Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 539.3

К ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СОПРИКОСНОВЕНИЯ

А. С. Кравчук

(Москва)

Исследуются задачи о соприкосновении упругих тел при учете трения на поверхности соприкосновения. Строится новая постановка, основанная на приведении задачи к некоторой неклассической задаче вариационного исчисления. Предлагаются алгоритмы построения приближенных решений и обосновывается их сходимость. Рассмотрены два закона трения — Кулона и Прандтля — Ильюшина.

1. Дифференциальная постановка квазистатической задачи. Подробно будет рассмотрена задача о соприкосновении одного линейно-упругого тела с абсолютно жестким штампом; возможные обобщения получаются на основании результатов работы [1] (нелинейная упругость, несколько контактирующих тел).

Уравнение поверхности штампа зададим в виде

$$\Psi(x) = 0$$

(гипотезы относительно функции $\Psi(x)$ см. в [2]).

Полная система уравнений и краевых условий, описывающая процесс внедрения штампа с трением в упругое тело, такова (данная постановка возможна в случае, когда задано перемещение штампа: задача записывается в системе координат, жестко связанной со штампом, случай задания усилий рассмотрен в [1]):

$$-\nabla\cdot({}^4a\cdot\cdot\,\varepsilon(u)) = \rho F \tag{1.1}$$

$$\sigma\cdot\nu\,|_{S_\sigma} = P \tag{1.2}$$

$$u\,|_{S_u} = g \tag{1.3}$$

$$\gamma(x) \equiv \Psi(x) + u(x)\cdot\nabla\Psi(x) \geqslant 0, \qquad \forall x \in S_c \tag{1.4}$$

$$\gamma(x) > 0 \Rightarrow \sigma\cdot\nu = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\gamma(x) = 0 \Rightarrow \sigma_N \equiv (\sigma\cdot\nu)\cdot\nu \leqslant 0\\ |\sigma_T| \equiv |\sigma\cdot\nu - \sigma_N\nu| < f\,|\sigma_N| \Rightarrow |u_T^{\boldsymbol\cdot}| = 0\\ |\sigma_T| = f|\sigma_N| \Rightarrow \frac{u_T^{\boldsymbol\cdot}}{|u_T^{\boldsymbol\cdot}|} = -\frac{\sigma_T}{|\sigma_T|}, \quad x\in S_c, \quad S_\sigma\cup S_u\cup S_c = S\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь (1.1) — уравнения равновесия, ∇ — оператор Гамильтона, ${}^4a$ — тензор модулей упругости, $\varepsilon(u)$ — тензор деформаций, u — вектор перемещений, ρF — вектор объемных сил, σ — тензор напряжений, ν — нормаль к S — границе деформируемого тела, занимающего область Ω, P — поверхностные нагрузки, g — заданные перемещения.

Последняя группа соотношений (1.6) выражает закон трения Кулона: f — коэффициент трения, $u_T^{\bullet}$ — скорость движения частицы тела по штампу в проекции на касательную плоскость, определяемая как производная по параметру t, задающему процесс изменения внешних воздействий: $t \in [0, T]$.

Таким образом, решение $u = u(x, t)$ — функция пространственных координат и параметра t; задача состоит в определении $u(x, t)$, удовлетворяющей системе уравнений и условий (1.1) — (1.6), в процессе решения должно быть определено множество точек $x \in S_c$, для которых $\gamma(x) = 0$ — зона контакта, множество точек $S_{cc} \subset S_c$, для которых $|\sigma_T| < f|\sigma_N|$ — зона сцепления, и вектор $\sigma\cdot\nu$ на S_c — усилия контактного взаимодействия. Состояние тела при $t = 0$ считается ненапряженным и недеформированным: $u(x, 0) = u^{\circ}(x) = 0$.

2. Вывод квазивариационного неравенства. Интерпретация. Заметим, прежде всего, что соотношения (1.1) — (1.6) позволяют определить только скорости $u^{\bullet}$ (или, что то же, первый дифференциал решения $du^t(x, t)$ в момент времени t). Обозначим через u^t — решение в момент времени t и построим неравенство, связывающее u^t, $u^{t+dt} \equiv u^t + du^t$.

