Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 539.3

О РАСШИРЕНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Применимость метода интегральных преобразований к краевой задаче связана с тем, совпадают ли граничные условия этой задачи относительно переменной, по которой совершается преобразование, с граничными условиями соответствующей проблемы Штурма — Лиувилля. Предлагается способ переноса метода интегральных преобразований на случай краевых задач, когда такого совпадения нет. Более того, интервал изменения переменной, по которой совершается преобразование, меньше, чем интервал определения соответствующей проблемы Штурма — Лиувилля, и граничное условие краевой задачи смешанное. Указывается способ переноса указанного метода на краевые задачи в многосвязных и сложных областях, контуры которых вписываются в рассматриваемую сетку координат. Способ иллюстрируется на антиплоских и плоских задачах теории упругости.

Цель и идейную сторону основного содержания статьи представляется удобным изложить применительно к краевым задачам для уравнения второго порядка общего вида (с разделяющими переменными) относительно функции $u \equiv u(x, y)$

$$r(x)(pu')' + r_1(y)(p_1 u^{\cdot})^{\cdot} - q(x)u - q_1(y)u = 0 \qquad (0.1)$$
$$(a_0 < x < a_1, \ b_0 < y < b_1)$$

Здесь и ниже штрихи означают производные по первой переменной, точки — по второй переменной.

Известно [1], что каждому интегральному преобразованию, которое запишем здесь в общем виде

$$u_\lambda(y) = \int_{a_0}^{a_1} \frac{K(x, \lambda)}{r(x)} u(x, y)\,dx, \quad u = \int_l R(x, \lambda)\,u_\lambda(y)\,d\sigma \qquad (0.2)$$

(l — контур в плоскости комплексного переменного, $\sigma(x)$ — функция распределения [1]), соответствует своя проблема Штурма — Лиувилля

$$r(pK')' - qK = -\lambda K \quad (a_0 < x < a_1) \qquad (0.3)$$
$$U_j[k] = \alpha_{j_0} K(a_j, \lambda) + \alpha_{j_1} K'(a_j, \lambda) = 0 \quad (j = 0,1)$$

относительно ядра преобразования $K \equiv K(x, \lambda)$.

Известная схема метода интегральных преобразований базируется на совпадении граничных условий на гранях $x = a_j$ ($j = 0,1$) краевой задачи для уравнения (0.1) с граничными условиями в (0.3). Это позволяет [1] путем умножения (0.1) на $r^{-1}(x)K(x, \lambda)$ и интегрирования по частям свести исходную задачу к одномерной краевой задаче относительно трансформанты $u_\lambda(y)$, если граничные условия по граням $y = b_j$ ($j = 0, 1$) имеют вид

$$V_j[u] = \beta_{j_0} u(x, b_j) + \beta_{j_1} u^{\cdot}(x, b_j) = B_j(x) \qquad (0.4)$$
$$(a_0 \leqslant x \leqslant a_1, \ j = 0, 1)$$

т. е. не являются смешанными.

Следующий этап [1] схемы метода интегральных преобразований (назовем ее классической) заключается в решении полученной одномерной краевой задачи и использовании формулы обращения из (0.2).

Если же по граням $y = b_j$ краевые условия (0.4) становятся смешанными, то от описанной схемы отходят: к одномерной краевой задаче исходную не сводят, а используют только соответствующее одномерное дифференциальное уравнение, строят его общее решение и на этой основе получают общее интегральное или рядовое представление решения исходной краевой задачи. Затем реализуют смешанные краевые условия, что приводит к парным интегральным или ря́довым уравнениям. Такой подход к решению краевых задач в настоящее время широко используется, (см., например, [2–4]).

Еще более уклоняются от классической схемы метода интегральных преобразований в ситуациях, когда по граням $x = a_j$ $(j = 0, 1)$ краевые условия не совпадают с однородными условиями Штурма — Лиувилля (0.3) и тем более, если они оказываются смешанными. В таких случаях для удовлетворения граничным условиям используют общие интегральные или рядовые представления (например, [5]), которые могут быть получены и без интегральных преобразований (методом разделения переменных), либо [6] специально подобранные интегральные или рядовые представления решения для более простых областей, пересечения которых образуют рассматриваемую.

Имеются и другие (см., например, [7,8]) подходы к решению смешанных краевых задач.

Здесь указывается путь (первые шаги на этом пути, по-видимому, сделаны в [9,10]) реализации описанной выше классической схемы метода интегральных преобразований применительно к краевым задачам, когда по граням $y = b_j$ $(j = 0,1)$ граничные условия смешанные, а по граням $x = a_j$ $(j = 0,1)$ они не совпадают с записанными в (0.3). Более того, они тоже могут быть смешанными и интервал изменения соответствующей переменной в (0.1) может быть меньше интервала, на котором задана задача Штурма—Лиувилля.

Кроме того, указывается способ переноса классической схемы метода интегральных преобразований на случай многосвязных и сложных областей.

Изложенное здесь в сочетании с подходом, развитым в [11], расширяет диапазон применимости классической схемы метода интегральных преобразований.

1. Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения (0.1) в области $a_0 \leqslant x \leqslant a \leqslant a_1$, $b_0 \leqslant y \leqslant b_1$, т. е. область изменения переменной x меньше области (a_0, a_1), на которой задана проблема Штурма — Лиувилля (0.3).

