

**О РАСЧЕТЕ ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНЫХ ЦЕЛИКОВ  
ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕФТИ ВОДОЙ  
ИЗ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТА**

**В. М. Ентов, Т. А., Малахова, В. Н. Панков, С. В. Панько**

(Москва, Томск)

Теория расчета предельно-равновесных целиков остаточной вязкопластической нефти [1-4] обобщается на случай слоисто-неоднородных пластов со свободным перетоком жидкости между слоями. Возникающая при этом задача сводится к системе нелинейных интегральных уравнений. Приводятся примеры построения приближенного аналитического и численного решений.

1. Допустим, что нефть, первоначально находившаяся в тонком слоистом пласте, достаточно долго вытеснялась водой и оставалась только в тех частях пласта, где градиент давления меньше предельного градиента давления для нефти ( $G_i$  в  $i$ -м пропластке). В области, занятой водой, движение ее происходит в соответствии с законом Дарси и распределение давления удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0$$

где  $k$  — эффективная проницаемость воды после вытеснения нефти — предполагается кусочно-постоянной функцией координаты  $z$  ( $k = k_i$  при  $z_i < z < z_{i+1}$ ). Будем считать пропластки занумерованными в порядке убывания проницаемости ( $k_1 > k_2 > \dots > k_n$ ), так, что  $G_1 < G_2 < \dots < G_n$ . Примем также, что границы целиков в каждом из пропластков представляют собой цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси  $z$  (данное предположение может быть снято, при этом математическая формулировка задачи оказывается несколько иной).

Обозначим через  $D_j$  проекцию на плоскость  $x, y$  целика в  $j$ -м пропластке. Тогда область, занятая целиками в плане, последовательно расширяется по мере перехода к менее проницаемым пропласткам  $D_j \subset D_{j+1}$ . Движение воды в области, не занятой целиками, происходит таким же образом, как и в слоисто-неоднородном пласте кусочно-постоянной мощности. Оставаясь в рамках предположения об идеальной сообщаемости пропластков и осредняя движение по мощности пласта, получим (ср. [5])

$$(1.2) \quad \text{grad } p = - \frac{\mu(h_1 + h_2 + \dots + h_n)}{k_1 h_1 + k_2 h_2 + \dots + k_j h_j} \mathbf{w}$$

$$\text{div } \mathbf{w} = 0 \quad (M(x, y) \in D_{j+1} / D_j)$$

Здесь  $w$  — вектор средней по мощности пласта скорости фильтрации,  $p$  — приведенное к одной высоте давление, векторные операции рассматриваются в плоскости  $x, y$ . Номер  $j$ , до которого ведется суммирование в (1.2), определяется тем, какая часть пропластков (с  $j + 1$  до  $n$ ) в данной точке  $(x, y)$  пласта занята целиками. Таким образом, осредненное движение воды при заданном расположении целиков описывается уравнениями плоского фильтрационного потока в кусочно-неоднородной среде, причем роль границ, разделяющих зоны различной эффективной проницаемости, играют проекции границ целиков на плоскость  $x, y$  (линии  $\Gamma_j$ ), которые сами подлежат определению в ходе решения задачи.

Дополнительные условия, которые служат для определения границ  $\Gamma_j$ , вытекают из следующего, физически очевидного условия предельного равновесия; равновесие целика в  $j$ -м пропластке возможно постольку, поскольку градиент давления в нем не превосходит по модулю значения  $G_j$ , равновесие является предельным в том смысле, что на границе целика всюду градиент давления равен его предельному значению

$$(1.3) \quad |\text{grad } p(x, y)| = G_j, \quad (x, y) \in \Gamma_j$$

Это условие означает, что при малейшем увеличении градиентов давления (скорости вытеснения), по крайней мере в части целика, градиент давления превзойдет предельное значение, и нефть придет в движение. Для границы  $\Gamma_1$  области, в которой нет движения воды, условие (1.3) совпадает с использованным ранее в теории целиков для однородных пластов.

Укажем смысл условия (1.3) на остальных границах целиков. В соответствии с соотношениями (1.2) на этих границах выполняются обычные условия непрерывности давления и потока

$$(1.4) \quad p^+ = p^-, \quad \left(k \frac{\partial p}{\partial n}\right)^+ = \left(k \frac{\partial p}{\partial n}\right)^-$$

Индексами плюс и минус отмечены предельные значения давления, его нормальной производной и эффективной проницаемости при приближении к границе изнутри и снаружи соответственно.

Заметим, что для принятой схемы течения  $k^+ < k^-$  и, следовательно,  $\partial p^+ / \partial n > \partial p^- / \partial n$ . Дифференцируя первое равенство [(1.4) вдоль касательной к контуру, получим  $\partial p^+ / \partial s = \partial p^- / \partial s$ . Таким образом, имеем  $|\text{grad } p^+| > |\text{grad } p^-|$ . Учитывая это неравенство, приходим к основному выводу: при использовании для определения границ целиков  $\Gamma_j$  условия предельного равновесия (1.3) в него следует подставлять предельные значения модуля градиента давления изнутри области  $D_j$ , занятой целиком. При этом предельное значение градиента давления, рассчитываемое при приближении к границе целика снаружи, будет меньше порогового значения  $G_j$ .

