theta_1-\cos\theta_2-{}^1/_3(\cos^3\theta_1-\cos^3\theta_2)+(\sin^3\theta_1+\sin^3\theta_2)|a|\pi^{-1}\ln 4] \tag{3.11}$$

Отметим, что согласно (3.10), контактные напряжения неограниченно возрастают при приближении к границам штампа. На границах штампа (при $\theta=\theta_1$ и $\theta=\theta_2$) контактные напряжения имеют корневые особенности

$$\lim_{\theta\to\theta_1}\tau_{r\varphi}(R,\theta)\sqrt{\theta\theta_1^{-1}-1}=f(\theta_1)$$

$$\lim_{\theta\to\theta_2}\tau_{r\varphi}(R,\theta)\sqrt{1-\theta\theta_2^{-1}}=f(\theta_2)$$

$$f(\theta)=\frac{3R_0^3G\varepsilon}{R^3-R_0^3}\sqrt{\frac{|a|}{\pi\theta}}\sin\theta$$

Если кручение шарового слоя осуществляется круговым сферическим штампом, то в формулах (3.10) и (3.11) следуют положить $\theta_1=0$.

Поступила 26 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1.
2. *Александров В. М.* Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
3. *Бабешко В. А., Векслер В. Е.* Динамические задачи кручения для тел со сферическими поверхностями. Изв. АН АрмССР. Механика, 1975, т. 28, № 5.
4. *Векслер В. Е.* Некоторые контактные задачи для тел со сферическими границами. Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высшей школы. Сер. естеств. наук, 1976, № 1.
5. *Арутюнян Н. X., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М., «Наука», 1971.
7. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
8. *Бабешко В. А.* Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.