Чтобы не загромождать суть дела, будем считать граничные условия по граням $x = a_0$ и $y = b_0$ не смешанными и однородными, т. е.

$$U_0[u] = 0 \ (b_0 \leqslant y \leqslant b_1), \quad V_0[u] = 0 \ \ (a_0 \leqslant x \leqslant a_1) \tag{1.1}$$

а на оставшихся гранях будем их считать смешанными. Например, на грани $x = a$ зададим их в виде

$$\begin{gathered} U^-[u] = \alpha_0^- u(a, y) + \alpha_1^- u'(a, y) = g_-(y) \ (b_0 \leqslant y < b) \\ U^+[u] = \alpha_0^+ u(a, y) + \alpha_1^+ u'(a, y) = g_+(y) \ (b < y \leqslant b_1) \end{gathered} \tag{1.2}$$

а на грани $y = b_1$ в виде

$$\begin{gathered} V^-[u] = \beta_0^- u(x, b_1) + \beta_1^- u^{\cdot}(x, b_1) = s_-(x) \ (a_0 \leqslant x < c) \\ V^+[u] = \beta_0^+ u(x, b_1) + \beta_1^+ u^{\cdot}(x, b_1) = s_+(x) \ (c < x \leqslant a) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Если ввести неизвестные функции $\chi_{\mp}(y)$, $b_0 \leqslant y \leqslant b_1$ и при этом считать

$$\chi_-, g_- \equiv 0 \ \ (b < y \leqslant b_1), \ \chi_+, g_+ \equiv 0 \ \ (b_0 \leqslant y < b)$$

то условия (1.6) можно записать так:

(1.4) $$\alpha_0^{\mp} u(a, y) + \alpha_1^{\mp} u'(a, y) = g_{\mp} + \chi_{\pm} \quad (b_0 \leqslant y \leqslant b_1)$$

Аналогично, введя неизвестные функции $\psi_{\mp}(x)$, $a_0 \leqslant x \leqslant a$ и считая

$$s_-, \psi_- \equiv 0 \ (c < x \leqslant a), \quad s_+, \psi_+ \equiv 0 \ (a_0 \leqslant x < c)$$

вместо (1.3) запишем

(1.5) $$V^{\mp}[u] = s_{\mp}(x) + \psi_{\pm}(x) \quad (a_0 \leqslant x \leqslant a)$$

Классическая схема метода интегральных преобразований предписывает сведение исходной задачи к одномерной с помощью интегрального преобразования (0.2). Чтобы осуществить такое сведение, в разбираемом случае будем считать, что $u(x, y) \equiv 0$ при $a < x \leqslant a_1$ и под значениями $u(x, y)$ и ее производных в точках $x = a$ принимать их предельные значения изнутри области: $a_0 < x < a_1$, $b_0 < y < b_1$.

Умножив уравнение (0.1) на $r^{-1}(x) K(x, \lambda)$, выполним интегрирование по x на отрезке $[a_0, a]$ по частям (ср. [11]). Последующий учет (0.2), (0.3) и (1.1) преобразует уравнение (0.1) к следующему:

(1.6) $$Lu_\lambda = r_1 (p_1 u_\lambda')' - (q_1 + \lambda) u_\lambda = n_1(a) u(a, y) - n_0(a) u'(a, y)$$
$$(b_0 < y < b_1, \quad n_1(a) = p(a) K'(a, \lambda), \quad n_0(a) = p(a) K(a, \lambda))$$

Исключим из правой части полученного уравнения значения искомой функции и ее производной при $x = a$. С этой целью разрешим систему уравнений (1.4) относительно указанных значений, считая $\Delta = \alpha_1^+\alpha_0^- - \alpha_0^+\alpha_1^- \neq 0$. Можно убедиться, что нарушение этого условия приводит к более простой ситуации, когда отсутствует точка смены граничных условий на грани $x = a$. Этот частный случай ниже также будет рассмотрен. Подставив найденные таким образом значения $u(a, y)$ и $u'(a, y)$ в (1.6), будем иметь

(1.7) $$Lu_\lambda(y) = n^+[g_-(y) + \chi_+(y)] - n^-[\chi_-(y) + g_+(y)]$$
$$(b_0 < y < b_1, \ n^{\pm} = \Delta^{-1} p(a) U^{\pm}[K])$$

Применение интегрального преобразования (0.2) к краевым условиям (1.5) приводит их к виду

$$V^{\mp}[u_\lambda] = s_\lambda^{\mp} + \psi_\lambda^{\pm}, \qquad \left\| \begin{matrix} s_\lambda^{\mp} \\ \psi_\lambda^{\mp} \end{matrix} \right\| = \int_{a_0}^{a} \frac{K(\xi, \lambda)}{r(\xi)} \left\| \begin{matrix} s_{\mp}(\xi) \\ \psi_{\mp}(\xi) \end{matrix} \right\| d\xi$$
$$V_0^{\cdot}[u_\lambda] = 0$$

Эти соотношения вместе с (1.7) показывают, что исходная двумерная краевая задача может быть преобразована к двум вариантам одномерных краевых задач для уравнения (1.7). В первом из них краевые условия имеют вид

(1.8) $$V_0[u_\lambda] = 0, \ V_1[u_\lambda] = V^+[u_\lambda] = s_\lambda^+ + \psi_\lambda^-$$