Этот вывод может показаться парадоксальным, поскольку в  $j$ -м пропластке целик извне будет омываться потоком, градиент давления в котором на границе с целиком будет меньше предельного для этого пропластка, и, казалось бы, можно увеличить размеры целика, не нарушив его предельного равновесия. Однако при расширении целика градиент давления превзойдет предельное значение не во внешней по отношению к целику области, а в области движения воды под (или над) целиком. В силу

предположения о гидростатическом распределении давления по мощности пласта градиент давления внутри целика станет при этом выше предельного, что противоречит сделанным допущениям.

Таким образом, дополнительные условия для определения границ целиков имеют вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} |\operatorname{grad} p^-| &= G_1, \quad x, y \in \Gamma_1 \\ |\operatorname{grad} p^+| &= G_j, \quad x, y \in \Gamma_j, \quad j > 1 \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся случаем двуслойного пласта, считая, что предельным градиентом для наиболее проницаемого пропластка можно пренебречь, т. е.  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = G$ .

2. Подобно другим плоским задачам нелинейной фильтрации (ср. [4,5]) сформулированная в п. 1 задача допускает класс точных элементарных решений с критической точкой в начале координат

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p &= Ar^s \cos(s\theta), \quad r < R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/s \\ p &= (Br^s + Cr^{-s}) \cos(s\theta), \quad R < r < \infty \\ R &= \left(\frac{G}{As}\right)^{1/(s-1)}, \quad B = \frac{G}{s} R^{1-s} \frac{1}{1-\lambda} \\ C &= -\frac{G}{s} R^{s+1} \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \lambda = \frac{k^+ - k^-}{k^+ + k^-} \end{aligned}$$

и на бесконечности

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p &= (Ar^s + Br^{-s}) \cos(s\theta), \quad r < R \\ p &= Cr^{-s} \cos(s\theta), \quad r > R, \quad 0 < \theta < \pi/s \\ R &= \left(\frac{G}{Cs}\right)^{1/(s+1)}, \quad A = -\frac{G}{s} R^{1-s} \frac{\lambda}{1-\lambda} \\ B &= \frac{G}{s} R^{1+s} \frac{1}{1-\lambda}, \quad s > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты. Решение (2.1) при  $s > 1$  соответствует внутреннему обтеканию угла раствором  $\pi/s$  с особенностью на бесконечности. Целик занимает сектор радиуса  $R$ , примыкающий к вершине угла. При  $1/2 < s < 1$  имеем течение в угле раствором  $\theta_0 = \pi/s > \pi$  (внешнее обтекание клина), целик занимает внешность сектора радиуса  $R$ . Решению (2.2) отвечает течение внутри угла раствором  $\pi/s$  с особенностью типа обобщенного диполя в вершине угла. Целик занимает внешность сектора радиуса  $R$ .

Наконец, существует тривиальное плоскорадиальное течение, соответствующее источнику, расположенному в начале координат.

3. Используя элементарные решения и технику сращиваемых асимптотических разложений [6], можно для ряда задач построить приближенные решения, отвечающие большим [и малым значениям интенсивности потока. Покажем это на простом примере течения, создаваемого батареей  $n$  равнодебитных скважин. При отсутствии предельного градиента ( $G = 0$ ) соответствующий комплексный потенциал имеет вид

$$(3.1) \quad p + i\psi = W(\zeta) \frac{\mu}{kh} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \ln(\zeta^n - a^n)$$

где  $q$  — интенсивность источника,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $k$  — средняя проницаемость пласта. Течение (3.1) имеет критические точки при  $\zeta = 0$  и на бесконечности, поэтому для малых, но конечных  $G$  можно ожидать появления двух целиков — малого внутреннего, занимающего окрестность начала координат, и внешнего, занимающего окрестность бесконечно удаленной точки.

Рассмотрим окрестность внутреннего целика. Внешнее решение задачи, отвечающее  $G = 0$ , имеет вид (3.1), а его внутренняя асимптотика

$$(3.2) \quad W(\zeta) = C - \frac{q}{2\pi} \frac{\zeta^n}{a^n} + \dots = C - \frac{q}{2\pi} \frac{r^n}{a^n} e^{in\theta} \quad (\zeta \rightarrow 0)$$

Внутреннее решение отвечает целику в окрестности критической точки в начале координат и дается соотношениями (2.1). Его внешняя асимптотика

$$(3.3) \quad p = Br^s \cos(s\theta) + \dots \quad (r \rightarrow \infty)$$

Из условия согласования асимптотик (3.2) и (3.3) следует

$$s = n, \quad B = \frac{\mu q}{2k\pi h a^n}$$

При этом все параметры внутреннего решения определяются формулами (3.1). В частности, для радиуса целика имеем

$$\frac{R}{a} = \left[ \frac{2\pi k^{-1} a G}{n\mu q} \frac{1}{1-\lambda} \right]^{1/(n-1)}$$

Так как на бесконечности исходное течение асимптотически совпадает с течением от источника интенсивности  $nq$ , то для внутреннего радиуса внешнего целика получаем

$$R_1 = \frac{h q \mu}{2\pi k^{-1} G} \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

4. Метод сращиваемых асимптотических разложений с использованием элементарных решений позволяет получить лишь главные члены асимптотики при малых и больших значениях интенсивности потока. В более общем случае задача может быть сведена к системе нелинейных интегральных уравнений, допускающих асимптотическое и численное решение. Покажем это на примере течения, создаваемого в двуслойном пласте парой источников — сток равной интенсивности  $Q$ , расположенных в точках  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ . В этом случае при достаточно больших  $Q$  возникает один целик, занимающий внешность овального контура  $\Gamma$ , внутри которого расположены источник и сток.