Составим инвариант

$$(2.1)\qquad E(\sigma^t, v) \equiv E^t(v) = \int_{\Omega} \sigma^t\cdot\cdot\,\varepsilon(v)\,d\Omega - L_*{}^t(v) - \int_{S_c} (\sigma^t\cdot\nu)\cdot v\,dS,\quad L_*{}^t(v) = \int_{\Omega} \rho F^t\cdot v\,d\Omega + \int_{S_c} P^t\cdot v\,dS$$

где σ^t — истинное поле напряжений в момент времени t; очевидно, $E^t(v) = 0$, $\forall v$, что следует из условий равновесия тела Ω в момент времени t.

Пусть u^{t+dt} — решение для момента $t + dt$, w — кинематически возможное состояние, удовлетворяющее условию закрепления на S_u, условию непроникания на S_c, но необязательно последней группе соотношений (1.6) (закону Кулона).

Составим разность

$$(2.2)\qquad \Delta E = E^{t+dt}(w) - E^t(u^t) - [E^{t+dt}(u^{t+dt}) - E^t(u^t)]$$

Можно установить, что

$$(2.3)\qquad \Delta E = a(u^{t+dt}, w - u^{t+dt}) - L_*^{t+dt}(w - u^{t+dt}) - \int_{S_c} (\sigma^{t+dt}\cdot\nu)\cdot(dw - du^t)\,dS$$

$$\left(a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u)\cdot\cdot\,\varepsilon(v)\,d\Omega,\quad dw = w - u^t\right)$$

Имеет место оценка

$$(2.4)\qquad [\sigma(u)\cdot\nu]\cdot(dw - du^t) \geqslant f\,|\sigma_N(u)|\,(|dw_T| - |d\,u_T|)$$

Следовательно, решение задачи (1.1) — (1.6) удовлетворяет неравенству

$$(2.5)\qquad a(u^{t+dt}, w-u^{t+dt}) - L_*^{t+dt}(w-u^{t+dt}) + \\ + \int\limits_{S_c} f\,|\sigma_N^{t+dt}|\,(|dw_T| - |du_T|)\,dS \geqslant 0, \quad \forall w$$

Неравенства типа (2.5) в работе [3] получили название квазивариационных.

Имеет место теорема: решение неравенства (2.5), обладающее вторыми обобщенными производными, удовлетворяет всем неравенствам и условиям (1.1) — (1.6). Доказательства оценки (2.4) и указанной теоремы громоздки и будут опубликованы отдельно.

3. Связь с методом локального потенциала. Составим функционал

$$(3.1)\qquad J(u^{t+dt}, v) = 0.5a(v, v) - L_*^{t+dt}(v) + \int\limits_{S_c} f\,|\sigma_N(u^{t+dt})|\,|v_T - u_T{}^t|\,dS$$

и рассмотрим следующую задачу условного экстремума:

$$(3.2)\qquad J(u^{t+dt}, u^{t+dt}) \leqslant J(u^{t+dt}, v), \quad \forall v \in K$$

$$u^{t+dt} \in K, \quad u^{t+dt} = v$$

$$K = \{v \mid \Psi(x) + v(x)\cdot\nabla\Psi(x) \geqslant 0, \ x \in S_c\}$$

Задача (3.2) понимается следующим образом: фиксируется элемент u^{t+dt} и решается задача безусловной минимизации

$$J(u^{t+dt}, v) \to \min \text{ на } K$$

в результате определяется элемент u^*; необходимо подобрать такое u^{t+dt}, чтобы имело место равенство: $u^{t+dt} = u^*$. Это задача метода локального потенциала И. Пригожина [4] (см. также [5]).

Составляя необходимые условия минимума функционала (3.1) (с учетом его недифференцируемости), приходим к неравенству (2.5), следовательно, для решения рассматриваемой в данной работе задачи можно применить технику локального потенциала [4,5]. К сожалению, современное состояние этого метода не позволяет эффективно строить решения и получить обоснование — доказать теоремы существования и единственности, поэтому ниже будет применен другой прием, заимствованный из теории квазивариационных неравенств.