а во втором они должны быть взяты в виде

$$V_0[u_\lambda] = 0, \ V_1[u_\lambda] = V^-[u_\lambda] = s_\lambda^- + \psi_\lambda^+$$

Какой из этих вариантов взять, зависит от того, что более удобным брать в качестве искомой функции $\psi_-(x)$ или $\psi_+(x)$. Например, если в качестве искомой взять функцию $\psi_-(x)$, то следует решать краевую задачу

(1.7), (1.8). Построив для нее базисную систему [11] функций $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$ и функцию Грина $G(y, \eta)$, решение получим по формуле [11,12]

$$u_\lambda(y) = \int_{b_0}^{b_1} G(y, \eta)\{n^+[g_-(\eta) + \chi_+(\eta)] - \tag{1.9}$$
$$- n^-[\chi_-(\eta) + g_+(\eta)]\}\, d\eta + \psi_1(y)(s_\lambda^+ + \psi_\lambda^-)$$

Воспользовавшись формулой обращения из (0.2), выразим решение поставленной смешанной краевой задачи через неизвестные функции $\chi_\pm(y)$, $\psi_-(x)$. Реализация краевых условий

$$V^-[u] = s_-(x) \quad (a_0 \leqslant x < c) \tag{1.10}$$
$$U^-[u] = g_-(y) \quad (b_0 \leqslant y < b), \quad U^+[u] = g_+(y) \quad (b_0 < y < b_1)$$

приведет к системе из трех интегральных уравнений относительно указанных функций.

Укажем случаи, когда это количество уравнений сокращается. Пусть вместо смешанных условий (1.2) имеет место краевое условие

$$U^-[u] = g(y) \quad (b_0 \leqslant y \leqslant b_1) \tag{1.11}$$

Можно убедиться, что в этом случае в формуле (1.9) следует положить

$$g_- = g, \quad \chi_- = u'(a, y) = \chi(y)$$
$$\chi_+ = g_+ = 0, \quad \alpha_1^+ = 1, \quad \alpha_0^+ = 0, \quad \Delta = \alpha_0^-$$

и два уравнения для определения искомых функций χ, ψ_- получим, выполнив, кроме первого условия из (1.10) еще и краевое условие (1.11).

Пусть теперь $a = a_1$, т. е. интервал изменения переменной x в уравнении (0.1) и интервал, на котором задана краевая задача Штурма—Лиувилля (0.3) совпадают. Если к тому же еще и смешанные условия переходят в одно $U_1[u] = g(y)$, $b_0 \leqslant y \leqslant b_1$, то в формуле (1.9) следует положить

$$n^+ = \alpha_{10}^{-1} p(a_1) K'(a_1, \lambda), \quad g_- \equiv g, \quad \chi_+ \equiv 0, \quad n^- = 0$$

и неизвестной останется только одна функция $\psi_-(x)$. Интегральное уравнение для нее получим, выполнив первое условие из (1.10).

Замечание 1. При реализации условий (1.10) и их частных случаев с помощью формул (0.2) и (1.9) предварительно следует, так же как и при реализации схемы, изложенной в [11], выделить и просуммировать (вычислить) неабсолютно или слабо сходящиеся части рядов (несобственных интегралов).

Кроме того, все выполненные построения очевидным образом переносятся на случай, когда уравнение (0.1) неоднородно или когда граничное условие на грани $x = a_0$ не совпадает с соответствующим условием задачи Штурма—Лиувилля, а также на случай, когда внутри области имеются разрезы и тонкие включения [11].

2. Изложенное проиллюстрируем на следующей антиплоской задаче теории упругости для полуплоскости ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$) с разрезом по отрезку: $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$. На симметричных отрезках $-b \leqslant y < 0$, $0 < y \leqslant b$ границы ($x = 0$) упругой полуплоскости приклеены жесткие штампы с плоскими основаниями. Эти штампы подвергаются продольному сдвигу в противоположных направлениях на одну и ту же величину δ. Требуется найти распределение напряжений в полуплоскости.

Поскольку линия $y = 0$ — ось косой симметрии для продольных перемещений $u(x, y)$ точек полуплоскости, поставленную задачу можно сформулировать в виде следующей смешанной краевой задачи для четвертьплоскости:

$$u'' + u^{\cdot\cdot} = 0 \quad (0 < x < \infty, \ -\infty < y < \infty) \tag{2.1}$$

$$u(0, y) = -\delta \quad (0 \leqslant y \leqslant b), \quad u'(0, y) = 0 \quad (b < y < \infty) \tag{2.2}$$

$$u^{\cdot}(x, 0) = 0 \quad (0 \leqslant x < a), \quad u(x, 0) = 0 \quad (a \leqslant x < \infty) \tag{2.3}$$

Здесь учтено, что искомые напряжения определяются формулами (μ — модуль сдвига)

$$\tau_{xz} = \mu u'(x, y), \quad \tau_{yz} = \mu u^{\cdot}(x, y) \tag{2.4}$$

В рассматриваемом случае, если иметь в виду, как и выше, интегральное преобразование по переменной x, второе краевое условие по грани $x = 0$ соответствует косинус-преобразованию Фурье

$$u_\lambda(y) = \int_0^\infty \cos\lambda x \, u(x, y)\, dx, \quad u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u_\lambda(y)\cos\lambda x\, d\lambda \tag{2.5}$$