Искомое решение может быть представлено в виде наложения потенциала пары источник — сток  $\varphi(x, y)$  и потенциала простого слоя с плотностью  $\nu(\sigma)$ , сосредоточенного на контуре  $\Gamma$  (на применение интегродифференциальных уравнений для отыскания формы неизвестного контура авторов натолкнули работы В. Л. Данилова и его учеников (см., напри-

мер, [1]). Тогда

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + \int_{\Gamma} v(\sigma) \ln \frac{1}{R} d\sigma$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{Q\mu}{4\pi k^-} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma$$

При этом  $p(x, y)$  меняется непрерывно при переходе через контур  $\Gamma$  и обладает заданными особенностями на скважинах. Условия равенства потоков и предельного равновесия дают следующую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений для отыскания плотности  $v(x, y)$  и формы контура  $\Gamma$

$$(4.1) \quad \frac{\pi}{\lambda} v + \int_{\Gamma} v(\sigma) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R} d\sigma + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \int_{\Gamma} v(\sigma) \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{R} d\sigma = - \left[ G^2 - \frac{\pi^2 (1 - \lambda)^2}{\lambda^2} v^2 \right]^{1/2}$$

При выводе системы (4.1) учтены свойства производных потенциала простого слоя; нормаль считается внутренней.

Перейдем в системе (4.1) к полярным координатам  $r$  и  $\theta$ . Считая контур  $\Gamma$  заданным уравнением  $r = g(\theta)$ , получим

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} v(\theta) + \int_0^{2\pi} v(\alpha) \frac{L(\alpha)}{L(\theta)} K_0[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)] d\alpha = \\ = -\frac{ac}{L(\theta) l^2[\theta, g(\theta)]} [g(\theta)(a^2 - g^2(\theta)) \cos \theta + g'(\theta)(a^2 + g^2(\theta)) \sin \theta] \\ \int_0^{2\pi} v(\alpha) \frac{L(\alpha)}{L(\theta)} K_1[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)] d\alpha + \left[ G^2 - \frac{\pi^2 (1 - \lambda)^2}{\lambda^2} v^2(\theta) \right]^{1/2} = \\ = -\frac{ac}{L(\theta) l^2[\theta, g(\theta)]} [g'(\theta)(a^2 - g^2(\theta)) \cos \theta - (a^2 + g^2(\theta)) g(\theta) \sin \theta] \end{aligned}$$

Здесь

$$K_0[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)] = \frac{g^2(\theta) - g(\theta)g(\alpha) \cos(\theta - \alpha) - g'(\theta)g(\alpha) \sin(\theta - \alpha)}{\kappa^2(\alpha, \theta)}$$

$$\begin{aligned} K_1[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)] = \\ = \frac{g(\theta)g'(\theta) - g(\alpha)g'(\theta) \cos(\theta - \alpha) + g(\alpha)g(\theta) \sin(\theta - \alpha)}{\kappa^2(\alpha, \theta)} \end{aligned}$$

$$\kappa^2(\alpha, \theta) = g^2(\theta) - 2g(\theta)g(\alpha) \cos(\theta - \alpha) + g^2(\alpha),$$

$$l^2[\theta, g(\theta)] = a^4 - 2a^2g^2(\theta) \cos 2\theta + g^4(\theta)$$

$$L(\theta) = [g^2(\theta) + g'^2(\theta)]^{1/2}, \quad c = Q\mu / (\pi k^-)$$

Полагая в системе (4.2)

$$v(\theta) = Gm(\theta), \quad g(\theta) = \sqrt{\frac{Qa}{\pi G}} q(\theta), \quad \varepsilon = \frac{\pi a k^- G}{Q\mu}$$

получим из нее систему того же вида с заменой  $v$  на  $m$ ,  $g$  на  $q$ ,  $a^2$  на  $\varepsilon$ , а  $G$  и  $ac$  равными единице.

Решение этой системы будем искать, принимая  $\varepsilon$  малым параметром, т. е. рассматриваем течение достаточно большой интенсивности. При  $\varepsilon = 0$  получаем следующее решение:

$$m(\theta) = \frac{\lambda}{\pi(1-\lambda)} \cos \theta, \quad q(\theta) = q_0 = \sqrt{1-\lambda}$$

соответствующее асимптотическому в смысле п. 2 решению. Целик при этом принимает внешность круга радиуса  $R = [Qa(1-\lambda)\mu / (\pi Gk^-)]^{1/2}$ . При малых  $\varepsilon$  положим

$$m(\theta) = \frac{\lambda}{\pi(1-\lambda)} \cos \theta + \varepsilon m_1(\theta), \quad q(\theta) = q_0 + \varepsilon q_1(\theta)$$

Тогда имеем

$$K_0 = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2q_0} \frac{[q_1(\theta) - q_1(\alpha)] \cos(\theta - \alpha) - q_1'(\theta) \sin(\theta - \alpha)}{1 - \cos(\theta - \alpha)}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\theta - \alpha}{2} + \varepsilon \frac{q_1(\theta)}{q_0} \right], \quad \frac{L(\alpha)}{L(\theta)} = 1 + \varepsilon \frac{q_1(\alpha) - q_1(\theta)}{q_0}$$

