Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 62—50

ОБ УПРАВЛЕНИИ ВРЕМЕНЕМ ДОСТИЖЕНИЯ ОБЛАСТИ СЛУЧАЙНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

В. Б. Колмановский, Т. Л. Майзенберг

(Москва)

Рассматривается задача о максимизации времени достижения границ области динамической системой, движение которой происходит под действием постоянных случайных возмущений типа гауссовского белого шума и импульсных воздействий, моделируемых пуассоновским процессом. Изучены некоторые свойства максимального времени и оптимального управления. В качестве примера рассматривается управляемое движение твердого тела под действием случайных возмущающих моментов относительно центра масс. Наличие случайных возмущений приводит к тому, что кинетический момент твердого тела может принимать сколь угодно большие значения. Цель управления движением твердого тела состоит в том, чтобы максимизировать время достижения кинетическим моментом некоторого предельно допустимого значения.

Задаче об удержании системы в заданной области фазовых координат посвящен ряд работ. Было показано [1], что некоторые вопросы управления движением спутника на синхронных орбитах сводятся к максимизации вероятности удержания системы в заданной области в течение заданного отрезка времени. Другой пример подобного рода задач, связанный с работой водохранилищ, приведен в [2].

1. Рассмотрим управляемую стохастическую систему

$$dx(t) = [b(x,(t)) + c(x(t))\,u(x(t))]\,dt + \sigma(x,(t))\,d\,\xi(t) + \tag{1.1}$$
$$+ f(x(t))\,d\eta(t),\quad t \geqslant 0,\quad x(0) = x$$

Здесь $x(t)$ — вектор n-мерного евклидова пространства E_n; $\xi(t)$ — m-мерный винеровский процесс; вектор $\eta(t) = (\eta^1, \ldots, \eta^r)$; $\eta^i(t)$ $(i = 1, \ldots, r)$ — однородный пуассоновский процесс с параметром λ_i, все η^i независимы и в совокупности не зависят от процесса $\xi(t)$; управление $u(x)$ — вектор со значениями в замкнутом ограниченном выпуклом множестве $U \subset E_l$; b, $c(x)$, $\sigma(x)$, $f(x)$ — некоторые детерминированные матрицы. Уравнение (1.1) следует понимать в смысле Ито [3]. В работе [3] указаны также достаточные условия существования и единственности решения подобных уравнений. Такими условиями являются, например, локальное условие Липшица для матриц c, σ, f и компонент векторов b, u, а также не более чем линейный их рост на бесконечности. При такого типа предположениях о гладкости коэффициентов уравнение (1.1) имеет для любого начального условия $x(0) = x \in E_n$ с вероятностью единица единственное непрерывное справа и не имеющее разрывов второго рода решение, определяющее однородный марковский процесс X. Последнее слагаемое в (1.1) характеризует при этом ударные возмущения.

Пусть G — ограниченная область в E_n с достаточно гладкой границей Г. Управления $u(x) \in U$, обеспечивающие существование решения уравнения (1.1) при любом начальном условии $x(0) \in G$ до момента первого выхода этого решения из G, назовем допустимыми. Класс допустимых управлений обозначим через U_0. Чтобы подчеркнуть зависимость процесса (1.1) от управления u, иногда будем его обозначать через X_u, а соответствующие траектории — через $x_u(t)$.

Пусть $\tau_u = \tau_u(G)$ — момент первого выхода процесса X_u из G [4], $u \in U_0$. Положим

$$V_u(x) = M_x\tau_u, \quad V_0(x) = \sup_{u \in U_0} V_u(x)$$

Здесь M_x — символ математического ожидания, которое вычисляется при условии, что начальное состояние процесса — произвольная точка $x \in G$. Задача состоит в нахождении управления u_0, при котором имеет место равенство для любого $x \in G$