которое и будем применять для сведения поставленной двумерной краевой задачи к одномерной, доопределив указанное краевое условие с помощью неизвестной функции (контактное напряжение под штампом) $\chi_-(y) = \tau(y)$, обладающей свойством $\chi_-(y) = \tau(y) \equiv 0$ $(b < y < \infty)$, на всю грань $x = 0$, т. е.

$$u'(0, y) = \mu^{-1}\tau(y) \quad (0 \leqslant y < \infty) \tag{2.6}$$

Последующее умножение уравнения (2.1) на $\cos\lambda x$, интегрирование по частям полуоси $(0, \infty)$ и использование (2.5) и (2.6) приведет к уравнению

$$-u_\lambda^{\cdot\cdot} + \lambda^2 u_\lambda = -\mu^{-1}\tau(y) \quad (0 < y < \infty) \tag{2.7}$$

Как это следует из изложенной выше общей схемы, имеется два варианта приписать уравнению (2.7) краевые условия. В разбираемом случае эти варианты определяются тем, какое из условий в (2.3) доопределить на всю грань. Доопределим второе условие из (2.3)

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x < \infty) \tag{2.8}$$

введя функцию $\psi_+(x) = \varphi(x)$, отличную от нуля на конечном интервале $(\psi_+ \equiv \varphi \equiv 0, \ x > a)$. Доопределение первого условия из (2.3) в данном случае менее удобно, так как приводит к искомой функции, отличной от нуля на полубесконечном интервале.

Применение к (2.4) преобразования (2.5) приведет к следующему краевому условию для уравнения (2.7):

$$u_\lambda(0) = \varphi_\lambda \quad \left(\varphi_\lambda = \int_0^\infty \cos\lambda\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi\right) \tag{2.9}$$

Построив [11] с помощью фундаментальной функции

$$e_\lambda(y - \eta) = (2\lambda)^{-1} e^{-\lambda|y-\eta|} \tag{2.10}$$

функцию Грина

(2.11) $G(y, \eta) = e_\lambda(y - \eta) - e_\lambda(y + \eta)$

краевой задачи (2.7), (2.9), ее решение найдем по формуле

$$u_\lambda(y) = -\frac{1}{\mu}\int_0^b G(y, \eta)\,\tau(\eta)\,d\eta + e^{-\lambda y}\varphi_\lambda \tag{2.12}$$

представляющей собой аналог формулы (1.9).

Для проведения дальнейших выкладок представляется удобным (ср. [11]) преобразовать формулу (2.9) для φ_λ интегрированием по частям к следующему виду:

$$\varphi_\lambda = -\int_0^a \frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\,\varphi'(\xi)\,d\xi$$

Имея в виду это, а также (2.10), (2.11), на основании (2.12) можем записать

$$u_\lambda'(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^b\left[\frac{\operatorname{sgn}(y-\eta)}{e^{\lambda|y-\eta|}} - e^{-\lambda(y+\eta)}\right]\tau(\eta)\,d\eta + {} \tag{2.13}$$
$$+ e^{-\lambda y}\int_0^a \sin\lambda\xi\varphi'(\xi)\,d\xi$$

Отсюда, воспользовавшись формулой обращения из (2.5) и вычислив известные несобственные интегралы (ср. [11]), получим

$$u^\bullet(x, y) = \frac{1}{\pi\mu}\int_0^b\left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+x^2} - \frac{y+\eta}{(y+\eta)^2+x^2}\right]\tau(\eta)\,d\eta + {} \tag{2.14}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^a\left[\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+y^2} + \frac{\xi+x}{(\xi+x)^2+y^2}\right]\varphi'(\xi)\,d\xi$$

Аналогично можно получить формулу для производной $u'(x, y)$, через которую выражается напряжение τ_{xz} согласно (2.4).

Для получения системы интегральных уравнений, определяющих функции $\tau(\eta)$ и $\varphi'(\xi)$, следует реализовать первое условие из (2,2), записав его в виде $u^\bullet(0, y) = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant b)$, и первое условие из (2.3). Воспользовавшись для этой цели формулой (2.14), получим требуемую систему интегральных уравнений

$$-\frac{1}{\mu}\int_0^b \frac{\eta\tau(\eta)\,d\eta}{\eta^2 - y^2} + \int_0^a \frac{\xi\varphi'(\xi)\,d\xi}{\xi^2 + y^2} = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant b)$$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^b \frac{\eta\tau(\eta)\,d\eta}{\eta^2 + x^2} - \int_0^a \frac{\xi\varphi'(\xi)\,d\xi}{\xi^2 - x^2} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

В случае $b = a$ эта система с помощью операций сложения и вычитания легко приводится к раздельно решаемым (в явном виде) сингулярным интегральным уравнениям. Произвольные постоянные в их решениях найдутся из условия интегрируемости функций $\tau(\eta)$ и $\varphi'(\xi)$, а также из следующего легко проверяемого условия:

$$\int_0^a \varphi'(\xi)\, d\xi = \delta$$

В результате решение системы (2.15) при $b = a$ запишется в виде

$$\frac{\tau(x)}{\mu} = \varphi'(x) = \frac{4\delta a \Gamma(^3/_4)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(^1/_4)\sqrt{a^4 - x^4}}$$