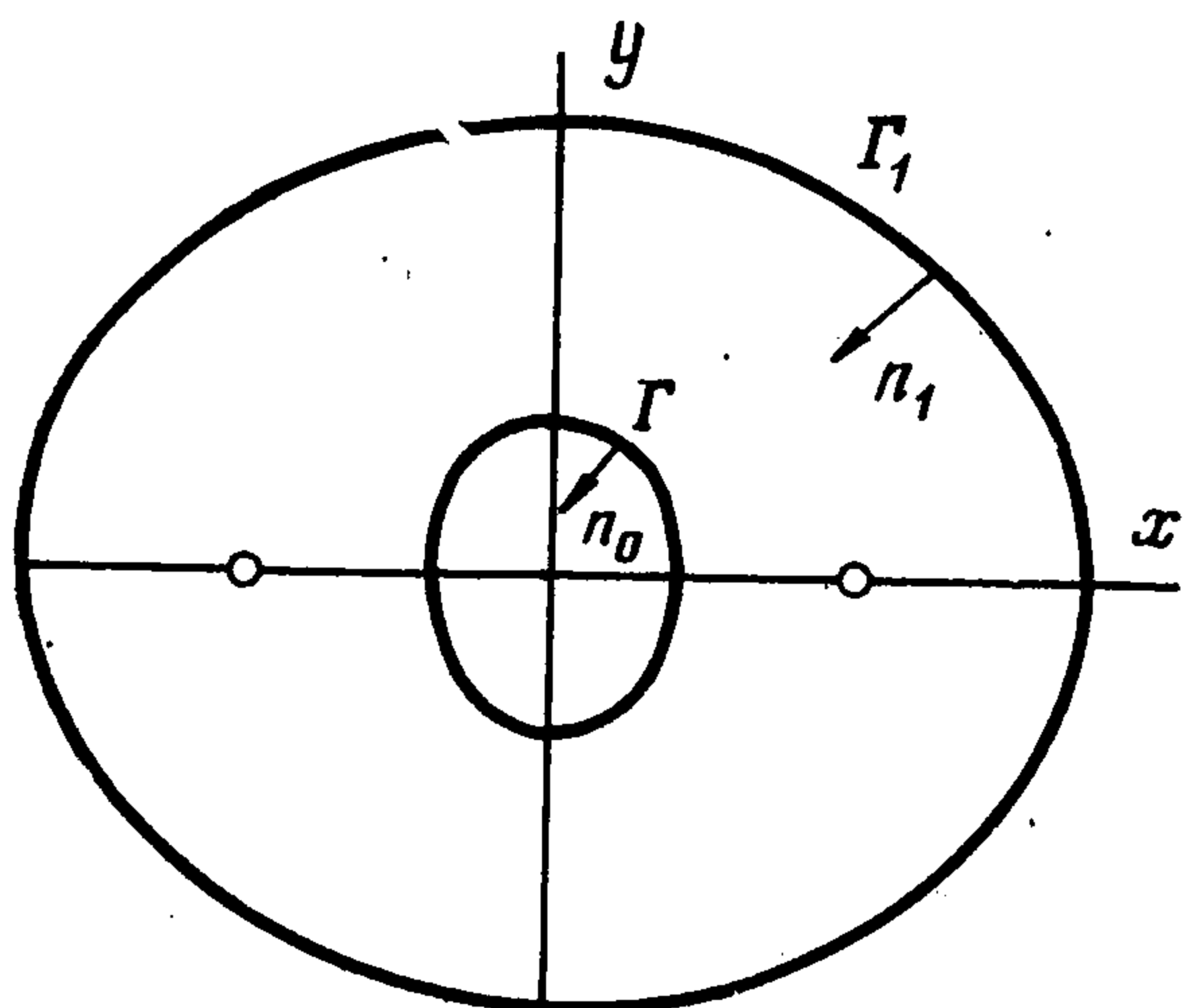
Из системы (4.2), записанной в безразмерных переменных, получаем линейную систему сингулярных интегродифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{\lambda} m_1(\theta) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} m_1(\alpha) d\alpha + \frac{\lambda}{2\pi(1-\lambda)} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \times \\ & \times \frac{[p(\theta) - p(\alpha)] \cos(\theta - \alpha) - p'(\theta) \sin(\theta - \alpha)}{1 - \cos(\theta - \alpha)} d\alpha + \\ & + \frac{\cos \theta}{1-\lambda} \left[ \frac{1}{1-\lambda} - \frac{2}{1-\lambda} \cos 2\theta + 2p(\theta) \right] + \frac{p'(\theta) \sin \theta}{1-\lambda} = 0 \\ & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} m_1(\alpha) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \alpha}{2} d\alpha - \frac{\lambda}{2\pi(1-\lambda)} \int_0^{2\pi} \cos \alpha [p(\theta) - p(\alpha)] \times \\ & \times \operatorname{ctg} \frac{\theta - \alpha}{2} d\alpha - \frac{\sin \theta}{1-\lambda} \left[ \frac{1 + 2 \cos 2\theta}{1-\lambda} - 2p(\theta) \right] - \\ & - \frac{p'(\theta) \cos \theta}{1-\lambda} = \frac{\pi(1-\lambda)}{\lambda} m_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta \\ & p(\theta) = q_1(\theta) / q_0 \end{aligned}$$

Ее решение с точностью до квадратичных по  $\varepsilon$  членов имеет вид

$$q(\theta) = \sqrt{1-\lambda} + \varepsilon \frac{2 \cos 2\theta - \lambda}{4 \sqrt{1-\lambda}}$$

$$m(\theta) = \frac{\lambda}{\pi(1-\lambda)} \cos \theta$$



Фиг. 1

достаточно малом значении параметра  $\varepsilon = (\pi a k^- G / Q\mu)^2$ , образуются два целика — внутренний, ограниченный контуром  $\Gamma_0$ , и внешний, ограниченный изнутри контуром  $\Gamma_1$  (фиг. 1).