4. Метод последовательных приближений и теоремы существования. Для решения неравенства (2.5) применим следующий итерационный процесс (индекс $t + dt$ опускаем):

$$(4.1)\qquad a(u^{r+1}, v-u^{r+1}) - L_*(v-u^{r+1}) + \\ + \int\limits_{S_c} f\,|\sigma_N(u^r)|\,(|v_T - u_T{}^t| - |u_T^{r+1} - u_T{}^t|)\,dS \geqslant 0 \\ \forall v \in K, \quad u^{r+1} \in K$$

Величина u° задается, r — номер итерации. Для каждого значения индекса r неравенство (4.1) приводится к обычной задаче минимизации функционала

$$J(v) = 0{,}5a(v, v) - L_*(v) + \int\limits_{S_c} f\,|\sigma_N(u^r)|\,|v_T - u_T{}^t|\,dS \tag{4.2}$$

на множестве K; утверждение о существовании и единственности решения u^{r+1} немедленно следует из классических теорем существования и единственности минимума строго выпуклого функционала на замкнутом выпуклом множестве.

Относительно существования решения можно установить следующий (ограниченный) результат: если коэффициент трения f достаточно мал (см. ниже), то последовательность, определяемая процессом (4.1), сводится к решению задачи (2.5).

Доказательство. Запишем неравенство (4.1) для предыдущего шага итерационного процесса, в получившемся неравенстве положим $v = u^{r+1}$, в неравенстве (4.1) положим $v = u^r$ и сложим результаты. Найдем

$$- a(u^{r+1} - u^r, u^{r+1} - u^r) + \int\limits_{S_c} [f\,|\sigma_N{}^r| - f\,|\sigma_N^{r-1}|] \times \tag{4.3}$$

$$\times [|u_T{}^r - u_T{}^t| - |u_T^{r+1} - u_T{}^t|]\,dS \geqslant 0$$

Имеет место неравенство положительной определенности

$$a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2_{H^1\Omega}, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0 \tag{4.4}$$

С помощью теоремы о следах [6] установливаем, что

$$\int\limits_{S_c} |\sigma_N(u)|\,|v_T|\,dS \leqslant C\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{4.5}$$

где C — постоянная, определяемая упругими модулями, формой тела и условиями закрепления.

Вводя обозначение $\delta u^r = u^r - u^t$ и воспользовавшись неравенствами (4.4) и (4.5), устанавливаем, что

$$\|\delta u^{r+1} - \delta u^r\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{Cf}{\alpha}\,\|\delta u^r - \delta u^{r-1}\|_{H^1(\Omega)}$$

Потребуем теперь, чтобы коэффициент трения f удовлетворял неравенству $f < \alpha / C$. Тогда последовательность $\{u^r\}$, определяемая процессом (4.1), будет сходящейся; обычным образом устанавливается, что ее предел удовлетворяет неравенству (2.5).

Отметим, что теоретическое вычисление верхней грани α / C для f представляется трудной задачей.

5. Алгоритм практического решения задачи, основанный на идее двойственности. С помощью результатов работы [7] задачу (4.2) приведем предварительно к виду

$$\min_{v \in V} \max_{\sigma_N \leqslant 0} \Big[J(v) + \int\limits_{S_c} \sigma_N(\delta_N - v_N)\,dS\Big] \tag{5.1}$$

$$\delta_N = \Psi(x) \,/\, |\nabla\Psi(x)|$$

Заметим, что

$$f\,|\sigma_N{}^r|\,|v_T - u_T{}^t| = \max_{\mu_T,\ |\mu_T| \leqslant f|\sigma_N{}^r|} \mu_T \cdot (v_T - u_T{}^r) \tag{5.2}$$

Следовательно, задача (5.1) приводится к следующей задаче разыскания седловой точки:

$$\min_{v\in V}\max_{\sigma_N\leqslant 0}\max_{|\mu_T|\leqslant f|\sigma_N{}^r|}\times \tag{5.3}$$

$$\times\left\{0.5a(v, v)-L_*(v)+\int_{S_c}[\mu_T\cdot(v_T-u_T{}^t)+\sigma_N(\delta_N-v_N)]\,dS\right\}$$

Используя условия стационарности функционала, можно показать, что $\mu_T=-\sigma_T$.