3. Изложенные построения применимы и в случае краевых задач для уравнений более высокого порядка, чем второй, и для систем. Проиллюстрируем это на примере первой основной задачи плоской теории упругости для прямоугольной области ($-a \leqslant x \leqslant a$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$). Ради сокращения формул принят интервал ($-\pi$, π). По этой же причине ограничимся случаем, когда на гранях $y = \pm\pi$ нагрузка отсутствует, а на грани $x = \pm a$ действует одинаковая растягивающая нагрузка $p(y) = p(-y)$. Поставленная задача эквивалентна следующей краевой задаче для функций Эри $u(x, y)$:

(3.1) $\quad \Delta^2 u = 0 \quad (|x| < a, |y| < \pi)$

(3.2) $\quad u''(\pm a, y) = 0, \quad u^{\cdot\cdot}(\pm a, y) = p(y) \quad (|y| \leqslant \pi)$

(3.3) $\quad \sigma_y(x, \pm\pi) = u''(x, \pm\pi) = 0, \quad \tau_{yx}(x, \pm\pi) = -u'^{\cdot}(x, \pm\pi) = 0$

Заметим, что краевые условия (3.3) будут выполнены, если

(3.4) $\quad u(x, \pm\pi) = 0 \quad u^{\cdot}(x, \pm\pi) = 0$

Так как по условию функция $p(y)$ четна, то и $u(x, y)$ по переменной y тоже будет четной функцией, и для решения краевой задачи (3.1)—(3.4) будем применять конечное косинус-преобразование Фурье по переменной y

(3.5) $$u_k(x) = \int_0^\pi u(x, y) \cos ky\, dy$$

$$u(x, y) = \frac{u_0(x)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \cos ky$$

Для этого умножим дифференциальное уравнение (3.1) на $\cos ky$ и выполним интегрирование по частям. Учет четности функции u по y и краевых условий (3.4) приводит к уравнению

(3.6) $\quad L_k u_k = u_k^{\mathrm{IV}} - 2k^2 u_k'' + k^4 u_k = f(x) \quad (|x| < a)$

$$(f(x) = (-1)^{k+1}\chi(x), \quad \chi(x) = u^{\cdot\cdot\cdot}(x, \pm\pi))$$

Таким же образом краевые условия (3.2) преобразуются к виду

(3.7) $\quad u_k(a) = U_0^*[u_k] = -k^2 p_k, \quad u_k(-a) = U_1^*[u_k] = -k^{-2} p_k$

$$u_k'(a) = U_2^*[u_k] = 0, \quad u_k'(-a) = U_3^*[u_k] = 0$$

$$\left(p_k = \int_0^\pi \cos ky\, p(y)\, dy\right)$$

Функцию Грина краевой задачи (3.6), (3.7) построим по схеме, указанной в [11], и согласно которой она определится формулой

$$G_k(x,\xi)=\Phi_k(x,\xi)-\sum_{m=0}^{3}\psi_m U_m^*[\Phi_k],\quad \Phi_k(x,\xi)=\frac{1+k|x-\xi|}{4k^3e^{k|x-\xi|}}$$

где $\psi_m=\psi_m(x)$ $(m=0,1,2,3)$ — базисная система функций

$$2\psi_0(x)=c_+(kx)+c_-(kx)+c_+(-kx)-c_-(-kx)$$

$$-2k\psi_2(x)=c_+'(kx)+c_-'(kx)+c_+'(-kx)-c_-'(-kx)$$

$$\psi_1(x)=\psi_0(-x),\quad \psi_3(x)=-\psi_2(-x)$$

$$c_\pm(x)=(\operatorname{sh}2\alpha\pm2\alpha)^{-1}[\operatorname{sh}(\alpha+x)+(\alpha-x)\operatorname{ch}(\alpha+x)],$$

$$\alpha=ak$$

обладающая, как нетрудно проверить, свойством

$$U_m^+[\psi_n]=\delta_{mn},\quad L_k\psi_n=0\quad(m,n=0,1,2,3)$$

Используя построенные функцию Грина и базисную систему, решение краевой задачи (3.6), (3.7) можно записать в виде [11, 12]

$$u_k=(-1)^{k+1}\int_{-a}^{a}G_k(x,\xi)\chi(\xi)\,d\xi-\frac{p_k}{k^2}[\psi_0(x)+\psi_1(x)] \tag{3.8}$$

Воспользовавшись формулой обращения из (3.5) и просуммировав слабо сходящиеся ряды (ср. [11]), найдем функцию $u(x,y)$, а по ней и напряжения, выраженные через искомую функцию $\chi(\xi)$. В частности, будем иметь $(\chi(\xi)=\chi(-\xi))$

$$\sigma_y=\frac{u_0''(x)}{\pi}+\int_{-a}^{a}\left[\frac{\partial S(x,\xi,y)}{\partial x}+R(x,\xi,y)\right]\chi(\xi)\,d\xi-Q'(x,y) \tag{3.9}$$

$$4\pi S(x,\xi,y)=(x-\xi)\{|x-\xi|-\ln[2\operatorname{ch}(x-\xi)+$$
$$+2\cos y]\}+S_y(x,\xi)-S_y(-x,-\xi)$$

$$S_y(u,v)=(u-v)\ln[2\operatorname{ch}(2a-u-v)+2\cos y]+$$
$$+2(a-u)(a-v)\operatorname{sh}(2a-u-v)[\operatorname{ch}(2a-u-v)+\cos y]^{-1}$$

$$Q(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_+'(kx)-c_+'(-kx)}{k}p_k\cos ky$$

$$u_0''(x)=\int_{-a}^{a}\left(\frac{\xi^2+a^2}{4a}-\frac{|x-\xi|}{2}\right)\chi(\xi)\,d\xi$$

$R(x,\xi,y)$ — функция, сколь угодно раз дифференцируемая по всем переменным, выражение для которой не приводим.