5. Тот же подход применим с незначительными модификациями и к другим более сложным задачам об определении размеров целиков. При этом для построения решения существенно заранее иметь представление о числе и общем расположении целиков. Так, в случае течения, создаваемого двумя источниками равной интенсивности  $Q$  при

Вводя потенциалы простого слоя с плотностями  $v_0$  и  $v_1$  соответственно, задачу можно свести к решению системы уравнений, записанной в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad & \frac{\pi}{\lambda} m(\theta) + \int_0^{2\pi} m(\alpha) \frac{L(\alpha)}{L(\theta)} K_0[\alpha, \theta, q(\alpha), q(\theta)] d\alpha + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} M(\alpha) \frac{L_1(\alpha)}{L(\theta)} K_0[\alpha, \theta, f(\alpha), \varepsilon q(\theta)] d\alpha + \\
 & + \frac{\alpha^4 [\varepsilon q^4(\theta) - q^2(\theta) \cos 2\theta - q(\theta) q'(\theta) \sin 2\theta]}{L(\theta) l^2 [\theta, a \sqrt{\varepsilon} q(\theta)]} = 0 \\
 & \int_0^{2\pi} m(\alpha) \frac{L(\alpha)}{L(\theta)} K_1[\alpha, \theta, q(\alpha), q(\theta)] d\alpha + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} M(\alpha) \frac{L_1(\alpha)}{L(\theta)} K_1[\alpha, \theta, f(\alpha), \varepsilon q(\theta)] d\alpha \pm \\
 & \pm \left[ 1 - \frac{\pi^2 (1-\lambda)^2}{\lambda^2} m^2(\theta) \right]^{1/2} + \\
 & + \frac{\alpha^4 [\varepsilon q^3(\theta) q'(\theta) - q(\theta) q'(\theta) \cos 2\theta + q^2(\theta) \sin 2\theta]}{L(\theta) l^2 [\theta, a \sqrt{\varepsilon} q(\theta)]} = 0 \\
 & \frac{\pi}{\lambda} M(\theta) + \int_0^{2\pi} M(\alpha) \frac{L_1(\alpha)}{L_1(\theta)} K_0[\alpha, \theta, f(\alpha), f(\theta)] d\alpha + \\
 & + \varepsilon \int_0^{2\pi} m(\alpha) \frac{L(\alpha)}{L_1(\theta)} K_0[\alpha, \theta, \varepsilon q(\alpha), f(\theta)] d\alpha + \\
 & + \frac{\alpha^4 [f^4(\theta) - \varepsilon^2 f^2(\theta) \cos 2\theta - \varepsilon f(\theta) f'(\theta) \sin 2\theta]}{\varepsilon^2 L_1(\theta) l^2 [\theta, a f(\theta) / \sqrt{\varepsilon}]} = 0 \\
 & \int_0^{2\pi} M(\alpha) \frac{L_1(\alpha)}{L_1(\theta)} K_1[\alpha, \theta, f(\alpha), f(\theta)] d\alpha + \\
 & + \varepsilon \int_0^{2\pi} m(\alpha) \frac{L(\alpha)}{L_1(\theta)} K_1[\alpha, \theta, \varepsilon q(\alpha), f(\theta)] d\alpha \pm \\
 & \pm \left[ 1 - \frac{\pi^2 (1-\lambda)^2}{\lambda^2} M^2(\theta) \right]^{1/2} + \\
 & + \frac{\alpha^4 [f^3(\theta) f'(\theta) - \varepsilon f(\theta) f'(\theta) \cos 2\theta + \varepsilon f^2(\theta) \sin 2\theta]}{\varepsilon^2 L(\theta) l^2 [\theta, a f(\theta) / \sqrt{\varepsilon}]} = 0 \\
 & L_1(\theta) = [f^2(\theta) + f'^2(\theta)]^{1/2}, \quad \varepsilon = \left( \frac{\pi k^{-a} G}{\mu Q} \right)^2 \\
 & \left( g(\theta) = a \sqrt{\varepsilon} q(\theta), \quad F(\theta) = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon}} f(\theta) \right) \\
 & v_0 = \frac{Q\mu}{a\pi k^{-}} \sqrt{\varepsilon} m(\theta), \quad v_1 = \frac{Q\mu}{a\pi k^{-}} \sqrt{\varepsilon} M(\theta)
 \end{aligned}$$

В скобках приведены полярные уравнения внутреннего и внешнего контуров и соответствующие им плотности потенциалов простого слоя.