Решение задачи (5.3) производилось с помощью алгоритма типа Удзавы (Эрроу — Гурвица), который здесь принимает форму:

1) задаются распределения $\sigma_N^{r+1,0}$, $\sigma_T^{r+1,0}$ на S_C;

2) решается задача (5.3), эквивалентная обычной задаче теории упругости с граничным условием на S_c вида $\sigma_{ij}\nu_j=\sigma_N^{r+1,0}\nu_i+(\sigma_T^{r+1,0})_i$;

3) строятся новые распределения усилий контактного взаимодействия по формулам

$$\sigma_N^{r+1,1}=P_N\,[\sigma_N^{r+1,0}+\rho_{0N}(\delta_N-u_N^{r+1,0})]$$

$$\sigma_T^{r+1,1}=P_T\,[\sigma_T^{r+1,0}+\rho_{0T}(u_T^{r+1,0}-u_T{}^t)]$$

где

$$P_N(h)=\begin{cases}0, & h>0\\ h, & h\leqslant 0\end{cases},\quad P_T(l)=\begin{cases}l, & |l|\leqslant f|\sigma_N{}^0|\\ \dfrac{1}{|l|}lf|\sigma_N{}^0|, & |l|>f|\sigma_N{}^0|\end{cases}$$

— операторы ортогонального проектирования на множество $\sigma_N\leqslant 0$, $|\sigma_T|\leqslant f\,|\sigma_N{}^r|$, ρ_{0N}, ρ_{0T} — параметры, регулирующие сходимость метода.

Классический алгоритм метода квазивариационных неравенств состоит в том, что при фиксированном σ_T итерации по σ_N проводятся до достижения сходимости.

Сходимость алгоритма 1) — 3) обеспечивается вогнуто-выпуклой структурой задачи (строгой выпуклостью по v и вогнутостью по σ_N, σ_T).

6. Динамическая задача. Рассмотрим эту задачу на основании принципа возможных скоростей; в соответствии с этим принципом имеем

$$\langle\rho u^{\cdot\cdot}, \delta u^{\cdot}\rangle+a(u, \delta u^{\cdot})=\int_{S_c}\sigma(u)\cdot\nu\cdot\delta u^{\cdot}dS+L_*(\delta u^{\cdot}) \tag{6.1}$$

где
$$\langle\rho u^{\cdot\cdot}, \delta u^{\cdot}\rangle=\int_\Omega\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial t}d\Omega,\quad \delta u^{\cdot}=v^{\cdot}-u^{\cdot}$$

($u^{\cdot}$ — истинное поле скоростей, $v^{\cdot}$ — кинематически возможное поле скоростей; функционалы a и L_* определены в п. 2).

Обобщая построения Остроградского [8] (с уточнениями Майера и Цермело) на случай имеющейся здесь континуальной односторонней связи, введем множество точек

$$S_c{}^t=\{x\mid x\in S_c;\ \ \Psi(x)+u(x, t)\cdot\nabla\Psi(x)=0$$
$$u^{\cdot}(x, t)\cdot\nabla\Psi(x)=0,\ u^{\cdot}(x, t)\cdot\nabla\Psi(x)=0\}$$

где $u(x, 0)$ и $u^{\cdot}(x, 0)$ определяются начальными условиями, $u^{\cdot\cdot}(x, 0)$ определяется с помощью принципа наименьшего принуждения Гаусса, и подчиним выбор $\delta u^{\cdot}$ ограничению

$$\delta u^{\cdot}(x, t+dt)\cdot\nabla\Psi(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in S_c^t$$

Тогда для скорости работы нормального давления будем иметь оценку

$$\int\limits_{S_c} \sigma_N \delta u_N^{\cdot} dS \geqslant 0 \tag{6.2}$$

Имеет место неравенство

$$\sigma_T(u)\cdot\delta u_T^{\cdot} \geqslant f\,|\,\sigma_N(u)\,|\,(|\,v_T^{\cdot}\,| - |\,u_T^{\cdot}\,|) \tag{6.3}$$

устанавливаемое точно так же, как и неравенство (2.4).

Учитывая (6.2) и (6.3), заключаем, что решение динамической задачи удовлетворяет неравенству

$$\langle \rho u^{\cdot\cdot}, \delta u^{\cdot}\rangle + a(u, \delta u^{\cdot}) + \int\limits_{S_c} f\,|\,\sigma_N(u)\,|\,(|v_T^{\cdot}| - |u_T^{\cdot}|)\,dS \geqslant \tag{6.4}$$

$$\geqslant L_*(\delta u^{\cdot}), \quad \delta u^{\cdot}\cdot\nabla\Psi(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in S_c^t$$

Обратно, любое решение неравенства (6.4), обладающее вторыми производными, удовлетворяет уравнениям (1.1) — с учетом инерционных членов — и условиям (1.2) — (1.6).