Реализовав с помощью формулы (3.9) первое краевое условие из (3.3), получим интегральное уравнение для определения $\chi(\xi)$. После дифференцирования его обеих частей оно становится сингулярным, имеющим следующую структуру

$$\int_{-a}^{a}\left[\operatorname{cth}\frac{x-\xi}{2}-H\left(\frac{a-x}{2},\ \frac{a-\xi}{2}\right)-H\left(\frac{a+x}{2},\ \frac{a+\xi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+R_1(x,\ \xi)\right]\chi(\xi)\,d\xi=-4\pi Q''(x,\ \pi)$$
$$(|x|\leqslant a,\ H(x,\ y)=2h+(x-5y)h'-2xyh'',\ h=\operatorname{cth}(x+y))$$

Здесь, как и выше, через $R_1(x,\ \xi)$ обозначена функция, сколь угодно раз дифференцируемая по обеим переменным.

Как видим, ядро уравнения имеет помимо подвижной особенности еще и неподвижные особенности на краях области определения. Отметим, что интегральное уравнение аналогичной структуры получено также в работе [6].

4. Выше рассматривались краевые задачи, заданные в прямоугольной области (которая может вырождаться в плоскость, полосу, полуплоскость и т. п.) относительно координат x, y, не обязательно являющихся декартовыми. Ниже излагается способ переноса классической схемы метода интегральных преобразований на случай более сложных областей, в том числе многосвязных.

Идейную сторону изложим опять применительно к уравнению (0.1), но краевую задачу поставим для двусвязной области, представляющей собой прямоугольную область $a_0\leqslant x\leqslant a_1$, $b_0\leqslant y\leqslant b_1$ с выброшенным прямоугольником $c_0<x<c_1$, $h_0<y<h_1$ меньших размеров, т. е. $a_0\leqslant c_0<c_1\leqslant a_1$, $b_0\leqslant h_0<h_1\leqslant b_1$.

На наружном контуре краевые условия возьмем в виде

$$U_j[u]=0\quad(b_0\leqslant y\leqslant b_1),\quad V_j[u]=0\quad(a_0\leqslant x\leqslant a_1)\tag{4.1}$$

Содержащиеся здесь граничные функционалы U_j, V_j $(j=0,\ 1)$ определены в (0.3), (0.4). На внутреннем контуре будем считать заданными следующие краевые условия:

$$U_j^*[u]=\alpha_{j0}^*u(c_j,\ y)+\alpha_{j1}^*u'(c_j,\ y)=C_j(y)\tag{4.2}$$
$$(j=0,\ 1;\ h_0\leqslant y\leqslant h_1)$$

$$V_j^*[u]=\beta_{j0}^*u(x,\ h_j)+\beta_{j1}^*u^{\cdot}(x,\ h_j)=H_j(y)\tag{4.3}$$
$$(j=0,\ 1;\ c_0\leqslant x\leqslant c_1)$$

Считая уравнение (0.1) заданным и в области $c_0<x<c_1$, $h_0<y<h_1$, введем обозначение для скачков функции и ее производных на линиях $x=c$, $y=h$

$$\langle u(c,\ y)\rangle=u(c-0,\ y)-u(c+0,\ y)\tag{4.4}$$
$$\langle u(x,\ h)\rangle=u(x,\ h-0)-u(x,\ h+0)$$

Тогда, полагая, что функция $u(x,\ y)$ при переходе через линии $x=c_j$ и $y=h_j$ $(j=0,\ 1)$ непрерывна, а ее нормальная производная терпит разрыв непрерывности (возможно и другое допущение — непрерывность нормальной производной и разрыв самой функции), можем записать

$(j = 0,\ 1)$

$$(4.5) \qquad \langle u(c_j, y)\rangle = 0, \quad \langle u'(c_j, y)\rangle = \chi_j(y) \quad (b_0 \leqslant y \leqslant b_1)$$

$$(4.6) \qquad \langle u(x, h_j)\rangle = 0, \quad \langle u^{\cdot}(x, h_j)\rangle = \varphi_j(x) \quad (a_0 \leqslant x \leqslant a_1)$$

причем введенные неизвестные функции должны обладать свойством

$$\chi_j(y) \equiv 0, \quad y \overline{\in} (h_0, h_1), \qquad \varphi_j(x) \equiv 0, \quad x \overline{\in} (c_0, c_1)$$