$$V_{u_0}(x) = M_x\tau_{u_0} = V_0(x) \tag{1.2}$$

Достаточные условия решения указанной оптимальной задачи можно сформулировать в терминах соответствующего системе (1.1) уравнения Беллмана. Обозначим через L_u производящий оператор [4] процесса X_u в пространстве $C^2(E_n)$, равный [3]

$$\begin{gathered} L_uV(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)V_{x^ix^j} + (c(x)u(x) + \\ + b(x))'V_x + \sum_{i=1}^{r}[V(x+f(x)e_i) - V(x)]\lambda_i \\ x = (x^1, \ldots, x^n), \quad V(x) \in C^2(E_n) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь штрих — знак транспонирования, V_x — вектор с компонентами $\partial V / \partial x^i$, a^{ij} — элемент матрицы $a(x) = \sigma(x)\sigma'(x)$, e_i — r-мерный вектор, i-я компонента которого равна единице, а все остальные — нулю, $V_{x^ix^j}$ — матрица с элементами $\partial^2 V / \partial x^i \partial x^j$.

Обозначим через $D(G)$ пространство дважды непрерывно дифференцируемых в G, непрерывных и ограниченных всюду в E_n функций.

Лемма 1. Предположим, что найдутся управление $u_0(x) \in U_0$ и неотрицательная функция $V(x) \in D(G)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} L_{u_0}V(x) + 1 = 0, \quad L_uV(x) + 1 \leqslant 0, \quad \forall x \in G, \ u \in U \\ V(x) = 0, \quad x \overline{\in} G \end{gathered} \tag{1.4}$$

Тогда u_0 — оптимальное управление, а V — функция Беллмана.

Доказательство в случае $V \in C^2(E_n)$ проводится путем применения к функции V формулы Ито [3] в момент $\tau_u(t) = \min(\tau_u, t)$ с последующим переходом к пределу при $t \to \infty$ и использованием соотношений (1.4), что сходно с доказательством аналогичных утверждений в [5,6].

Разъясним сказанное подробнее. Из формулы Ито и первых двух условий (1.4) следует, что при любом допустимом управлении u

$$M_x V(x(\tau_u(t)) - V(x) = M_x \int_0^{\tau_u(t)} L_u V(x(s)ds) \leqslant -M_x \tau_u(t)$$

Следовательно,

$$M_x \tau_u(t) \leqslant -M_x V(x(\tau_u(t)) + V(x) \leqslant 2\sup_{x \in G} V(x)$$

Последовательность $\tau_u(t)$ монотонно не убывает по t и неотрицательна. Поэтому в силу теоремы Лебега возможен предельный переход при $t \to \infty$ под знаком интеграла. Осуществляя его, получаем, что при любом допустимом управлении u

$$M_x \tau_u \leqslant 2\sup_{x \in G} V(x)$$

Из этой оценки, формулы Ито и первого из соотношений (1.4) заключаем, что

$$M_x V(x(\tau_{u_0})) - V(x) = -V(x) = -M_x \tau_{u_0}$$

Аналогичным образом, используя второе из соотношений (1.4), имеем при любом допустимом управлении u

$$-V(x) \leqslant -M_x(\tau_u)$$

Тем самым оптимальность управления u_0 при $V(x) \in C^2(E_n)$ установлена. В общем случае достаточно аппроксимировать $V \in D(G)$ равномерно ограниченной последовательностью функций $V_i \in C^2(E_n)$, совпадающих с V в некоторой подобласти $G_i \subseteq \subseteq G$, $G_i \uparrow G$, и применить к этим функциям формулу Ито в момент времени $\min(\tau_u(G_i), t)$.

Из [7,8] вытекают следующие условия в терминах коэффициентов уравнения (1.1), при которых конечны указанные математические ожидания.