Нетрудно убедиться, что с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  исходная система распадается на две независимые системы для определения  $q(\theta)$

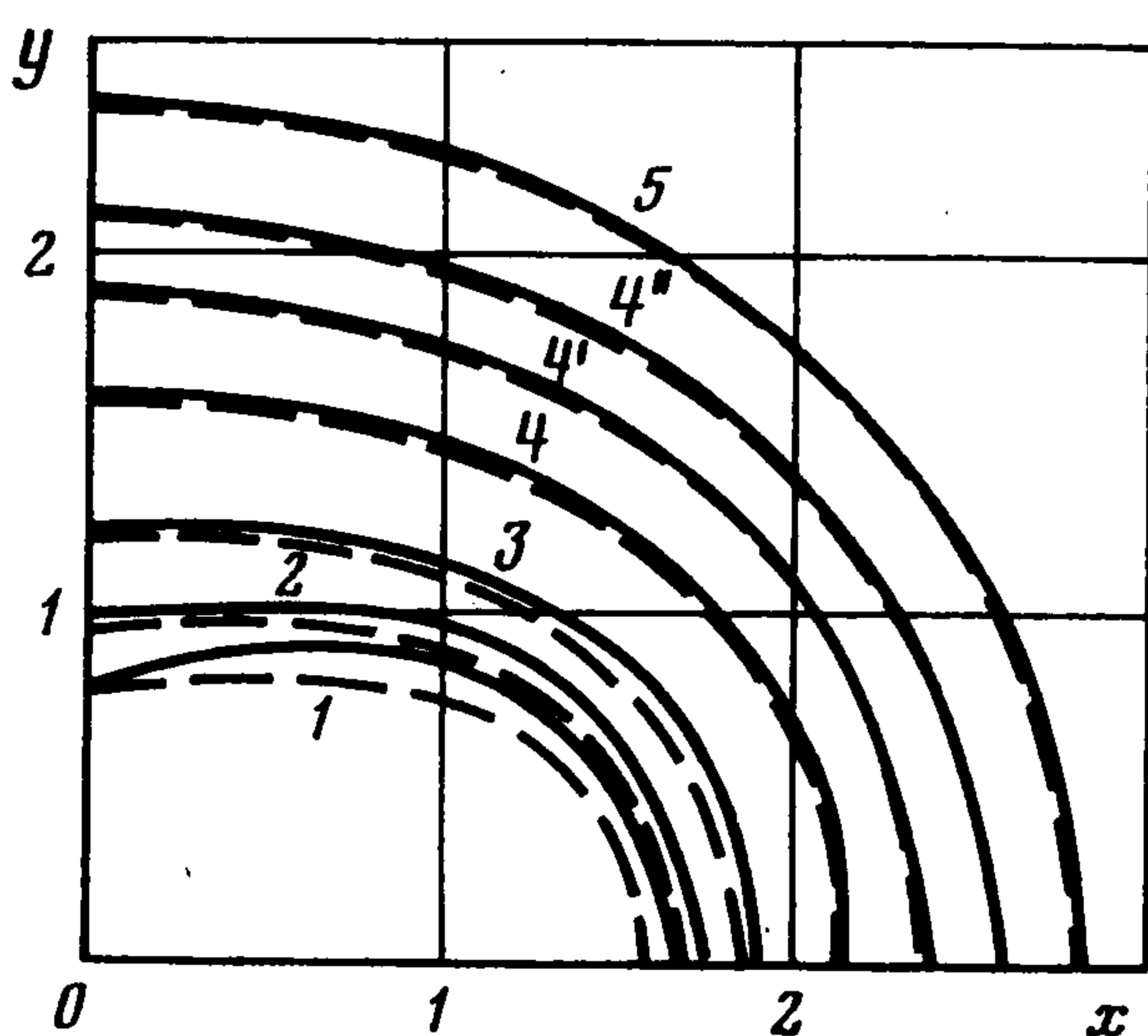
и  $m(\theta)$  и соответственно  $f(\theta)$  и  $M(\theta)$ . Проводя процедуру разложения по малому параметру подобно тому, как это было сделано в п. 4, получим приближенное решение этих систем. В размерных переменных оно имеет вид

$$g(\theta) = \frac{\pi a^2 k^- G}{Q\mu(1-\lambda)} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{(1-\lambda)^2} \cos 2\theta \right]$$