7. **Априорная оценка решения.** Заметим, что $\sigma_N u_N^{\cdot} = 0$ на S_c, следовательно, из уравнения (6.1) можем найти ($\rho = \mathrm{const}$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}\langle u^{\cdot}, u^{\cdot}\rangle + \frac{1}{2}a(u, u)\right] + \int\limits_{S_c} |\sigma_T|\,|u_T^{\cdot}|\,dS = L_*^t(u^{\cdot}) \tag{7.1}$$

(при построении равенства (7.1) использовано последнее из соотношений (1.6)).

Проинтегрируем (7.1) в пределах от 0 до t, получим

$$\frac{\rho}{2}\langle u^{\cdot}\rangle^2 + \frac{1}{2}a(u, u) + \int\limits_0^t \int\limits_{S_c} |\sigma_T(u)|\,|u_T^{\cdot}|\,dS d\tau = \tag{7.2}$$

$$= \frac{\rho}{2}\langle u^{\cdot}(0)\rangle^2 + \frac{1}{2}a(u(0), u(0)) + \int\limits_0^t L_*^{\tau}(u^{\cdot}(\tau))\,d\tau, \quad \langle u^{\cdot}\rangle^2 \equiv \langle u^{\cdot}, u^{\cdot}\rangle$$

Справедлива оценка

$$\int\limits_0^t L_*^{\tau}(u^{\cdot})\,d\tau \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \|L_*^{\tau}\|^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \langle u^{\cdot}\rangle^2 d\tau \tag{7.3}$$

Воспользуемся неравенством коэрцитивности (4.4), выберем $\min\{\rho / 2, \alpha / 2\} \equiv c_0$, $\varepsilon / 2 = c_0$, отбросим слева в (7.2) последнее слагаемое, и добавим справа в (7.2) интеграл

$$\frac{1}{2}c_0 \int\limits_0^t \|u(\tau)\|^2\,d\tau$$

в итоге получим неравенство

$$c_0\varphi(t)\leqslant c_1c_0+\int_0^t\frac{1}{2\varepsilon}\|L_*^\tau\|^2d\tau+c_0\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau \tag{7.4}$$

$$(\varphi(t)\equiv\langle u^\cdot(t)\rangle^2+\|u(t)\|^2,\quad c_1c_0=\frac{\rho}{2}\langle u^\cdot(0)\rangle^2+\frac{1}{2}a(u(0),u(0)))$$

Из (7.4) с помощью неравенства Гронуолла получаем

$$\varphi(t)\leqslant\left(\frac{1}{4c_0^2}\int_0^t\|L_*^\tau\|^2d\tau+c_1\right)e^t \tag{7.5}$$

Из неравенства (7.5) следует, что

$$u(t)\in L^2(0,\,T;\,V),\quad u^\cdot(t)\in L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))$$

(определение пространства $L^2(0,\,T;\,X)$ см., например, в книге [9]; V определено так же, как и в работе [2]).

8. Разностные схемы для решения динамической задачи. Проблема сходимости. Приведем одну из разностных (по t) схем решения неравенства (6.4) (τ — шаг разбиения)

$$a(u^{t+\tau},\ v-u^{t+\tau})+L_*^{t+\tau}(v-u^{t+\tau})+\int_{S_c}f|\sigma_N^{t+\tau}|(|v_T-u_T{}^t|- \tag{8.1}$$

$$-|u_T^{t+\tau}-u_T{}^t|)\,dS+\frac{\rho}{\tau^2}\int_\Omega(u^{t+\tau}-2u^t+u^{t-\tau})\cdot(v-u^{t+\tau})\,d\Omega\geqslant0$$

(8.1) — чисто неявная схема; другие разностные схемы могут быть построены путем вычисления части оператора в неравенстве (8.1), не содержащей инерционных членов, на временном слое $t^\theta=t+\theta\tau$, $0\leqslant\theta\leqslant1$; при $\theta=0$ получим явную схему.

Существование и единственность решения неравенства (8.1) доказывается точно так же, как и в п. 4, так как оператор, возникающий из-за сил инерции, положительно определен.