Лемма 2. Предположим, что для всех x из некоторой окрестности замыкания $\bar{G}$ множества G при каком-то $i = 1, \ldots$ выполнено хотя бы одно из условий

1) $a^{ii}(x) \geqslant a > 0$,

2) $h^i(x) \geqslant h > 0$ (или $h^i(x) \leqslant -h < 0$), где a, h — некоторые постоянные, $h^i(x)$ — i-я компонента вектора

$$h(x) = b(x) + c(x)u(x) + \sum_{k=1}^{r} f(x)\lambda_k e_k$$

Тогда справедливо неравенство

$$P_x\{\tau_u > t\} \leqslant ce^{-\nu t}, \quad \forall x \in G, \quad t \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Здесь P_x — вероятность события, заключенного в фигурных скобках, при условии, что начальное состояние $x(0) = x$, а положительные постоянные c, ν определяются параметрами исходной задачи управления и не зависят от x и от u.

Перепишем соотношения (1.4) в виде краевой задачи

$$\begin{aligned} &\sup_{u \in U} L_u V(x) = -1, \quad x \in G \\ &V(x) = 0, \quad x \overline{\in} G \end{aligned} \tag{1.6}$$

Приведем вначале условия существования решения уравнения, получаемого из (1.6), если опустить знак максимума в первом из соотношений. Через $C^{(k+\alpha)}(\bar{G})$, как обычно [9,10], будем обозначать пространство k раз дифференцируемых в $\bar{G}$ функций, k-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α $(0<\alpha\leqslant 1)$. Будем также относить границу Г к классу $C^{k+\alpha}$, если в некоторой окрестности W каждой ее точки границу можно определить уравнением вида $x^i=\psi(x^1,\ldots,x^{i-1},x^{i+1},\ldots,x^n)$, причем $\psi\in C^{k+\alpha}(W\cap G)$.

Лемма 3. Предположим, что элементы матриц $a(x)$, $f(x)$ удовлетворяют в $\bar G$ условию Липшица, компоненты вектора $b_u(x)=b(x)+c(x)u(x)$ измеримы и ограничены, граница $\Gamma\in C^{2+\alpha}_{\kappa}$. Пусть, кроме того, найдется постоянная $\mu>0$, такая, что для любых вещественных чисел $y_1,\ldots,y_n$ и всех x

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\,y_iy_j\geqslant\mu\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

Тогда в классе B функций $V(x)\in C^{1+\delta}(G)$, имеющих интегрируемую с квадратом вторую производную в G, существует единственное почти всюду решение задачи $(0<\delta<1)$

$$\text{(1.7)}\qquad L_uV(x)=-1,\quad x\in G$$
$$V(x)=0,\quad x\,\overline{\in}\,G$$

Отметим, что ряд свойств операторов L и V установлен в [11].

Доказательство. На основании [12] краевая задача (1.7) имеет единственное решение $V(x)\in W_{p,0}{}^2(G)$ при $p\geqslant n$, причем

$$\text{(1.8)}\qquad V(x)=M_x\tau_u,\quad x\in G$$

Здесь $W^2_{p,0}(G)$ — пространство измеримых функций, имеющих обобщенные производные по С. Л. Соболеву до второго порядка включительно, суммируемых на G со степенью p, обращающихся в нуль при $x\,\overline{\in}\,G$. Пусть D — дифференциальная часть оператора (1.3). Обозначим через $\omega(x)$ решение краевой задачи

$$\text{(1.9)}\qquad D\omega(x)-\lambda\omega(x)=-1-\sum_{j=1}^{r}\lambda_jV(x+f(x)e_i),\ x\in G$$
$$\omega(x)=0,\quad x\in G,\quad \lambda=\lambda_1+\ldots+\lambda_r\geqslant 0$$

Из (1.5) вытекает равномерная ограниченность по $x\in G$ функций $M_x\tau_u$. Отсюда и из (1.8) следует, что правая часть уравнения (1.9) измерима и ограничена по $x\in G$. Значит [9], краевая задача (1.9) имеет единственное решение $\omega(x)$ в классе B. Это решение $\omega(x)$ принадлежит также и $W_{p,0}{}^2(G)$. Кроме того, в классе $W_{p,0}{}^2(G)$ решением задачи (1.9) служит также и функция $V(x)$. Ввиду единственности решения задачи (1.9) в классе $W_{p,0}{}^2(G)$ справедливо равенство $\omega(x)=V(x)$. Значит, решение $V(x)$ задачи (1.7) принадлежит классу B. Лемма 3 доказана.