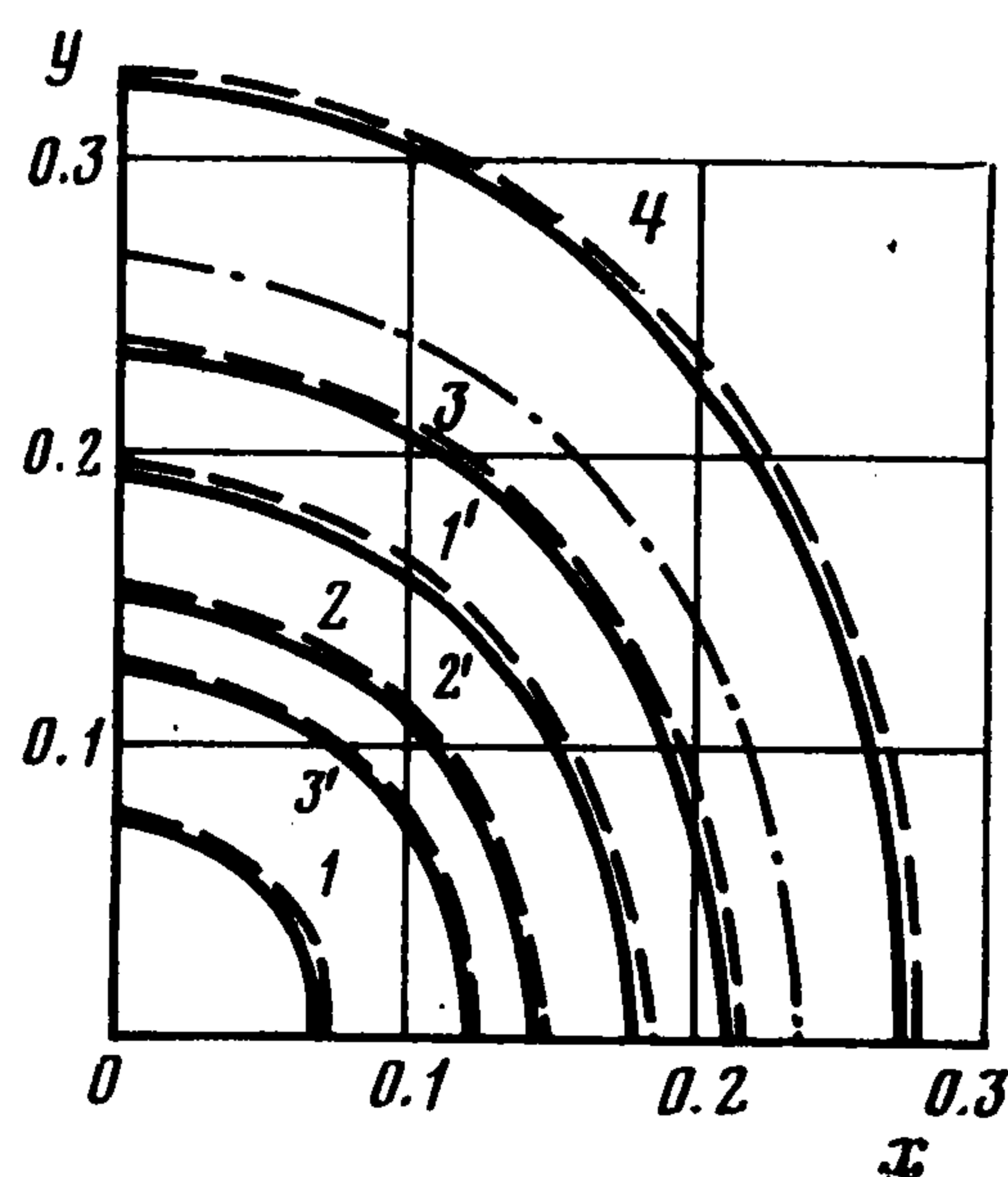
$$v(\theta) = -\frac{\lambda G}{\pi(1-\lambda)} \left[ \cos 2\theta + \frac{\varepsilon}{(1-\lambda)^2} \sin^2 2\theta \right]$$

$$F(\theta) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{Q\mu}{\pi k^- G}, \quad v_1(\theta) = -\frac{\lambda G}{\pi(1-\lambda)}$$

6. Задачи (4.2) и (5.1) решены также численно. При решении задачи (5.1) не учитывали влияние внешнего контура. Исходная система уравнений каждой задачи для



Фиг. 2



Фиг. 3

неизвестного контура  $g(\theta)$  и плотности потенциала на нем  $v(\theta)$  была представлена в виде

$$(6.1) \quad v(\theta) = \frac{\lambda}{\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \int_0^{2\pi} v(\alpha) K_0(\alpha, \theta) d\alpha \right), \quad \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 = G^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\pi(1-\lambda)}{\lambda} \frac{v(\theta)}{L(\theta)}, \quad \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \int_0^{2\pi} v(\alpha) K_1(\theta, \alpha) d\alpha$$