Применим теперь интегральное преобразование (0.2) к уравнению (0.1) и вторым краевым условиям из (4.1). В результате выполнения операций, предписываемых схемой работы [11] с учетом (4.5) получим следующую одномерную краевую задачу для трансформанты:

$$(4.7) \qquad Lu_\lambda(y) = -\sum_{j=0}^{1} n_0(c_j)\chi_j(y) \quad (b_0 \leqslant y \leqslant b_1)$$

$$V_j[u_\lambda] = 0 \qquad (j = 0,\ 1)$$

Применение того же преобразования к соотношениям (4.6) показывает, что производная решения краевой задачи (4.7) в точках $y = h_j$ должна терпеть разрывы непрерывности

$$(4.8) \qquad \langle u_\lambda'(h_j)\rangle = \varphi_{j\lambda}, \quad \varphi_{j\lambda} = \int_{c_0}^{c_1} \frac{K(\xi, \lambda)}{r(\xi)}\varphi_j(\xi)\,d\xi \quad (j = 0,1)$$

Решение разрывной краевой задачи (4.7), (4.8) будем строить в виде

$$(4.9) \qquad u_\lambda(y) = u_\lambda^0(y) + v_\lambda(y) \quad (b_0 \leqslant y \leqslant b_1)$$

где $u_\lambda^0(y)$ — непрерывная часть решения — выражается через функцию Грина $G_*(y, \eta)$ самосопряженной краевой задачи

$$(4.10) \qquad -(pu'(y))' + r_1^{-1}(y)[\lambda + q_1(y)]u = f(y) \quad (b_0 < y < b_1)$$

$$V_j[u] = 0, \quad j = 0,\ 1$$

по формуле

$$(4.11) \qquad u_\lambda^0(y) = \sum_{j=0}^{1} \int_{h_0}^{h_1} \frac{G_*(y, \eta)}{r(\eta)} n_0(c_j)\,\chi_j(\eta)\,d\eta$$

а $v_\lambda(y)$ — разрывная часть решения краевой задачи (4.7), (4.8).

Для его отыскания решим предварительно такую разрывную краевую задачу:

$$(4.12) \qquad -(pv')' + r^{-1}(\lambda + q_1)v = 0 \quad (b_0 < y < b_1), \quad V_j[v] = 0$$

с заданными скачками в точке $y = h$.

$$(4.13) \qquad \langle v'(h)\rangle = x_1, \quad \langle v(h)\rangle = x_0$$

Способ решения подобных задач предложен в [11]. Используя изложенную там схему, после ряда преобразований приходим к следующей формуле для решения разрывной краевой задачи (4.12), (4.13):

$$(4.14) \qquad v(y) = p(h)\,[x_1 G_*(y, h) - x_0 G_*^{\cdot}(y, h)]$$

Упомянутые преобразования не приводятся здесь по той причине, что справедливость (4.14) легко устанавливается с помощью известных свойств [12] функции Грина самосопряженной краевой задачи (4.10).

Используя формулу (4.14), разрывную часть $v_\lambda(y)$ краевой задачи (4.7), (4.8) можно теперь записать в виде

$$v_\lambda(y) = \sum_{j=0}^{1} p_1(h_j) G_*(y, h_j) \varphi_{j\lambda} \tag{4.15}$$

По найденной трансформанте (4.9), (4.11), (4.15), пользуясь формулой обращения из (0.2), получим решение исходной краевой задачи, выраженной через неизвестные функции $\chi_j(y)$ и $\varphi_j(x)$. Систему интегральных уравнений для определения получим, потребовав выполнения краевых условий (4.2), (4.3).

Замечание 2. Здесь, как и в п. 1, остается справедливым сказанное в замечании 1. Кроме того, сочетание изложенного здесь с изложенным в п. 1 позволяет охватить случаи смешанных краевых условий как на внешнем, так и на внутреннем контуре. Изложенное можно перенести на случай уравнений более высокого порядка, чем (1.1) и на системы таковых.

В случае наличия точки ($x = c_0$, $y = h$) смены граничных условий, например, на внутренней грани $x = c_0$, $h_0 < y < h_1$ на ней следует вводить не один, как выше (4.5), а два скачка: например, до точки смены граничных условий скачок самой функции, а после — ее производной.

5. Проиллюстрируем использование схемы п. 4 к такой антиплоской задаче для полуплоскости ($-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$) с прямоугольным вырезом $-c < x < c$, $0 \leqslant y < h$, заполненным абсолютно жесткой средой (заглубленный штамп), полностью (по всему контуру) сцепленной с упругой средой. Заглубленный штамп подвергается воздействию заданной сдвигающей в продольном направлении нагрузки. Требуется найти распределение напряжений в упругой полуплоскости с описанным вырезом.

Поставленная задача математически формулируется в виде уравнения (2.1), заданного в четвертьплоскости (x, $y > 0$) с прямоугольным вырезом ($0 \leqslant x < c$, $0 \leqslant y < h$) и следующих краевых условий:

$$u'(0, y) = 0 \quad (h \leqslant y < \infty), \quad u^{\cdot}(x, 0) = 0 \quad (c \leqslant x < \infty) \tag{5.1}$$

$$u^{\cdot}(c, y) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant h), \quad u'(x, h) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant c) \tag{5.2}$$

В соответствии со схемой п. 4 считаем уравнение (2.1) заданным во всей четвертьплоскости, за исключением линий $x = c$ и $y = h$, на которых зададим скачки

$$\langle u(c, y)\rangle = 0, \quad \langle u'(c, y)\rangle = \chi(y) \quad (0 \leqslant y < \infty) \tag{5.3}$$

$$\langle u(x, h)\rangle = 0, \quad \langle u^{\cdot}(x, h)\rangle = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x < \infty) \tag{5.4}$$