Возьмем произвольную измеримую функцию $u_1=u_1(x)$ со значениями в множестве U и в предположении выполнения условий леммы 3. Обозначим через $V_1(x)$ решение уравнения $L_{u_1}V_1(x)=-1$ при почти всех $x\in G$ с краевым условием $V_1(x)=0$, $x\,\overline{\in}\,G$.

Найдем функцию $u_2(x)$ из соотношения

$$\sup\nolimits_{u\in U}u'c'(x)V_{1x}=u_2'(x)c'(x)V_{1x}$$

Известно [13], что вектор $u_2(x)$ можно определить таким образом, чтобы его компоненты были ограниченными измеримыми функциями. Действуя далее по индукции, построим последовательности $u_i(x)\in U$ и $V_i(x)\in B$, удовлетворяющие при всех $i \geqslant 1$ условиям

(1.10) $$L_{u_i} V_i(x) = -1, \quad x \in G$$
$$V_i(x) = 0, \quad x \overline{\in} G$$
$$\sup_{u \in U} u' c'(x) V_{ix} = u'_{i+1}(x) c'(x) V_{ix}$$

Отметим, что приведенная процедура последовательных приближений для иных задач управления стохастическими системами применялась в ряде работ (см., например, [6,13]).

Положим $\omega = V_{i+1} - V_i$. Из соотношений (1.10) следует, что

(1.11) $$L_{u_{i+1}} \omega(x) \leqslant 0, \quad x \in G$$
$$\omega(x) = 0, \quad x \overline{\in} G$$

Отсюда в силу [12]

$$\omega(x) = -M_x \int_0^{\tau_{u_{i+1}}} L_{u_{i+1}} \omega(x_{u_{i+1}}(t))\, dt \geqslant 0$$

Значит

(1.12) $$V_{i+1}(x) \geqslant V_i(x) \geqslant 0$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда последовательность (V_i, V_{ix}) равномерно по $x \in G$ при $i \to \infty$ сходится к функции (V_0, V_{0x}). Функция $V_0(x) \in B$. Вторые производные функций V_i слабо сходятся к вторым производным функции $V_0(x)$ в пространстве B_1 функций, интегрируемых с квадратом в G.

Доказательство. Из формулы (1.8) при $u = u_i$ и (1.5) следует, что

(1.13) $$\sup_{i,\, x \in \overline{G}} V_i(x) \leqslant c < \infty$$

Образуем теперь последовательность функций $\omega_i(x)$ — решений краевой задачи (1.9) при $V = V_i$. Ввиду единственности решения задачи (1.9) в классе B_3 (см. лемму 3) имеем $\omega_i(x) = V_i(x)$. Значит, из (1.13) на основании [9] вытекает оценка

$$\sup_{i,\, x \in G} |\partial V_i / \partial x| \leqslant c < \infty$$

Отсюда и из (1.12) следует, что $V_i(x)$ сходится равномерно к $V_0(x)$. Поэтому (см., например, [13], § 7) $\omega_i(x)$ сходится вместе со своими первыми производными равномерно к функции $V_0(x) \in B$, а вторые производные $\omega_i(x)$ сходятся слабо в B_1 к вторым производным функции $V_0(x)$. Отсюда и из равенства $\omega_i(x) = V_i(x)$ вытекает справедливость леммы 4.

Положим $u_0 = u_0(x)$, если

$$\sup_{u \in U} u' c'(x) V_{0x} = u_0'(x) c'(x) V_{0x}$$

Покажем, что $V_0(x)$ является почти всюду решением уравнения Беллмана (1.6).