Приведем схему исследования сходимости при $\tau\to0$. Построив разностный аналог неравенства (7.5), убеждаемся в том, что последовательность приближенных решений ограничена в $L^2(0,\,T;\,V)$ равномерно относительно τ, последовательность аппроксимаций скоростей $(u^{t+\tau}-u^t)/\tau$ ограничена в $L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))$. Налагая надлежащие требования гладкости на внешние воздействия, форму штампа и условия согласования начальных и краевых условий, устанавливаем ограниченность аппроксимаций ускорений. После этого, пользуясь свойствами аппроксимации и непрерывности форм, входящих в неравенство (8.1), переходим к пределу при $\tau\to0$.

Подчеркнем (и это отмечено впервые Тремольером [10]), что исследование разностных схем в неравенствах в принципе отличается от исследования схем для уравнений, так как здесь из аппроксимации и устойчивости не следует, вообще говоря, сходимость.

9. Обобщения. Закон трения Кулона может, как отмечалось рядом авторов, приводить к физически абсурдным результатам, например, к неограниченному росту напряжений при отсутствии течения материала; более реальным является следующий закон [11]:

$$
\begin{aligned}
&(9.1) \qquad |\sigma_T| < f|\sigma_N| \ \text{ и } \ |\sigma_T| < \tau_s \Rightarrow u_T^{\boldsymbol{\cdot}} = 0 \\
&|\sigma_T| = f|\sigma_N| \ \text{ или } \ |\sigma_T| = \tau_s \Rightarrow \frac{u_T^{\boldsymbol{\cdot}}}{|u_T^{\boldsymbol{\cdot}}|} = -\frac{\sigma_T}{|\sigma_T|}
\end{aligned}
$$

В (9.1) $f = \mathrm{const}$ или функция $|u_T^{\boldsymbol{\cdot}}|$, $\tau_s = \mathrm{const}$ или функция интенсивности деформаций и интенсивности скорости деформаций.

Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 2, дают неравенство

$$
\begin{aligned}
&(9.2) \qquad a(u^{t+dt}, w - u^{t+dt}) - L_*^{t+dt}(w - u^{t+dt}) + \\
&+ \int\limits_{S_c} [f|\sigma_N| + (\tau_s - f|\sigma_N|)\,\theta_0(f|\sigma_N| - \tau_s)]\,[|dw_T| - |du_T|]\,dS \geqslant 0
\end{aligned}
$$

где θ_0 — единичная функция («ступенька») Хевисайда.

Алгоритм решения этого неравенства строится точно так же, как и выше, различие состоит в том, что на касательные напряжения налагается дополнительное ограничение $|\sigma_T| \leqslant \tau_s$.

Отметим в заключение, что впервые вариационный подход к исследованию влияния трения в задаче о соприкосновении деформируемого тела с жестким штампом применен в работе [12], однако рассмотренная в [12] постановка обладает рядом дефектов с точки зрения механики: закон Кулона связывает напряжения и перемещения (заметим, что в отдельных случаях переход от скоростей к перемещениям действительно возможен [13]); произведение $f|\sigma_N|$ считается постоянным; зона соприкосновения предполагается постоянной. Эти гипотезы позволили привести задачу к минимизации недифференцируемого функционала без ограничений, в то время как физически содержательная постановка, как показано в данной работе, приводит к последовательности задач минимизации с ограничениями в виде неравенств.

Поступила 10 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
2. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
3. *Bensoussan A., Goursat M., Lions J.-L.* Controle impulsionnel et inéquations quasivariationnelles stationnaires. C. r. Acad. sci., Ser. A, 1973, t. 276, N 19, p. 1279—1284.
4. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., «Мир», 1973.
5. *Шехтер Р.* Вариационный метод в инженерных расчетах. М., «Мир», 1971.
6. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М., «Наука», 1975.
7. *Кравчук А. С.* О двойственности в контактных задачах. ПММ, 1979, т. 43, вып. 5.
8. *Остроградский М. В.* Полное собрание трудов, т. II. Киев, Изд-во АН УССР, 1961.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
10. *Glowinski R., Lions J.-L., Tremolières R.* Analyse numèrique des inéquations variationnelles. Paris, Dunod, 1976.
11. *Ильюшин А. А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.
12. *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Paris, Dunod, 1972.
13. *Кравчук А. С.* К постановке краевых задач с трением на границе. В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Вып. 2. Куйбышев, 1976.