причем

$$\chi(y) \equiv 0 \quad (h < y < \infty), \quad \varphi(x) \equiv 0 \quad (c \leqslant x < \infty)$$

Применяя интегральное преобразование (2.5) к уравнению (2.1) второму условию из (5.1), а также к (5.4) и учитывая при этом (5.3) и схему работы [11], приходим к одномерной разрывной краевой задаче

$$-u_\lambda'' + \lambda^2 u_\lambda = \cos \lambda c \ \chi(y) \quad (0 < y < \infty) \tag{5.5}$$

$$u_\lambda'(0) = 0, \quad \langle u_\lambda'(h)\rangle = \varphi_\lambda, \quad \left(\varphi_\lambda = \int_0^c \cos \lambda\xi \varphi(\xi)\, d\xi\right)$$

Согласно схеме п. 4, для ее решения достаточно построить убывающую на ∞ функцию Грина $G_*(y, \eta)$ самосопряженной краевой задачи

$$-u''(y) + \lambda^2 u(y) = f(y) \quad (0 < y < \infty), \quad u'(0) = 0$$

Можно проверить, что таковой будет функция

$$G_*(y, \eta) = e_\lambda(y - \eta) + e_\lambda(y + \eta) \tag{5.6}$$

где $e_\lambda(x)$ определена формулой (2.10).

Используя построенную функцию Грина, решение разрывной краевой задачи (5.5) получаем в виде

$$u_\lambda(y) = \cos\lambda c \int_{-h}^{h} e_\lambda(y - \eta)\chi(\eta)\,d\eta + [e_\lambda(y - h) + e_\lambda(y + h)]\varphi_\lambda \tag{5.7}$$

Здесь функция $\chi(y)$ четным образом продолжена на отрицательные значения аргумента.

Воспользовавшись (5.7) и формулой обращения из (2.5), найдем функцию $u(x, y)$ и ее производные

$$\left\|\begin{matrix} u^{\cdot}(x, y) \\ u'(x, y)\end{matrix}\right\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\|\begin{matrix} u_\lambda'(y)\cos\lambda x \\ -u_\lambda(y)\lambda\sin\lambda x\end{matrix}\right\| d\lambda \tag{5.8}$$

Подстановка производной функции (5.7) под знак интеграла в (5.8) и вычисление уже встречавшихся интегралов приводит к формуле

$$2\pi u^{\cdot}(x, y) = -\int_{-h}^{h}\left[\frac{(y-\eta)\chi(\eta)}{(y-\eta)^2 + (x-c)^2} + \frac{(y-\eta)\chi(\eta)}{(y-\eta)^2 + (x+c)^2}\right]d\eta -$$
$$-\int_{-c}^{c}\left[\frac{(y-h)\varphi(\xi)}{(y-h)^2 + (x-\xi)^2} + \frac{(y+h)\varphi(\xi)}{(y+h)^2 + (x-\xi)^2}\right]d\xi$$

С помощью аналогичных операций получим формулу и для $u'(x, y)$ Используя ее вместе с (5.9), реализуем условия (5.1). В результате придем к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\int_{-h}^{h}\left[\frac{1}{y-\eta} + \frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + 4c^2}\right]\chi(\eta)\,d\eta + \int_{-c}^{c}\left\{\frac{y-h}{(y-h)^2 + (x-c)^2} + \right.$$
$$\left. + (y+h)[(y+h)^2 + (x-c)^2]^{-1}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi = 0 \quad (|y| < b)$$

$$\int_{-h}^{h}\left[\frac{(x-c)\chi(\eta)}{(x-c)^2 + (h-\eta)^2} + \frac{(x+c)\chi(\eta)}{(x+c)^2 + (h-\eta)^2}\right]d\eta + \int_{-c}^{c}\left\{\frac{1}{x-\xi} + \right.$$
$$\left. + [(x-\xi)^2 + 4h^2]^{-1}(x-\xi)\right\}\varphi(\xi)\,d\xi = 0 \quad (|x| < c)$$

В частности, при $c = h$ в силу симметрии задачи имеем $\varphi(x) \equiv \chi(x)$, что приводит к одному уравнению относительно $\chi(x)$, которое после очевидных замен переменных приобретает следующий вид:

$$\int_0^1\left[\frac{1}{t-\tau} + \frac{t}{t^2+\tau^2} - \frac{1-t}{(1-t)^2+\tau^2} + \frac{t-\tau}{(t-\tau)^2+1}\right]\times$$
$$\times\chi[h(1-2\tau)]\,d\tau = 0 \quad (0 < t < 1)$$

Произвольная постоянная, которая будет содержаться в решении этого однородного сингулярного интегрального уравнения, найдется из условия равновесия заглубленного штампа.

Поступила 5 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кошляков Н. С., Глинер Э. В., Смирнов М. И.* Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
2. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
4. *Александров В. М.* О решении одного класса парных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1.
5. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
6. *Ворович И. И., Копасенко В. В.* Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
7. *Александров В. М.* Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров. Изв. Северо-Кавказ. научн. центра высш. школы, 1974, № 4.
8. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
9. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948.
10. *Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л.* Центральная поперечная трещина в упругой среде. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 4.
11. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.