Действительно, представим выражение (1.3) в виде

$$L_u V(x) = LV(x) + u'(x) c'(x) V_x$$

Используя (1.10), получим для любых i

(1.14) $$l(x) = LV_0(x) + 1 + \sup_{u \in U} u'(x) c'(x) V_{0x} \geqslant$$
$$\geqslant L(V_0(x) - V_i(x)) + u_i'(x) c'(x) (V_{0x}(x) - V_{ix}(x))$$

Пусть $i \to \infty$. Тогда первая скобка в правой части (1.14) стремится к нулю слабо в B_1, вторая же — равномерно. Отсюда следует, что $l(x) \geqslant 0$ при почти всех x.

Воспользовавшись далее очевидным соотношением

$$u_0'(x)c'(x)V_{ix}(x) \leqslant u_{i+1}'(x)c'(x)V_{ix}(x)$$

и проводя несложные преобразования, находим, что

$$l(x) \leqslant u_{i+1}'(x)c'(x)(V_{ix} - V_{(i+1)x}) + L(V_0(x) - V_{i+1}(x)) + u_0'(x)c'(x)(V_{0x} - V_{ix}) \tag{1.15}$$

Как и ранее, заключаем, что правая часть (1.15) слабо сходится к нулю. Тем самым равенство $l(x)$ нулю почти всюду установлено.

Таким образом, краевая задача (1.6) всегда имеет решение $V_0(x) \in B$. В действительности же, как следует из [13], функция $V_0(x)$ принадлежит классу $C^{2+\alpha}(G)$ при некотором α и $L_{u_0}V_0(x) = -1$ справедливо при всех $x \in G$. Последнее утверждение вытекает из непрерывности по Гельдеру выражения $u_0'(x)c'(x)V_{0x}$.

Точнее говоря, заключение о принадлежности V_{0x} классу $C^{2+\alpha}(G)$ можно получить из [13] следующим образом. Обозначим через W решение краевой задачи

$$\sup_u DW(x) = r_0(x), \quad x \in G \tag{1.16}$$
$$W(x) = 0, \quad x \overline{\in} G$$

Здесь известная функция $r_0(x)$ определяется формулой

$$r_0(x) = -1 - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i [V_0(x + f(x)e_i - V_0(x)] \tag{1.17}$$

Теперь заметим, что решение $W(x)$ этой краевой задачи в силу [13] существует единственно и принадлежит классу $C^{2+\alpha}$. Кроме того, в силу (1.17), (1.6) и единственности решения задачи (1.16) в B имеем $W = V_0$. Значит, $V_0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{G})$. В силу леммы 1 для любого допустимого управления $u(x)$ имеет место неравенство

$$M_x\tau_u(G) \leqslant V_0(x)$$

В общем случае можно утверждать, что существует допустимое управление, при котором ошибка в определении оптимального значения функционала критерия качества не превосходит заданного $\varepsilon > 0$. В самом деле, пусть дано $\varepsilon > 0$. Из [14] (см. доказательство лемм 2.1, 2.2) вытекает, что всегда найдется вектор-функция $u(x)$ с компонентами, удовлетворяющими условию Липшица, такая, что при всех x

$$u'(x)c'(x)V_{0x} \geqslant u_0'(x)c'(x)V_{0x} - \varepsilon \tag{1.18}$$

где $V_0(x)$ — решение задачи (1.6).

Используя (1.18), получим

$$L_uV_0(x) \geqslant -1 - \varepsilon \tag{1.19}$$

Из (1.19) с помощью формулы Ито, примененной к функции V_0, находим

$$M_x\tau_u \geqslant V_0(x)(1 + \varepsilon)^{-1} \tag{1.20}$$

Замечая, что функция $V_0(x)$ ограничена, устанавливаем, ввиду (1.20), что разность $|M_x\tau_u - V_0(x)|$ имеет порядок ε.