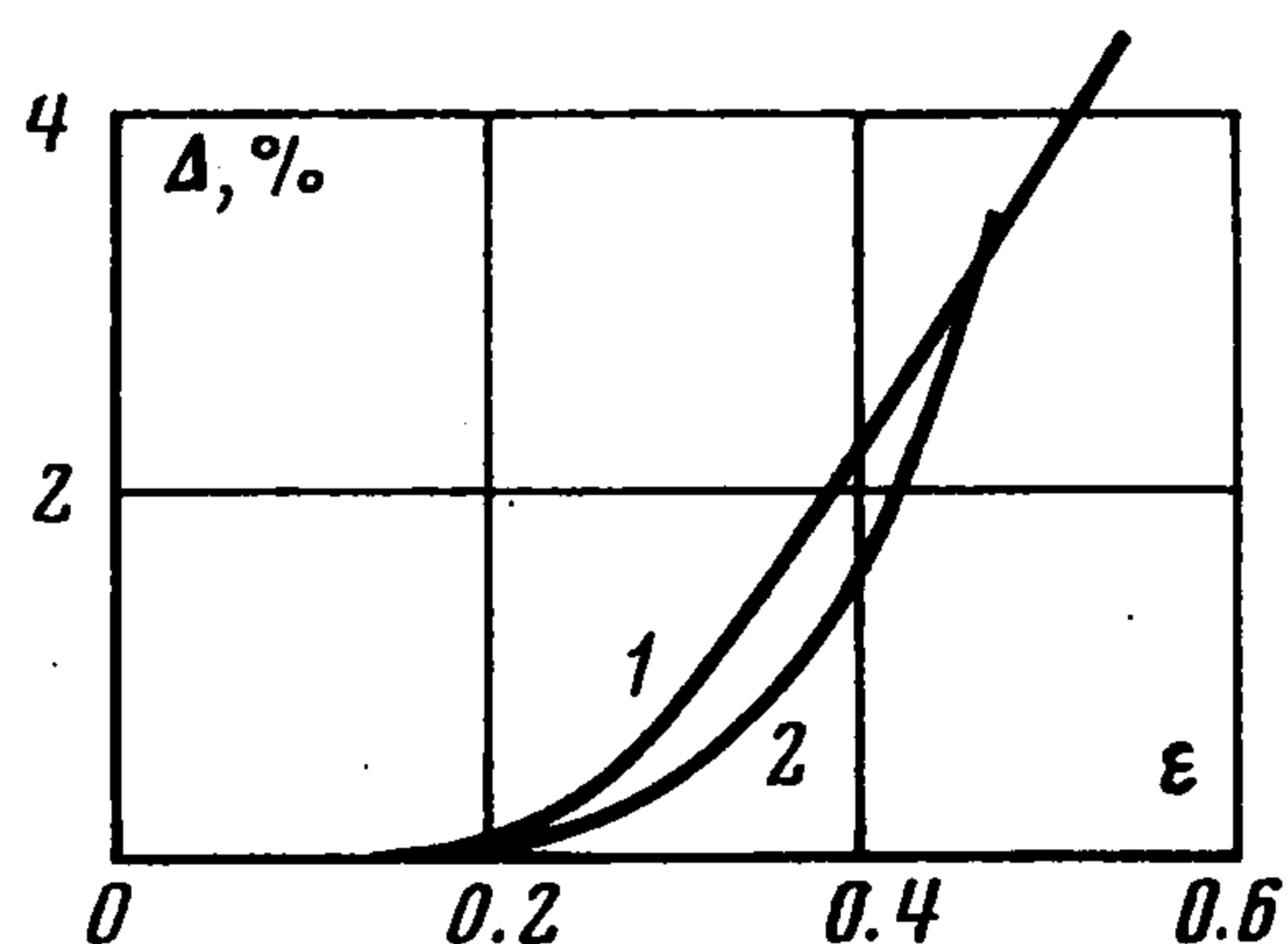
Здесь  $\varphi(r, \theta)$  — соответствующий каждой задаче потенциал пары.

Для решения первого уравнения системы (6.1), которое для заданного контура является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно  $v(\theta)$ , был использован метод последовательных приближений. Искомый контур  $g(\theta)$  определяли из второго уравнения системы, которое вместе с первым решали простейшим итерационным методом типа метода стрельбы. Начальным приближением служило как приближенное аналитическое решение, так и точное решение при  $\lambda = 0$ . Расчет каждого примера проводили до совпадения с заданной точностью контуров, полученных из двух начальных приближений. Для сокращения объема вычислений в обеих задачах использована соответствующая симметрия.

Расчеты проведены при различных значениях параметров  $\varepsilon$  и  $\delta = k^- / k^+$ , от которых зависит решение обеих задач. Результаты решения для системы источник — сток приведены на фиг. 2, а для системы источник — источник — на фиг. 3, где в безразмерных переменных показаны границы предельно-равновесных целиков, полученных различными методами. Здесь сплошные линии отвечают приближенно-аналитиче-

скому решению, штриховые — численному. Кривые 1—5 на фиг. 2 приведены для  $\delta = 2$  и соответствуют  $\varepsilon = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ , а кривые 4' и 4'' соответствуют значениям  $\varepsilon = 0.4$  и  $\delta = 5, 100$ . На фиг. 3 кривые 1—4 приведены также для  $\delta = 2$  и соответствуют  $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ , кривые 1', 2', 3' отвечают  $\varepsilon = 0.25$  и  $\delta = 2, 5, 100$ . Штрихпунктирная кривая здесь является точным решением задачи ( $\lambda = 0$ ) при  $\varepsilon = 0.25$ .

Для обеих задач результаты показывают хорошее совпадение численного и приближенно-аналитических решений, причем для фиксированного отношения  $\delta$  расхождение уменьшается вместе с  $\varepsilon$ , а при заданной величине параметра  $\varepsilon$  — с уменьшением  $\delta$ . Величина остаточного целика, полученного из приближенно-аналитического решения, меньше величины, полученной численным решением. Интегральная величина этого расхождения приведена на фиг. 4, где в зависимости от  $\varepsilon$  показана относительная величина площади  $\Delta$ , заключенной между двумя контурами, полученными разными методами. Кривая 1 здесь соответствует задаче для пары источник — сток, кривая 2 — для пары источник — источник. Видно, что при  $\varepsilon < 0.2$  величина  $\Delta$  практически равна нулю, и становится заметной ( $> 2\%$ ) лишь при  $\varepsilon > 0.4$ .



Фиг. 4

Поступила 31.1.1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967 гг.). М., «Наука», 1969.
2. Бернадинер М. Г. О предельной конфигурации застойных зон при вытеснении вязкопластической нефти водой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
3. Алишаев М. Г., Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Влияние предельного градиента на потери нефти при вытеснении ее водой. В сб.: Вопросы нелинейной фильтрации и нефтегазоотдачи при разработке нефтяных и газовых месторождений. М., 1972.
4. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., «Наука», 1975.
5. Ентов В. М. Двумерные и нестационарные одномерные задачи движения неньютоновских жидкостей в пористой среде. «Нефтяное хоз-во», 1968, № 10.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.