Воспользовавшись предыдущими рассуждениями, можно установить единственность решения уравнения Беллмана.

В самом деле, пусть $V_1(x)$, $V_2(x)$ — два решения задачи (1.6), причем $V_1(x) < V_2(x)$ при некотором $x \in G$. Из сказанного следует, что существует допустимое управление $u = u(x)$, такое, что

$$V_2(x)(1+\varepsilon)^{-1} < M_x\tau_u(G) < V_1(x) \tag{1.21}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ из неравенства (1.21) вытекает доказываемое утверждение.

Итак, доказана

Теорема. Предположим, что выполнены условия леммы 3. Тогда краевая задача (1.6) имеет единственное решение $V_0(x)$ в классе $C^{2+\alpha}(\bar{G})$. Если при этом $u_0(x)$, определенное формулой (1.6), является допустимым управлением, то функции $u_0(x)$, $V_0(x)$ представляют собой оптимальное решение задачи управления системой (1.1) с критерием качества (1.2). В общем случае всегда существует допустимое управление, при котором оптимальное значение критерия качества аппроксимируется с произвольной степенью точности.

2. *Пример.* Рассмотрим управляемое движение твердого тела относительно центра масс при случайных возмущениях типа белого шума. Обозначим через x кинетический момент твердого тела, через a_i — момент инерции, через x_i — проекции вектора x на главные центральные оси инерции тела. В проекциях на указанные оси уравнения движения имеют вид [15]

$$x_1^{\cdot} = x_2x_3(a_2 - a_3)(a_2a_3)^{-1} + u_1 + \sigma\xi_1^{\cdot} \quad (123) \tag{2.1}$$

Здесь (123) означает, что уравнения для x_2, x_3 получаются из (2.1) циклической перестановкой индексов, постоянная $\sigma > 0$, а управление подчинено ограничению

$$|u| = \sum_{i=1}^{3} u_i^2 \leqslant b^2, \quad b > 0 \tag{2.2}$$

Механический смысл ограничения (2.2) состоит в том, что действие управляющего момента на твердое тело одинаково во всех направлениях [16]. Выбором управления требуется максимизировать математическое ожидание первого момента времени, когда $|x| = r$, $r > 0$ при условии, что начальное значение модуля кинетического момента $x(0)$ меньше r, т. е. $|x(0)| < r$.

Уравнение (1.6) имеет в данном случае вид $V(x) = 0$, $|x| = r$

$$0 = \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + V_{x_1}x_2x_3(a_2 - a_3)(a_2a_3)^{-1} + \tag{2.3}$$
$$+ V_{x_2}x_1x_3(a_3 - a_1)(a_1a_3)^{-1} + 1 + V_{x_3}(a_1 - a_2)(a_1a_2)^{-1}x_1x_2 + \max_{u,\,|u|\leqslant b} u'V_x$$

Решением этой краевой задачи является функция

$$V_0(x) = 2\sigma^{-2}\int_{|x|}^{r} z(t)\,dt\int_0^t z^{-1}(s)\,ds \tag{2.4}$$

$$z(t) = \exp\left(2\int_t^r \sigma^{-2}(-b + \sigma^{-2}s)\,ds\right) \tag{2.5}$$

Подставим (2.4) в (2.3) и найдем управление $u_0(x)$, которое максимизирует правую часть (2.3). Имеем при $x \neq 0$

$$u_0(x) = -bx\,|x|^{-1} \tag{2.6}$$

При $x = 0$ функция $V_0(x)$ имеет равную нулю производную и поэтому в точке $x = 0$ не определяет управления. Покажем, однако, что

1) если $x(0) \neq 0$, то при управлении (2.6) вероятность системе (2.1) достичь состояние $x = 0$ раньше, чем поверхность $|x| = r$ равна нулю.

2) если $x(0) = 0$, то при любом допустимом управлении система (2.1) за сколь угодно малое допустимое время покинет точку $x = 0$, а следовательно, ввиду 1) с вероятностью единица система достигнет поверхности $|x| = r$ раньше, чем снова вернется в начальную точку.

Из утверждений 1), 2) следует, что значение управления в точке $x = 0$ не играет никакой роли в рассматриваемых вопросах.

Для обоснования 1) возьмем число $\varepsilon > 0$ и вычислим вероятность $\omega(x)$ того, что система (2.1) достигнет поверхности $|x| = \varepsilon$ раньше, чем $|x| = r$, при управлении (2.6) и начальном условии $x(0) = x$. Записав для $\omega(x)$ соответствующую задачу Дирихле, получаем

$$\omega(x) = \int_{|x|}^{r} z(s)\,ds \left[\int_{\varepsilon}^{r} z(s)\,ds\right]^{-1}, \quad 0 < |x| \leqslant r \tag{2.7}$$

где функция $z(t)$ задается равенством (2.5). Из (2.5), (2.7) заключаем, что $\omega(x) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Докажем теперь утверждение 2). Пусть $u(x)$ — любое допустимое управление, а $\tau_u(\varepsilon)$ — момент первого выхода из шара $|x| \leqslant \varepsilon$ системы (2.1) при управлении u и нулевом начальном условии. На основании [8] (см. также лемму 2 данной работы) $M\tau_u(\varepsilon) < \infty$. Поэтому

$$V_0(x(\tau_u(\varepsilon)) - V_0(0) = M \int_0^{\tau_u(\varepsilon)} L_u V_0(x_u(t))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^{\tau_u(\varepsilon)} \sup_u L_u V_0(x_u(t))\,dt = -M\tau_u(\varepsilon)$$

Следовательно, ввиду (2.4) и определения $\tau_u(\varepsilon)$

$$M\tau_u(\varepsilon) \leqslant 2\sigma^{-2} \int_0^{\varepsilon} z(t)\,dt \int_0^{t} z^{-1}(s)\,ds$$

Отсюда из (2.5) и произвольности числа ε вытекает справедливость утверждения пункта 2). Таким образом установлено, что в задаче управления движением твердого тела (2.1) оптимальное управление задается формулой (2.6), а соответствующее ему значение времени — формулой (2.4).

В настоящей работе изучены некоторые задачи управления системами под действием гауссовских и пуассоновских возмущений. Различным вопросам управления системами диффузионного типа посвящены книги [17, 18].

Поступила 7 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лидов М. Л., Лукьянов С. О.* Задача о времени движения точки в области при случайных ошибках управления. Космические исследования, 1971, т. 9, вып. 5.
2. *Цветанов И.* О максимизации среднего времени пребывания стохастического процесса в заданной области. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 2.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.

4. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
5. *Красовский Н. Н.* Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
6. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
7. *Фрейдлин М. И.* О гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений. Изв. АН СССР. Сер. математическая, 1968, т. 32, № 6.
8. *Майзенберг Т. Л.* Задача Дирихле для некоторых интегродифференциальных уравнений. Изв. АН СССР. Сер. математическая, 1969, т. 33, № 3.
9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
11. *Courrège P.* Sur la forme intégro—différentielle des operateurs de C_k^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum. Seminaire (Theorie du potentiel), M. Brelot-Choquet J. Deny, 10 e année, 1965, 1966, 1.
12. *Прагараускас Г.* О первой краевой задаче для одного класса интегродифференциальных уравнений. Литовск. матем. сб., 1974, т. 14, № 4.
13. *Fleming W. H.* Some Markovian optimization problems. J Math. and Mech., 1963, vol. 12, No. 1, p. 131—140.
14. *Fleming W. H.* Duality and a priori estimates in Markovian optimization problems. J. Math. Analysis and Appl., 1966, vol. 16, No. 2, p. 254—279.
15. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики, т. 2, М., «Наука», 1967.
16. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
17. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., «Наука», 1977.
18. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М., «Наука», 1978.